УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

***Карпина Анастасия Игоревна**, студент 1-го курса кафедры «Экономика, организация строительства и управление недвижимостью»*
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Мороз О.А., канд. физ.-мат. наук)

При исследовании экономических процессов используются различные математические методы, составляющие содержание таких разделов высшей математики, как линейная и векторная алгебра, математический анализ, теория игр, линейное программирование и т.п.

Одним из важных прикладных направлений является использование дифференциальных уравнений. Например, при решении задач оптимального управления экономической деятельностью предприятия и организацией производственного процесса.

В экономических исследованиях часто нужно установить связь между некоторыми переменными величинами, а также скоростями их изменения. Это, например, полные и средние издержки, спрос и цена товара, функция производительности, рост денежного вклада, заработная плата. Математическое моделирование таких задач приводит к составлению дифференциальных уравнений. Математическая модель - это совокупность уравнений, неравенств, логических условий, отражающих взаимосвязи и зависимости основных характеристик данной системы.

В основном экономические процессы имеют нелинейную структуру. Поэтому нелинейность заменяют на более простую линейную зависимость между величинами и их производными и исследуют уже упрощенную модель.

Пример. (Модель рынка с прогнозируемыми ценами)

В построении этой модели будем использовать теорию линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В простых ситуациях рыночной экономики спрос и предложение зависят от текущей цены на товар. В реальных ситуациях существует зависимость от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. Эти характеристики используют первую и вторую производную функции цены $p(t)$. Обозначим через $S(t)$ функцию спроса, через $q(t)$ функцию предложения.

Пусть $S(t) = p'' - 3p' - 6p$ и $q(t) = 2p'' + p' - 6$

Слагаемое с первой производной функции цены у $S(t)$ имеет знак «$-$», т.к. быстрый рост цены отпугивает покупателя. Вместе с тем первая производная функция цены у $q(t)$ имеет знак «+», т.к. темп изменения цены влияет на усиление предложения.

Из условия равновесия

$$S(t) = q(t)$$

получим

$$p'' - 3p' - 6p = 2p'' + p' - 6 \implies$$
$$p'' + 4p' + 6p = 6$$

Решим сначала однородное дифференциальное уравнение:

$$p'' - 3p' - 6p = 0 \implies$$
$$k^2 + 4k + 6 = 0$$
$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6} = -2 \pm \sqrt{2i}$$

Решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$p_0 = e^{-2t} \cdot (c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t)$$

Частное решение нелинейного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$p^* = A, \quad p^{*\prime} = p^{*\prime\prime} = 0$$

Подставим p^*, $p^{*\prime}$ и $p^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и получим

$$6A = 6 \implies A = 1 \text{ или } p^* = 1$$

Таким образом, общее решение будет следующим:

$$p(t) = e^{-2t} \cdot \left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right) + 1$$

Найдем $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-2t} \cdot \left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right) + 1\right) = 1$

Следовательно, все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $\tilde{p} = 1$. Поэтому все цены стремятся к устоявшейся цене $\tilde{p} = 1$ с колебаниями вокруг неё.

Пример 2. (Математическая модель рекламы)

Пусть $\mathrm{N} = 100$ - число потенциальных покупателей какой-либо продукции. Обозначим $y(t)$ как число потенциальных покупателей в момент времени t, которые знают о наличии в продаже данной продукции. Статистические исследования показывают, что скорость изменения функции $y(t)$ прямо пропорциональна как числу знающих о продаже, так и числу незнающих. Получим следующее дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = k \cdot y(t) \cdot \big(100 - y(t)\big),$$

Где k - коэффициент пропорциональности, который зависит от рекламы и скорости распространения слухов.

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y(100 - y)$$

$$\frac{dy}{y(100 - y)} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y(100y)} = k \int dt \text{ или } \int \frac{dy}{y(100y)} = -kt - \frac{1}{100} \ln c$$

$$\frac{1}{y(y - 100)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 100} \Rightarrow 1 = A(y - 100) + By \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -100A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{100}, B = \frac{1}{100}$$

Тогда:

$$\int \frac{-{}^{1}/_{100}}{y} + \frac{{}^{1}/_{100}}{y - 100} dy = -\frac{1}{100} \ln|y| + \frac{1}{100} \ln|y - 100| = \frac{1}{100} \ln \frac{y - 100}{y} + \frac{1}{100} \ln c = -kt$$

$$\frac{1}{100} \ln \frac{y - 100}{y} + \frac{1}{100} \ln c = -kt$$

$$\frac{c(y - 100)}{y} = e^{-100kt} \Rightarrow c - \frac{100c}{y} = e^{-100kt} \Rightarrow$$

$$\frac{100c}{y} = c - e^{-100kt} \Rightarrow y = \frac{100c}{c - e^{-100kt}}.$$

Анализ полученных общих и частных решений позволяет выявить возможности повышения эффективности экономических процессов.