

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

А. И. Дудяк  
Ж. Г. Дикан  
Ю. В. Василевич

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие  
по учебной дисциплине «Механика материалов»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий,  
в области транспорта и транспортной деятельности,  
в области приборостроения,  
в области обеспечения качества*

Минск  
БНТУ  
2023

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251я73

Д81

Рецензенты:

зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» БГУ,  
д-р физ.-мат. наук, профессор *М. А. Журавков*;  
начальник НТЦ «Карьерная техника» Объединенного института  
машиностроения НАН Беларуси, д-р техн. наук, доцент *Н. Н. Ишин*

**Дудяк, А. И.**

Д81 Механика материалов : учебно-методическое пособие по учебной дисциплине «Механика материалов» / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан, Ю. В. Василевич. – Минск : БНТУ, 2023. – 107 с.

ISBN 978-985-583-866-2.

Учебно-методическое пособие содержит подробный вывод формул для характеристик сечений с переменной жесткостью, а также приведены примеры расчета таких сечений.

Предназначено для студентов специальностей: 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 02 «Материаловедение в машиностроении», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1-36 01 06 «Оборудование и технология сварочного производства», 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин», 1-37 01 01 «Двигатели внутреннего сгорания», 1-37 01 02 «Автомобилестроение (по направлениям)», 1-37 01 03 «Тракторостроение», 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)», 1-37 01 07 «Автосервис», 1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника», 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности», 1-54 01 02 «Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника».

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251я73

ISBN 978-985-583-866-2

© Дудяк А. И., Дикан Ж. Г.,  
Василевич Ю. В., 2023

© Белорусский национальный  
технический университет, 2023

## ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом в курсе сопротивления материалов является *стержень* – это объект, у которого длина значительно больше размеров поперечного сечения. Во многих областях техники в настоящее время применяют стержни, составленные из различных материалов. Типичным примером являются стержни биметаллических пар, составленных из материалов с различными модулями продольной упругости  $E$ . Другим примером являются конструкции или детали, изготовленные из композитных материалов. Идея здесь состоит в том, что при создании комбинированного материала основу армируют некоторым количеством стержней из другого материала, более прочного и упругого. В результате получают стержень с повышенными прочностными и упругими характеристиками. Типичным примером могут служить железобетонные стержни.

# 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

*Растяжением* или *сжатием* называют деформацию стержня под действием внешних сил, линия действия которых совпадает с осью стержня. Такая деформация характеризуется изменением длины стержня и возникновением единственного внутреннего силового фактора – нормальной силы  $N$ , приложенной перпендикулярно сечению стержня.

## 1.1. Внутренняя сила

Рассмотрим прямолинейный стержень прямоугольного поперечного сечения, находящийся в равновесии под действием двух внешних сил (рис. 1.1, *a*).

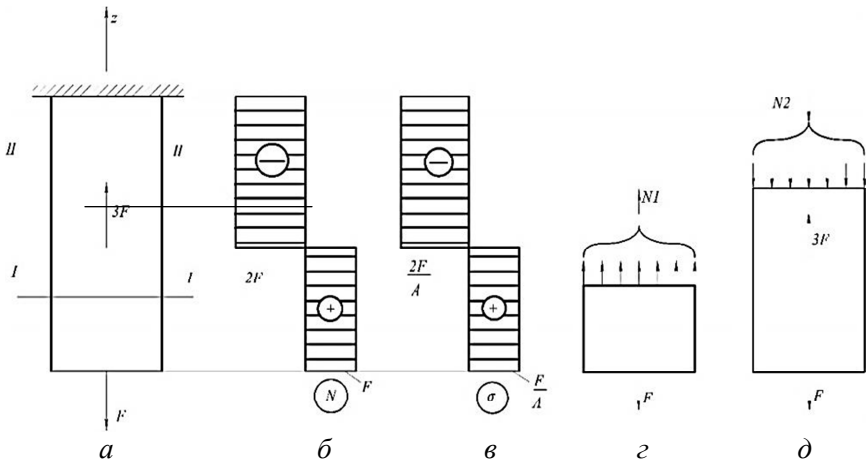


Рис. 1.1. Стержень: *a* – схема нагружения стержня; *б* – эпюра внутренних сил; *в* – эпюра нормальных напряжений; *г, д* – схемы равновесия участков

Для определения внутренних сил воспользуемся методом сечений. На первом участке, перпендикулярном к оси стержня, плоскостью I-I отсечем нижнюю часть и мысленно отбросим верхнюю часть стержня. Действие верхней части на нижнюю заменим действием нормальной силы  $N_1$  (рис. 1.1, *г*). Условие равновесия отсеченной части стержня выразится уравнением:



$$\sum F(z) = 0; \quad N_1 - F = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = F.$$

Данный участок стержня подвергается действию растягивающей силы  $N_1$ .

На втором участке плоскостью II-II рассечем стержень и отбросим верхнюю часть, заменив ее действие нормальной силой  $N_2$ . Рассмотрим условие равновесия нижней части стержня (рис. 1.1,  $\delta$ ):

$$\sum F(z) = 0; \quad -N_2 + 3F - F = 0; \quad N_2 = 3F - F = 2F.$$

Данный участок подвергается сжатию нормальной силой  $N_2$ .

Результаты проведенных исследований позволяют сформулировать правило определения внутренних сил в любом сечении стержня. Нормальная сила в сечении равна алгебраической сумме внешних сил по одну сторону сечения.

Определив величину и направление действия силы  $N$  на отдельных участках стержня, строим график зависимости силы  $N$  от координаты участка. Такую зависимость называют эпюрой внутренних сил (рис. 1.1,  $\epsilon$ ).

При построении эпюр  $N$  растягивающие силы, направленные от сечения, считаются положительными, а сжимающие силы, направленные к сечению, считаются отрицательными.

## **1.2. Напряжения и деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука**

Рассмотрим деформацию части стержня, отсеченного плоскостью I-I (рис. 1.1,  $\varepsilon$ ), как самостоятельного объекта длиной  $l_0$  и нагруженного внешней силой  $F$  с одной стороны и внутренней нормальной силой  $N$  с другой стороны (рис. 1.2).

Данный участок стержня с начальной длиной  $l_0$  подвергается растяжению. Расстояние между торцами увеличивается, и длина стержня становится равной  $l_k$ . Абсолютное удлинение стержня равно:

$$\Delta l = l_k - l_0.$$

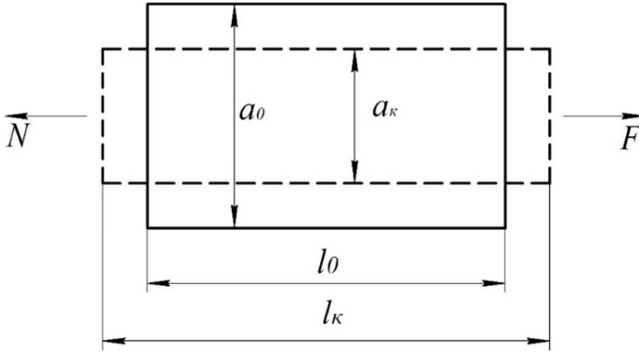


Рис. 1.2. Схема деформации стержня

В силу того, что торцы стержня при их нагружении остаются плоскими и параллельными, продольные волокна получают одинаковые удлинения. Следовательно, нормальные напряжения будут распределены равномерно по сечению и иметь одинаковые значения в любой точке сечения. Внутренняя сила  $N$  является равнодействующей элементарных внутренних сил, а поэтому:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A$$

или

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (1.1)$$

Знак напряжений всегда соответствует знаку нормальной силы  $N$ , а эпюра напряжений для ранее рассмотренного стержня показана на рис. 1.1, в.

В связи с тем, что все продольные волокна стержня удлиняются на одну и ту же величину, их относительная продольная деформация  $\varepsilon$  одинакова, т. е. для всех точек  $\varepsilon = \text{const}$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1.2)$$

Эта величина еще носит название относительного изменения длины стержня.

При растяжении поперечные размеры стержня уменьшаются. По аналогии с продольной деформацией разность поперечных размеров после деформации и до деформации называют абсолютным изменением поперечных размеров.

$$\Delta a = a_k - a_0.$$

Разделив абсолютное изменение поперечных размеров стержня на его первоначальный размер, получим значение поперечной  $\varepsilon_{\text{п}}$  деформации:

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{\Delta a}{a_0}. \quad (1.3)$$

Относительная поперечная деформация  $\varepsilon_{\text{п}}$  для изотропных материалов по всем поперечным направлениям одинакова. В пределах пропорциональности отношение поперечной деформации к продольной для любого материала является величиной постоянной и носит название коэффициента Пуассона.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{п}}}{\varepsilon} \right|, \quad (1.4)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона, являющийся безразмерной величиной.

Учитывая, что коэффициент Пуассона всегда имеет отрицательное значение, связь между поперечной и продольной деформациями определяется из соотношения:

$$\varepsilon_{\text{п}} = -\mu\varepsilon. \quad (1.5)$$

Для всех материалов коэффициент Пуассона находится в пределах 0–0,5 и является характеристикой упругих свойств материала.

При упругих деформациях закон Гука устанавливает взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Расчет по напряжениям носит название расчета на прочность, а расчет по деформациям называется расчетом на жесткость. В основе расчета на жесткость лежит установленный опытным путем закон Гука. В случае осевого рас-

тяжения или сжатия стержня осевыми силами, без учета собственного веса стержня, данный закон выражается формулой:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad (1.6)$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости;

$E \cdot A$  – произведение, называемое жесткостью поперечного сечения стержня.

Закон Гука формулируется следующим образом: абсолютное удлинение стержня пропорционально силе и длине стержня и обратно пропорционально жесткости сечения стержня.

Формулу (1.6) с учетом формул (1.1) и (1.2) можно записать в виде:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1.7)$$

или

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) устанавливает связь между напряжениями и деформациями в зависимости от свойств материала стержня, которые характеризуются модулем продольной упругости.

Из формулы (1.8) получаем:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (1.9)$$

Так как относительная продольная деформация  $\varepsilon$  безразмерная, то модуль  $E$  имеет размерность напряжения. Модуль продольной упругости определяют экспериментально при осевом растяжении или сжатии. Он является постоянной величиной для данного материала и характеризует упругие свойства материала.

В случае если силовое воздействие сопровождается и температурным воздействием, то абсолютное удлинение стержня определяется из выражения:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta t \cdot l. \quad (1.10)$$

Относительная деформация в таком случае будет равна:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta t, \quad (1.11)$$

где  $\Delta t$  – разность температур между конечным и начальным значениями;

$\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала стержня.

При этом следует учитывать, что формулы (1.10) и (1.11) справедливы только в случае, если  $N$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $\alpha$  и  $\Delta t$  являются постоянными величинами по длине стержня.

Основной задачей в курсе сопротивления материалов является оценка работоспособности элемента конструкции условием прочности. Условие прочности при осевом растяжении-сжатии стержня представляется следующим выражением:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.12)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Допускаемые напряжения для любого материала устанавливаются специальными научно-техническими организациями. Методика установления этих напряжений будет описана ниже. В случае растяжения в правую часть условия прочности подставляют допускаемое напряжение на растяжение, а в случае сжатия – на сжатие.

Некоторые ограничения могут накладываться и на величину перемещения сечения стержня. Эти ограничения выражаются условием жесткости:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (1.13)$$

где  $[\Delta l]$  – допускаемая величина для перемещения сечения.

Расчет по условию жесткости всегда необходимо дополнять расчетом на прочность.

**Пример.** Ступенчатый стальной стержень нагружен осевыми силами  $F_1 = 200$  кН,  $F_2 = 120$  кН. Площади поперечных сечений  $A_1 = 10$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 8$  см<sup>2</sup>. Длины участков стержня  $l_1 = 30$  см,  $l_2 = 15$  см и  $l_3 = 40$  см (рис. 1.3, а). Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений, приняв модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

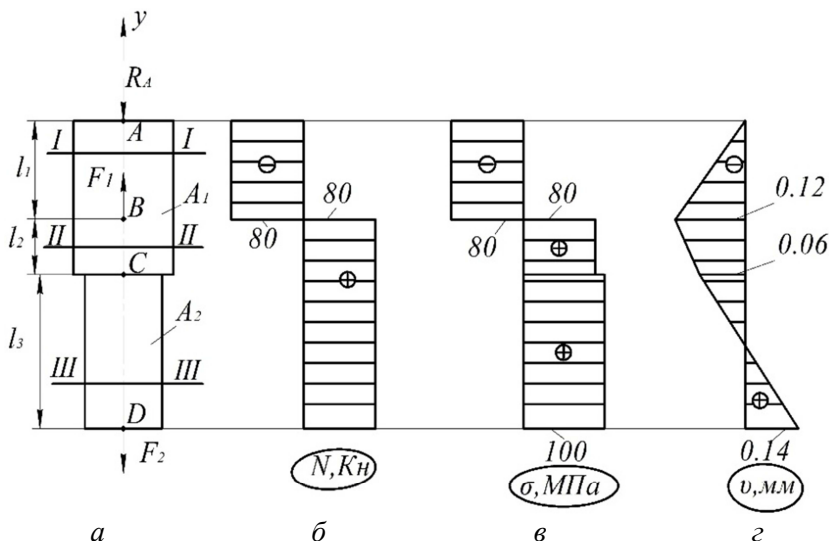


Рис. 1.3. Ступенчатый стержень:

а – схема нагружения стержня; б – эпюра внутренних сил;  
в – эпюра нормальных напряжений; г – эпюра перемещений

Определяем реакцию  $R_A$  в закреплении стержня из условия равновесия:

$$\sum F_{(y)} = 0 \text{ или } -R_A + F_1 - F_2 = 0.$$

Откуда  $R_A = F_1 - F_2 = 200 - 120 = 80$  кН.

Внутренние силы  $N$  в соответствующих сечениях приведены ниже.

Сечение I-I:  $N_1 - R_A = 0$ ;  $N_1 = R_A = -80$  кН.

Сечение II-II:  $-N_2 - R_A + F_1 = 0$ ;  $N_2 = F_1 - R_A = 200 - 120 = 80$  кН.

Сечение III-III:  $-N_3 - R_A + F_1 = 0$ ;  $N_3 = F_1 - R_A = 200 - 120 = 80$  кН.

Эпюра продольных сил приведена на рис. 1.3, б.

Определяем напряжения в соответствующих участках стержня.

$$\text{Сечение I-I: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{80 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = -80 \text{ МПа.}$$

$$\text{Сечение II-II: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{80 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 80 \text{ МПа.}$$

$$\text{Сечение III-III: } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{80 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 100 \text{ МПа.}$$

По полученным расчетным данным на рис. 1.3, в приведена эпюра нормальных напряжений.

Определяем перемещение сечения в точке *B* относительно неподвижного сечения *A*:

$$u_{B,A} = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = -\frac{80 \cdot 10^3 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = -0,12 \text{ мм.}$$

Определяем перемещение сечения в точке *C* относительно сечения *A*:

$$u_{C,A} = u_{B,A} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} = -0,12 + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 150}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = -0,12 + 0,06 = -0,06 \text{ мм.}$$

Определяем перемещение сечения *D* относительно сечения *A*:

$$u_{D,A} = u_{C,A} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_2} = -0,06 + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^2} = -0,06 + 0,2 = 0,14 \text{ мм.}$$

По полученным данным построена эпюра перемещений *u*, приведенная на рис. 1.3, з.

### 1.3. Статически определимые и статически неопределимые системы

Системы, для которых внутренние силы могут быть определены из уравнений равновесия, называются статически определимыми. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из двух

стержней, изготовленных из одинакового материала (рис. 1.4, а). Стержни для их свободного поворота шарнирно закреплены в месте соединения друг с другом и в месте крепления с жесткой основой. Разрежем стержни сечениями и отбросим верхние части, а их взаимодействие на нижние части заменим действием внутренних сил  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 1.4, б).

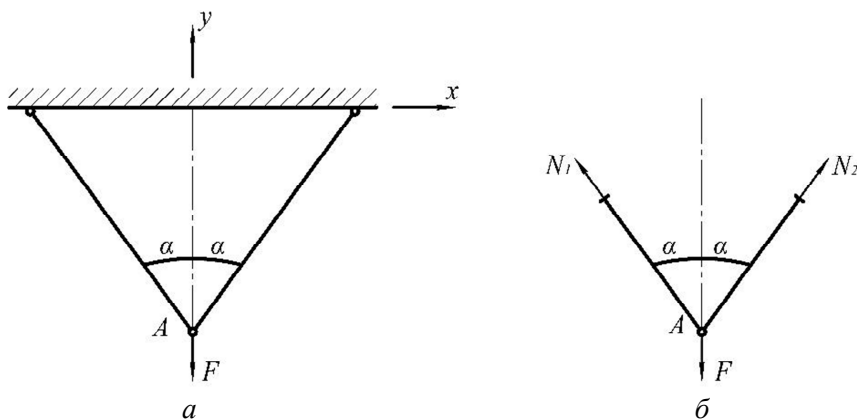


Рис. 1.4. Стержневая система:  
а – схема нагружения; б – статическое равновесие системы

Условие равновесия узла  $A$  можно представить в виде следующих двух уравнений равновесия:

$$\sum F_{(x)} = 0 \quad \text{или} \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_{(y)} = 0 \quad \text{или} \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Решение системы двух уравнений позволяет определить внутренние силы  $N_1$  и  $N_2$ , возникающие под действием силы  $F$ , которые равны:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

Определение усилий позволяет найти напряжения, деформации и перемещения.



В рассматриваемом примере внутренние силы в стержнях были определены с помощью метода сечений. Однако такое определение внутренних сил далеко не всегда возможно. В ряде случаев число внутренних сил превышает количество уравнений равновесия. Системы, для которых число внутренних сил превышает число возможных уравнений равновесия, называют статически неопределимыми системами. Разность между числом определяемых внутренних сил и числом возможных уравнений равновесия называют степенью статической неопределимости системы. Раскрытие статической неопределимости требует добавить к уравнениям равновесия дополнительные уравнения, основанные на особенностях геометрических связей системы. Такие уравнения называют уравнениями перемещений.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из трех стержней, изготовленных из одного материала, при этом размеры поперечных сечений стержней одинаковы. Такая система показана на рис. 1.5, *a*. Сплошными линиями показано состояние системы до деформации, а пунктирными – после деформации под действием силы  $F$ .

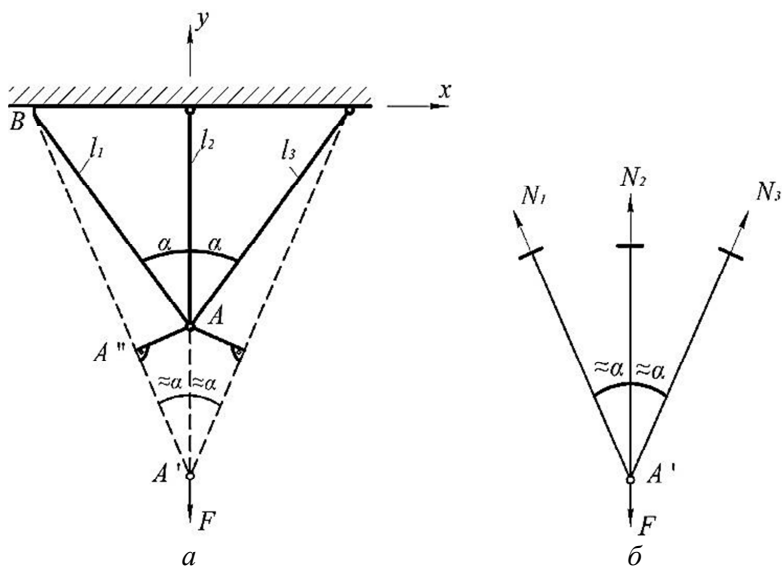


Рис. 1.5. Стержневая система:  
*a* – схема нагружения; *б* – статическое равновесие системы

Рассмотрим равновесие узла  $A$ , показанного на рис. 1.5, б, и, проецируя силы на оси  $x$  и  $y$ , получим систему из двух уравнений:

$$\sum F_{(x)} = 0 \quad \text{или} \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_{(y)} = 0 \quad \text{или} \quad N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - F = 0.$$

Полученная система уравнений имеет три неизвестные величины. Для составления дополнительного уравнения рассмотрим перемещение узла  $A$ . Под действием силы  $F$  узел  $A$  переместится в положение  $A'$ . Отрезок  $AA'$  равен удлинению среднего стержня  $\Delta l_2$ . Из точки  $A$  проводим дугу окружности  $A'A''$  с центром в точке  $B$ . Отрезок  $A'A''$  представляет собой удлинение бокового стержня  $AB$ , равное  $\Delta l_1$ . Вследствие малого перемещения дугу  $A'A''$  можно заменить прямолинейным отрезком. Первоначальный угол  $\alpha$  изменится на незначительную величину, а поэтому, рассматривая соотношение сторон треугольника  $AA'A''$ , получим следующее соотношение между удлинениями стержней:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Это и есть искомое уравнение перемещений. Используя закон Гука, удлинение стержней можно выразить через внутренние силы:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A}.$$

Используя соотношение между длинами стержней  $l_2 = l_1 \cos \alpha$ , получим замыкающее третье уравнение:

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Решая это уравнение совместно с уравнениями равновесия, получим:

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Если число неизвестных внутренних сил превышает на  $n$  число уравнений равновесия, то необходимо к возможным уравнениям равновесия дополнительно составить  $n$  уравнений перемещений.

Рассмотрим случай, когда ступенчатый стержень жестко закреплен по торцам и нагружен продольной силой  $F$ . Схема нагружения стержня показана на рис. 1.6, *a*.

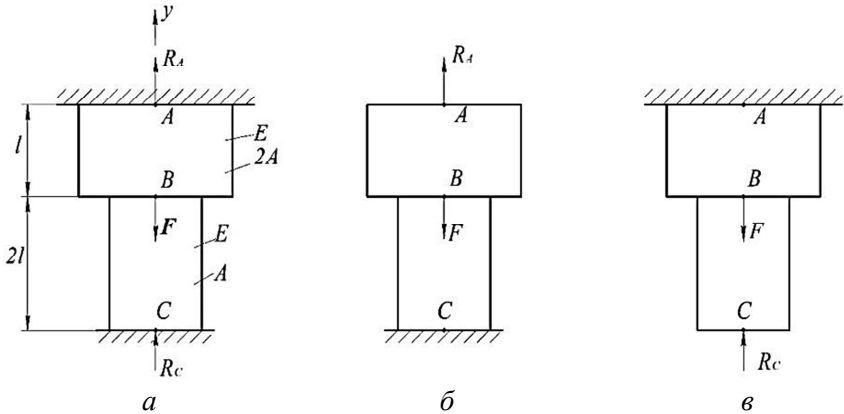


Рис. 1.6. Ступенчатый стержень:  
*a* – схема нагружения стержня; *б*, *в* – схемы для условий совместности деформаций

В результате действия продольной силы  $F$  возникнут реакции  $R_A$  и  $R_C$ . Уравнение равновесия для данного стержня будет иметь следующий вид:

$$\sum F_{(y)} = 0 \quad \text{или} \quad R_A - F + R_C = 0.$$

Система один раз статически неопределима, так как реакции  $R_A$  и  $R_C$  не могут быть определены из уравнения равновесия.

Преобразуем статически неопределимую систему в статически определимую, отбросив верхнее жесткое закрепление стержня и заменив его действие неизвестной реакцией  $R_A$  (рис. 1.6, *б*). Перемещение сечения  $A$  под действием реакции  $R_A$  и силы  $F$  будет равно нулю, что можно выразить следующим уравнением:

$$\frac{R_A \cdot l}{2E \cdot A} + \frac{R_A \cdot 2l}{E \cdot A} - \frac{F \cdot 2l}{E \cdot A} = 0.$$

Решая данное уравнение относительно реакции  $R_A$ , получим:

$$R_A = \frac{4}{5}F.$$

Для нахождения реакции  $R_C$  отбросим нижнее жесткое закрепление стержня и заменим его действие на стержень реакцией  $R_C$  (рис. 1.6, в). В этом случае перемещение сечения  $C$  будет равно нулю, что можно описать следующим уравнением:

$$-\frac{R_C \cdot 2l}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot l}{2E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{2E \cdot A} = 0.$$

Откуда

$$R_C = \frac{1}{5}F.$$

Полученные значения  $R_A$  и  $R_C$  полностью соответствуют уравнению равновесия.

Максимальное напряжение в стержне будет на участке  $AB$  и составит:

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{5} \cdot \frac{F}{A}.$$

Определим перемещение сечения  $B$  под действием силы  $F$ , воспользовавшись схемой нагружения стержня, показанной на рис. 1.4, б.

$$u_B = \frac{R_A \cdot 2l}{E \cdot A} - \frac{F \cdot 2l}{E \cdot A} = \frac{\frac{4}{5}F \cdot 2l}{E \cdot A} - \frac{F \cdot 2l}{E \cdot A} = -\frac{2Fl}{5EA}.$$

Из последнего вычисления следует, что сечение  $B$  перемещается вниз.

## 1.4. Испытание материалов на растяжение и сжатие

При расчетах на прочность, жесткость и устойчивость необходимо знать механические характеристики материала, которые определяют при различных видах испытаний под нагрузкой. Материалы испытывают на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг. В силу своей простоты очень широкое распространение получили испытания на растяжение и сжатие.

При испытаниях на растяжение наиболее часто изготавливают образцы цилиндрической формы и используют специальные разрывные устройства. Для того чтобы результаты испытаний были сопоставимы, стандартизируют конструкцию образцов и условия их нагружения. На рис. 1.7 показана форма цилиндрического образца, наиболее часто используемая при данных испытаниях.

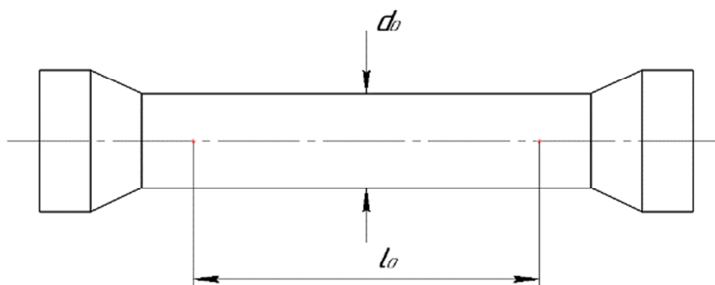


Рис. 1.7. Образец для испытания на растяжение

Утолщенные участки образца служат для закрепления в разрывном устройстве, а конические переходы содействуют выравниванию напряжений по поперечному сечению. Цилиндрические образцы чаще всего используют с диаметром  $d_0 = 10$  мм. В зависимости от соотношения между  $l_0$  и  $d_0$  образцы подразделяются на длинные и короткие. Для длинных образцов между рабочей длиной  $l_0$  и диаметром  $d_0$  выдерживают соотношение  $l_0 = 10d_0$ , а для коротких это соотношение будет равно  $l_0 = 5d_0$ .

Разрывные машины снабжены устройствами, записывающими удлинение образца  $\Delta l$  от величины приложенной к нему нагрузки  $F$ . Полученная сложная зависимость  $F$ - $\Delta l$  называется диаграммой растяжения образца.

Для исключения влияния размеров образца полученную диаграмму  $F-\Delta l$  перестраивают в диаграмму  $\sigma-\varepsilon$ . Напряжения в образце:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (1.14)$$

где  $A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$  – площадь поперечного сечения образца до момента приложения силы  $F$ .

Относительное удлинение образца:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (1.15)$$

где  $l_0$  – начальная рабочая длина образца до приложения силы  $F$ .

Диаграмма в координатах  $\sigma-\varepsilon$  носит название диаграммы напряжений при растяжении. На рис. 1.8 представлена типичная диаграмма для пластичной малоуглеродистой стали.

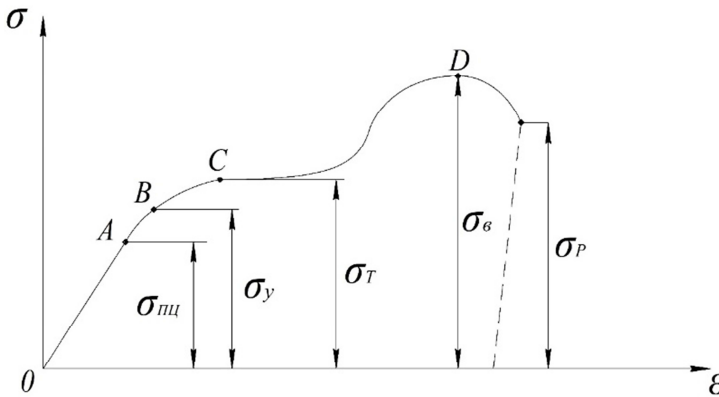


Рис. 1.8. Диаграмма растяжения пластичного материала

Из приведенной диаграммы от начала нагружения до точки  $A$  между растягивающей силой и удлинением образца существует линейная зависимость. На стадии растяжения, выражаемой прямой

линией  $OA$ , справедлив закон Гука. Точка  $A$  соответствует пределу пропорциональности.

Наибольшее напряжение, до которого не наблюдается отклонение от закона Гука, называется пределом пропорциональности ( $\sigma_{пл}$ ).

При напряжениях выше предела пропорциональности замечается искривление диаграммы, но деформация образца будет упругой. Деформация считается упругой, если она исчезает после снятия растягивающей нагрузки  $F$ . При этом процесс разгрузки происходит по той же линии, что и процесс нагружения.

Наибольшее напряжение, до которого в материале не возникают остаточные деформации, называется пределом упругости ( $\sigma_y$ ).

В зоне точки  $C$  на диаграмме наблюдается рост деформации образца без заметного увеличения растягивающей нагрузки, что приводит к образованию горизонтальной площадки, которую называют площадкой текучести. Такой процесс сопровождается возникновением пластического удлинения образца, которое не исчезает и после снятия нагрузки.

Напряжение, при котором происходит рост деформации без заметного увеличения нагрузки, называется пределом текучести ( $\sigma_T$ ).

После предела текучести материал увеличивает способность сопротивляться пластической деформации. Для дальнейшей деформации образца необходимо увеличивать нагрузку. До точки  $D$  деформация распределяется равномерно по длине образца, и размер поперечных сечений изменяется незначительно. В точке  $D$  наблюдается локализация пластических деформаций на небольшой длине образца, что ведет к образованию местного сужения сечения в виде шейки (рис. 1.9).

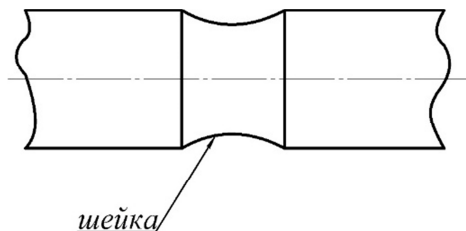


Рис. 1.9. Образование местного сужения образца при достижении предела прочности

Напряжение, которое соответствует наибольшему усилию, называют пределом прочности или временным сопротивлением ( $\sigma_B$ ).

Напряжение, соответствующее пределу прочности, является условной величиной, так как оно получено делением максимальной силы  $F$  на первоначальную площадь  $A_0$ .

Отношение растягивающего усилия в момент разрушения  $F_P$  к площади поперечного сечения в месте разрушения  $A_{ш}$  характеризует сопротивление разрушению:

$$\sigma_P = \frac{F_P}{A_{ш}}. \quad (1.16)$$

Для цилиндрических образцов  $A_{ш}$  определяется путем замера диаметра в сечении, где произошло разрушение:

$$A_{ш} = \frac{\pi \cdot d_{ш}^2}{4}. \quad (1.17)$$

Полученные напряжения количественно характеризуют прочностные свойства материала.

Диаграмма растяжения с площадкой текучести свойственна не всем пластичным материалам. Для материалов, не имеющих на диаграмме площадки текучести, вводят название условного предела текучести.

Опыты показывают, что разгрузка образца в области упругости осуществляется по закону Гука. Следовательно, при полной разгрузке снимаются упругие деформации и остаются только пластические. Если на оси деформации  $\epsilon$  диаграммы  $\sigma$ - $\epsilon$  отложить участок  $OM$ , равный 0,2 %, и провести из точки  $M$  линию параллельную прямой пропорциональности, то пересечение линии с диаграммой определяет точку  $N$ , ордината которой будет соответствовать условному пределу текучести (рис. 1.10).

Напряжение, при котором остаточная относительная деформация составляет 0,2 %, называют условным пределом текучести ( $\sigma_{0,2}$ ).

Характеристики пластических свойств материала определяются из относительного удлинения образца ( $\delta$ ) и относительного сужения ( $\psi$ ) после разрыва.



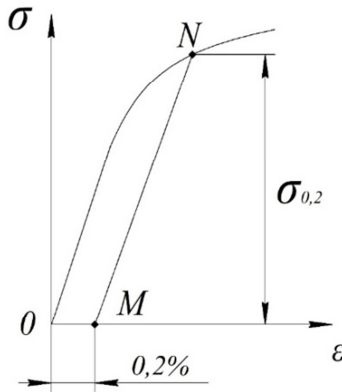


Рис. 1.10. Диаграмма растяжения пластичного материала для определения условного предела текучести

Относительное удлинение определяется из выражения:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100 \%, \quad (1.18)$$

где  $l_k$  – длина рабочей зоны образца после разрыва.

Относительное сужение образца определяется из соотношения:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100 \%, \quad (1.19)$$

где  $A_{ш}$  – площадь поперечного сечения в месте разрыва.

В зависимости от величины относительного удлинения после разрыва, материалы условно подразделяют на пластичные и хрупкие. Если  $\delta > 5 \%$ , то материал считают пластичным, а если  $\delta < 5 \%$  – хрупким. Чем выше значения  $\delta$  и  $\psi$ , тем более пластичным является материал.

Испытания на сжатие пластичных материалов проводят значительно реже, чем испытания на растяжение. Объясняется это тем, что предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , предел упругости  $\sigma_y$  и предел текучести  $\sigma_T$  имеют те же значения, что и при растяжении. При испытании на сжатие образцы чаще всего имеют цилиндрическую

форму и закладываются между плоскими гладкими поверхностями пресса. Высота образца не должна превышать двух диаметров, так как при большей высоте сжатие образца сопровождается его искривлением, искажающим результаты испытаний. Так же как и при испытаниях на растяжение, ведется запись диаграммы сжатия в координатах  $F-\Delta l$ , которая затем перестраивается в диаграмму напряжений (рис. 1.11).

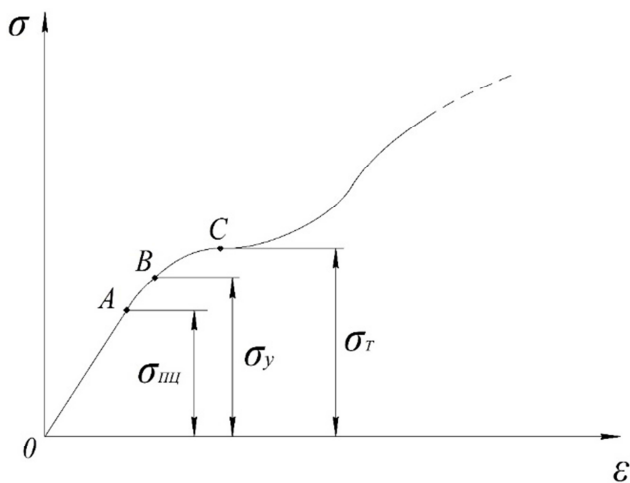


Рис. 1.11. Диаграмма сжатия пластичного материала

Для такого метода испытаний значение предела прочности  $\sigma_b$  определить невозможно, потому что при возрастании сжимающей силы довести образец до разрушения не удастся. Происходит это в результате того, что вследствие действия сил трения по торцам образец приобретает бочкообразную форму, и площадь поперечного сечения увеличивается. Испытуемый образец плющится, сжимаясь в тонкий диск.

Противоположным свойством пластичности является свойство хрупкости материала, под которым понимают качественную особенность материала разрушаться без заметных остаточных деформаций. Для таких материалов величина пластической деформации при разрыве составляет  $\delta = 2-5\%$ , а для некоторых материалов – доли процента. При испытаниях на растяжение образцы из хрупких

материалов разрушаются при незначительных удлинениях и без образования шейки. На рис. 1.12 приведена характерная диаграмма разрушения хрупкого материала.

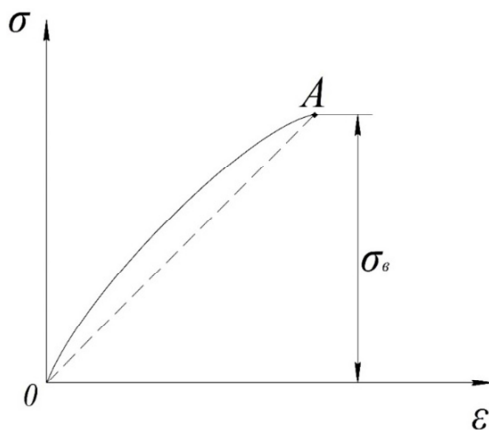


Рис. 1.12. Диаграмма растяжения хрупкого материала

Диаграмма обнаруживает, что с самого начала нагружения образца присутствует криволинейность, то есть нет участка, соответствующего пропорциональности между нагрузкой и удлинением. Предел упругости будет близок к пределу прочности. Для хрупких материалов при испытаниях на растяжение или сжатие определяют только пределы прочности  $\sigma_v$ . Предел прочности при сжатии хрупкого материала  $\sigma_{vc}$  значительно превышает предел прочности при растяжении  $\sigma_{vp}$ . Величина соотношения

$$\gamma = \frac{\sigma_{vp}}{\sigma_{vc}} \quad (1.20)$$

представляет собой коэффициент, устанавливающий разнопрочность материала при растяжении и сжатии.

Испытания на сжатие являются основным видом испытаний для хрупких материалов, когда такие материалы в инженерных конструкциях подвергаются воздействию сжимающих нагрузок.

## 1.5. Допускаемые напряжения

Наиболее распространенными расчетами элементов инженерных конструкций являются методы расчета по напряжениям. Согласно этому расчет ведется по наибольшему напряжению  $\sigma_{\max}$ , возникающему на некоторых участках деформируемого материала. Размеры деталей необходимо подбирать таким образом, чтобы под действием заданных внешних сил они не разрушались и не имели остаточных деформаций. Предельное напряжение – это такое напряжение, которое соответствует либо разрушению конструкции, либо ее значительной пластической деформации из-за чего дальнейшая эксплуатация конструкции невозможна. Из механических испытаний известны напряжения, под действием которых в пластических материалах возникают остаточные деформации, а в хрупких – разрушение. Эти напряжения и принято считать предельными. Максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$ , возникающее в элементе конструкции, не должно превышать определенной величины, которую называют допускаемым напряжением и обозначают  $[\sigma]$ .

В этом случае условие прочности представляется в виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Допускаемое напряжение должно быть не только меньшим, чем предельное напряжение, но и иметь некоторый запас прочности. Таким образом, допускаемое напряжение устанавливается из условия:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (1.21)$$

где  $\sigma_0$  – предельное напряжение. Для пластичных материалов  $\sigma_0 = \sigma_T$ , а для хрупких  $\sigma_0 = \sigma_B$ .

$n$  – коэффициент запаса прочности, который устанавливает, во сколько раз допускаемое напряжение меньше предельного.

Коэффициент запаса прочности устанавливают с учетом следующих условий:

1. От необходимости учитывать неоднородность характеристик материала, полученных на различных образцах из одного и того же материала.

2. От величины и характера наибольших нагрузок, действующих на элемент конструкции.

3. От результатов расчета, которые являются приближенными, так как в основу вывода формул положен ряд допущений и ограничений, а расчетные схемы упрощенно отражают характер работы элементов конструкций.

4. От состояния поверхности элементов конструкций.

Для пластичных материалов допускаемые напряжения устанавливаются из отношения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (1.22)$$

где  $n_T$  – коэффициент запаса прочности по пределу текучести.

Для пластичных материалов на основе длительной практики эксплуатации конструкций принимают  $n_T = 1,4-1,6$ .

В случае если пластичный материал неодинаково сопротивляется пластической деформации при растяжении и сжатии, то:

– для растяжения:

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma_{тр}}{n_T}; \quad (1.23)$$

– для сжатия:

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma_{тс}}{n_T}, \quad (1.24)$$

где  $\sigma_{тр}$  – предел текучести материала при растяжении;

$\sigma_{тс}$  – предел текучести материала при сжатии.

Если материал одинаково сопротивляется пластической деформации, то есть  $\sigma_{тр} = \sigma_{тс}$ , то индексы (+) и (–) опускаются.

Для хрупких материалов допускаемые напряжения при растяжении и при сжатии определяют из отношений:

– для растяжения:

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{n_b}; \quad (1.25)$$

– для сжатия:

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n_b}, \quad (1.26)$$

где  $n_b$  – коэффициент запаса прочности по пределу прочности;

$\sigma_{\text{вр}}$  – предел прочности при растяжении;

$\sigma_{\text{вс}}$  – предел прочности при сжатии.

На величину коэффициента запаса прочности по пределу прочности влияет накопленный опыт в различных областях техники и обычно он принимается равным  $n_b = 2,5-3,0$ .

Выбор величины допускаемого напряжения является весьма важным, так как от этого зависит безопасность эксплуатации конструкций и количество затрачиваемого на изготовление материала.

### **1.6. Учет собственного веса при осевом растяжении или сжатии**

Ранее были рассмотрены системы и методики расчета на растяжение или сжатие без учета собственного веса стержней. Однако в ряде случаев необходимо учитывать собственный вес конструкций, так как в некоторых случаях напряжения от собственного веса превосходят напряжения, возникающие от действия прилагаемых нагрузок. Рассмотрим методику решения задач на прочность и жесткость с учетом собственного веса. Пусть прямой стержень, изготовленный из материала с удельным весом  $\gamma$ , длиной  $l$  и поперечным сечением  $A$ , жестко закреплен верхним концом (рис. 1.13, *a*).

Отсечем нижнюю часть стержня плоскостью I-I и рассмотрим условия равновесия отсеченной части. Внутренняя сила  $N_{(y)}$  в сечении будет равна:

$$N_{(y)} = F + \gamma \cdot A \cdot y. \quad (1.27)$$

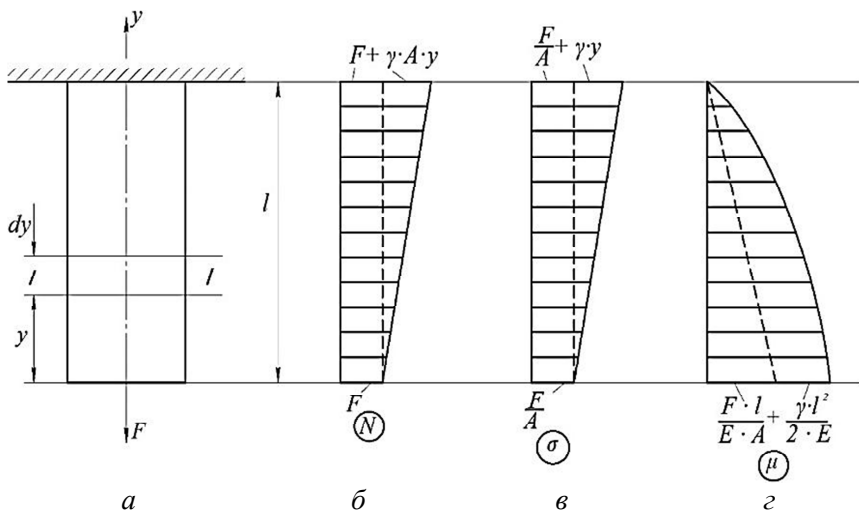


Рис. 1.13. Стержень: *a* – схема нагружения стержня; *б* – эпюра внутренних сил; *в* – эпюра нормальных напряжений; *г* – эпюра перемещений

Эпюра внутренних сил по высоте стержня показана на рис. 1.13, *б*. Нормальные напряжения в сечении стержня получим, разделив  $N_{(y)}$  на площадь поперечного сечения:

$$\sigma_{(y)} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot y. \quad (1.28)$$

Используя полученную зависимость для  $\sigma_{(y)}$ , построим эпюру напряжений в зависимости от координаты  $y$  (рис. 1.13, *в*).

Определим удлинение бесконечного малого элемента  $dy$ :

$$\Delta dy = \frac{N(y) dy}{E \cdot A} = \frac{(F + \gamma \cdot A \cdot y) dy}{E \cdot A}. \quad (1.29)$$

Для определения перемещения сечения стержня, находящегося на расстоянии  $y$  от свободного конца, необходимо проинтегрировать последнее выражение в пределах от  $y$  до  $l$ :

$$\Delta y = \int_y^l \frac{(F + \gamma \cdot A \cdot y) dy}{E \cdot A} = \frac{F \cdot (l - y)}{E \cdot A} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2). \quad (1.30)$$

Используя последнее выражение, определяющее перемещение любого сечения стержня в зависимости от координаты  $y$ , строим эпюру перемещений, которая показана на рис. 1.13,  $z$ . Первое слагаемое в последнем выражении определяет перемещение сечения под действием внешней силы  $F$  по линейному закону, а второе слагаемое – от действия собственного веса стержня по параболическому закону.

### 1.7. Расчет стержня равного сопротивления

В стержнях постоянного поперечного сечения в результате действия собственного веса нормальные напряжения изменяются в поперечных сечениях по длине стержня. Наибольшего значения напряжения достигают в поперечном сечении, где действует максимальный собственный вес. В других сечениях напряжения всегда будут меньше максимального значения. Для экономии материала следует использовать стержни, у которых напряжения в любых сечениях по высоте будут одинаковы. Такие стержни носят название стержней равного сопротивления.

Рассмотрим стержень, подвергаемый воздействию внешней силы  $F$  и изготовленный из материала с удельным весом  $\gamma$  (рис. 1.14). Условимся, что в поперечных сечениях стержня возникающие напряжения будут равны допускаемому.

Площадь нижнего поперечного сечения  $A_{(0)}$  определяется из выражения:

$$A_{(0)} = \frac{F}{[\sigma]}. \quad (1.31)$$

Площадь поперечного сечения на расстоянии  $y$  от нижнего конца обозначим  $A_{(y)}$ , а вес стержня длиной  $y$  – через  $Q_{(y)}$ . Отсечем нижнюю часть стержня сечением I-I и рассмотрим условие равновесия отсеченной части, которое можно представить уравнением:

$$[\sigma] \cdot A_{(y)} = F + Q_{(y)}. \quad (1.32)$$



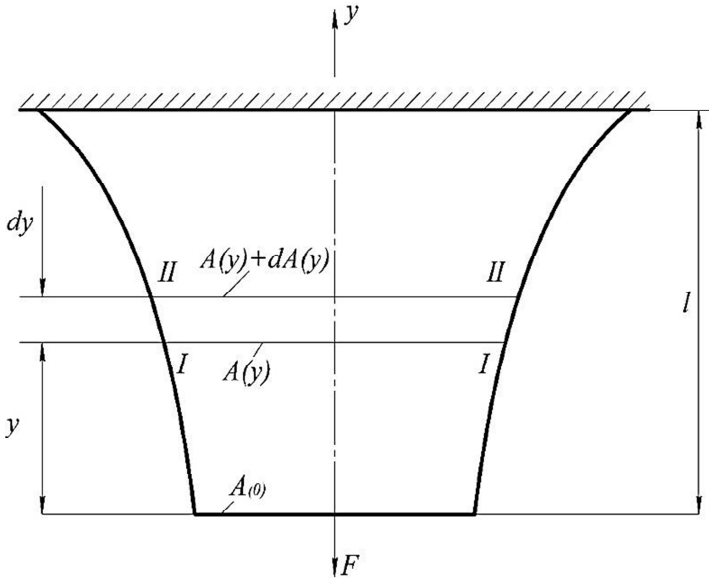


Рис. 1.14. Схема нагружения стержня равного сопротивления

Отсечем нижнюю часть стержня длиной  $y + dy$  сечением II-II. Площадь поперечного сечения будет равна  $A_{(y)} + dA_{(y)}$ , а вес стержня –  $Q_{(y)} + \gamma \cdot A_{(y)} dy$ . Условие равновесия отсеченной части стержня можно представить в виде уравнения:

$$[\sigma] [A_{(y)} + dA_{(y)}] = F + Q_{(y)} + \gamma \cdot A_{(y)} dy. \quad (1.33)$$

Вычитая выражение (1.32) из выражения (1.33), получим:

$$[\sigma] \cdot dA_{(y)} = \gamma \cdot A_{(y)} dy. \quad (1.34)$$

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой уравнение с разделяющимися переменными, которое можно представить в виде следующего уравнения:

$$\frac{dA_{(y)}}{A_{(y)}} = \frac{\gamma dy}{[\sigma]}. \quad (1.35)$$

Проинтегрировав полученное выражение, будем иметь:

$$\ln A_{(y)} = \frac{\gamma \cdot y}{[\sigma]} + C. \quad (1.36)$$

Последнее выражение может иметь начертание:

$$A_{(y)} = e^c \cdot e^{\frac{\gamma \cdot y}{[\sigma]}}. \quad (1.37)$$

Постоянную интегрирования  $e^c$  находим из условия, что при  $y = 0$  поперечное сечение  $A_{(y)} = A_{(0)}$ . В этом случае имеем:

$$A_{(0)} = e^c. \quad (1.38)$$

Подставив полученное значение  $e^c$  в выражение (1.37), окончательно получим формулу:

$$A_{(y)} = A_0 l^{\frac{\gamma \cdot y}{[\sigma]}}. \quad (1.39)$$

Данная задача относится к задачам равной прочности, и в подобных конструкциях материал стержня используется наиболее эффективно.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

При расчете на прочность и жесткость будем рассматривать стержни, состоящие из отдельных стержней, прочно соединенных между собой путем склеивания их друг с другом, соединением методом сварки взрывом или иными способами, позволяющими прочно соединить отдельные стержни из разнородных материалов в единое целое. Однако расчеты на прочность и жесткость стержней, составленных из неоднородных материалов, имеют существенные отличия от классических методов расчета стержней из однородных материалов. Это касается и характеристик плоских поперечных сечений для таких стержней.

### 2.1. Статические моменты и центры тяжести

При решении задач о прочности и жесткости стержней возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений стержней. Такую характеристику, как статический момент площади сечения, применяют в расчетах для стержней, изготовленных из однородного материала. Возьмем поперечное сечение стержня в произвольной форме и свяжем его с координатными осями  $ox$  и  $oy$ . Выделим бесконечно малый элемент площадью  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$  (рис. 2.1).

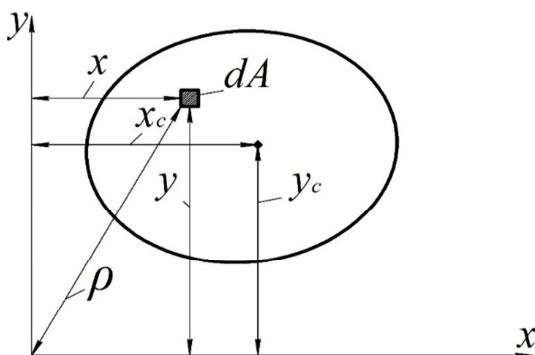


Рис. 2.1. Схема поперечного сечения произвольной формы

По аналогии с выражением для момента силы можно получить выражения и для моментов элемента площади  $dA$  относительно осей  $ox$  и  $oy$ :

$$ds_x = ydA;$$

$$ds_y = xdA.$$

Просуммировав полученные произведения по всей площади фигуры, получим статические моменты площади  $s_x$  и  $s_y$  относительно осей  $x$  и  $y$ , которые можно представить в виде интегралов:

$$s_x = \int_A ydA; \quad (2.1)$$

$$s_y = \int_A xdA. \quad (2.2)$$

Обозначаются статические моменты буквой  $s$ , а индексы показывают относительно какой оси они вычисляются. Если известны координаты центра тяжести всей фигуры  $x_c$  и  $y_c$ , то на основании теоремы о моменте равнодействующей получим выражения:

$$s_x = A \cdot y_c; \quad (2.3)$$

$$s_y = A \cdot x_c. \quad (2.4)$$

Из последних выражений получают формулы для определения координат центра тяжести площади:

$$x_c = \frac{s_y}{A}; \quad y_c = \frac{s_x}{A}. \quad (2.5)$$

Если сечение имеет сложную форму и его можно разбить на отдельные простые фигуры, для которых известны координаты центров тяжести, то вместо определенных интегралов в выражениях (2.1) и (2.2) можно применить простое суммирование для определения статических моментов всей площади:

$$s_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i; \quad s_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i. \quad (2.6)$$

где  $A_i$  – площадь фигуры с номером « $i$ »;

$x_i$  и  $y_i$  – координаты центра тяжести фигуры с номером « $i$ ».

Формулы (2.5) и (2.6) позволяют находить координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$x_c = \frac{s_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{s_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (2.7)$$

Статические моменты площади имеют размерность – «длина в кубе».

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют центральными осями. В соответствии со знаком координат статические моменты могут быть больше и меньше нуля. Статические моменты площади относительно центральных осей будут равны нулю.

## 2.2. Статические моменты жесткости. Определение центра жесткости сечения

Рассмотрим произвольную форму поперечного сечения стержня, состоящего из двух разнородных материалов, прочно соединенных между собой (рис. 2.2).

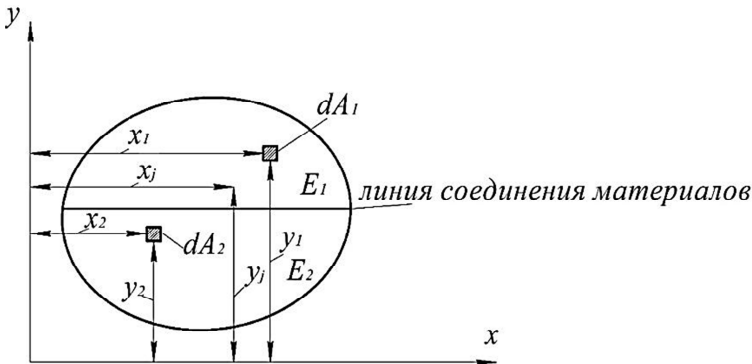


Рис. 2.2. Схема поперечного сечения, состоящего из двух разнородных материалов

Условимся, что материалы отличаются друг от друга модулями продольной упругости  $E_1$  и  $E_2$ . Очевидно, что части сечений отличаются также и жесткостью. Жесткость сечения при осевом растяжении или сжатии представляет собой произведение  $E \cdot A$ . Для однородного материала, используя выражения (2.3) и (2.4), статические моменты жесткости можно представить в виде:

$$Es_x = (E \cdot A) \cdot y_c; \quad Es_y = (E \cdot A) \cdot x_c.$$

Для дальнейших исследований выделим элементы бесконечно малой площади  $dA_1$  и  $dA_2$  с координатами  $x_1$  и  $y_1$ ,  $x_2$  и  $y_2$  соответственно (рис. 2.2). Для плоского поперечного сечения, состоящего из двух разнородных материалов, статический момент жесткости сечения можно представить в следующем виде:

$$(Es_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2; \quad (2.8)$$

$$(Es_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2, \quad (2.9)$$

где  $(Es_x)_{\text{пр}}$  и  $(Es_y)_{\text{пр}}$  – приведенные или суммарные статические моменты жесткости сечения.

Учитывая, что интегралы представляют статические моменты площадей отдельных частей поперечного сечения стержня, и в случае, когда известны координаты центров тяжести частей фигуры  $x_{c1}$ ,  $y_{c1}$ ,  $x_{c2}$  и  $y_{c2}$ , формулы (2.8) и (2.9) можно представить в следующем виде:

$$(Es_x)_{\text{пр}} = (E_1 \cdot A_1) \cdot y_{c1} + (E_2 \cdot A_2) y_{c2}; \quad (2.10)$$

$$(Es_y)_{\text{пр}} = (E_1 \cdot A_1) \cdot x_{c1} + (E_2 \cdot A_2) x_{c2}. \quad (2.11)$$

В соответствии со знаком координат статические моменты жесткости могут быть больше или меньше нуля. Поэтому для любого

сечения можно определить такое положение координатных осей, относительно которых суммарные статические моменты жесткости сечения будут равны нулю. Начало координат для таких осей назовем центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения  $x_j$  и  $y_j$  относительно принятых осей отсчета  $x$  и  $y$ . В этом случае выражения (2.10) и (2.11) примут вид:

$$(Es_x)_{\text{пр}} = (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) \cdot y_j; \quad (2.12)$$

$$(Es_y)_{\text{пр}} = (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) \cdot x_j. \quad (2.13)$$

Последние два выражения позволяют определить координаты центра жесткости сечения относительно произвольных координатных осей  $x$  и  $y$ :

$$x_j = \frac{(Es_y)_{\text{пр}}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}; \quad y_j = \frac{(Es_x)_{\text{пр}}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (2.14)$$

Если поперечное сечение стержня состоит из множества стержней из разнородных материалов, прочно соединенных между собой, но отличающихся друг относительно друга модулями продольных упругостей, то формулы для определения координат центра жесткости можно представить в виде:

$$x_j = \frac{(E_1 A_1) x_{c_1} + (E_2 A_2) x_{c_2} + \dots + (E_n A_n) x_{c_n}}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n} = \frac{(Es_y)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i A_i}; \quad (2.15)$$

$$y_j = \frac{(E_1 A_1) y_{c_1} + (E_2 A_2) y_{c_2} + \dots + (E_n A_n) y_{c_n}}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n} = \frac{(Es_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i A_i}. \quad (2.16)$$

В дальнейшем оси, проходящие через центр жесткости сечения, будем называть осями центральной жесткости.

Анализируя выражения (2.15) и (2.16), можно заметить, что если материал стержня однороден, то есть  $E_1 = E_2 = \dots = E$ , то получен-

ные выражения полностью будут соответствовать известным формулам из курса сопротивления материалов для определения координат центра тяжести сечения.

**Пример.** Определить координаты центра жесткости для прямоугольного сечения, состоящего из двух различных материалов, приняв  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 1,2 \cdot 10^5$  МПа,  $e = 50$  мм и  $h = 100$  мм. Схема сечения приведена на рис. 2.3.

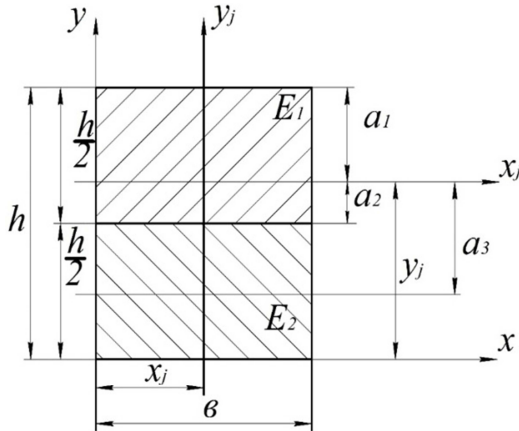


Рис. 2.3. Схема для определения координат центра жесткости сечения

За оси отсчета примем координатные оси  $x$  и  $y$ . Используя выражение (2.15), определим значение координаты  $x_j$ :

$$x_j = \frac{(ES_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i} = \frac{\left(E_1 \cdot e \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{e}{2} + \left(E_2 \cdot e \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{e}{2}}{E_1 \cdot e \cdot \frac{h}{2} + E_2 \cdot e \cdot \frac{h}{2}} = \frac{e}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ мм.}$$

Из полученного результата следует, что ось  $y_j$  является осью симметрии для данного сечения.

В соответствии с выражением (2.16) координата  $y_j$  будет равна:



$$y_j = \frac{(E S_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i} = \frac{\left(E_1 \cdot e \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{4}\right) + \left(E_2 \cdot e \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{4}}{E_1 \cdot e \cdot \frac{h}{2} + E_2 \cdot e \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h(3+n)}{4(1+n)},$$

где  $n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1,2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} = 0,6$ .

Подставив численные значения в выражение для  $y_j$  получим:

$$y_j = \frac{100(3+0,6)}{4(1+0,6)} = 56,25 \text{ мм.}$$

Ось центральной жесткости сечения  $x_j$  смещается в область бóльшей жесткости части сечения ( $E_1 A_1 > E_2 A_2$ ).

Проверим правильность определения положения оси  $x_j$ . Относительно этой оси статический момент жесткости сечения должен быть равен нулю.

$$a_1 = h - y_j = 100 - 56,25 = 43,75 \text{ мм;}$$

$$a_2 = -\left(y_j - \frac{h}{2}\right) = -(56,25 - 50) = -6,25 \text{ мм;}$$

$$a_3 = -\left(y_j - \frac{h}{4}\right) = -(56,25 - 25) = -31,25 \text{ мм;}$$

$$\begin{aligned} (E S_{x_j})_{\text{пр}} &= (E_1 \cdot e \cdot a_1) \frac{a_1}{2} - (E_1 \cdot e \cdot a_2) \frac{a_2}{2} - \left(E_2 \cdot e \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot a_3 = \\ &= \left(2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 43,75\right) \frac{43,75}{2} - \left(2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 6,25\right) \frac{6,25}{2} - \\ &- \left(1,2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 50\right) 31,25 = 95\,703,125 \cdot 10^5 - 95\,703,75 \cdot 10^5 \approx 0. \end{aligned}$$

Полученный результат показывает, что положение оси  $x_j$  определено правильно.

### 2.3. Моменты инерции плоских сечений

Моменты инерции фигуры произвольной формы, показанной на рис. 2.1, относительно осей  $ox$  и  $oy$  могут быть представлены в виде интегралов:

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad (2.17)$$

$$J_y = \int_A x^2 dA. \quad (2.18)$$

Представленные выражения для моментов инерции носят названия осевых моментов инерции.

Полярным моментом инерции называют интеграл следующего вида:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.19)$$

Из рис. 2.1 следует:

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Подставив  $\rho^2$  в полученное выражение для полярного момента инерции (2.19), получим:

$$J_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y. \quad (2.20)$$

Следует отметить, что величины осевых и полярного моментов инерции всегда будут положительными.

Центробежным моментом инерции называют интеграл следующего вида:

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.21)$$

В зависимости от положения координатных осей центробежный момент инерции может быть как отрицательным, так и положительным. В некоторых случаях он может быть равен нулю.

Все моменты инерции имеют размерность длины в четвертой степени и обозначаются  $J$  с соответствующими индексами, указывающими вид данного момента инерции.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями. Ось симметрии сечения всегда будет главной центральной осью.

В качестве примера вычислим осевые и центробежный моменты инерции прямоугольника с основанием « $b$ » и высотой « $h$ » относительно осей  $ox$  и  $oy$  (рис. 2.4). Выделим бесконечно малую площадку  $dA = dx \cdot dy$ .

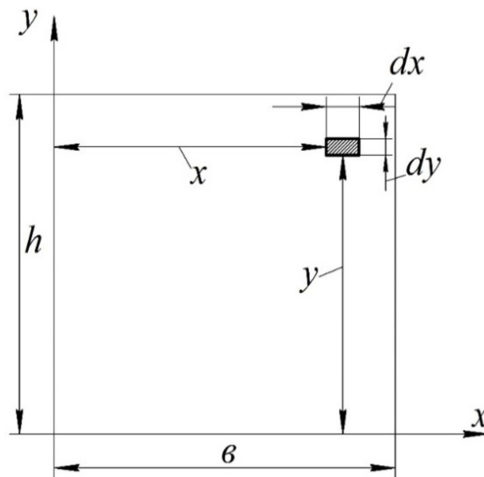


Рис. 2.4. Осевое сечение стержня прямоугольной формы

Используя выражение (2.17), определим момент инерции сечения относительно оси  $ox$ :

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \int_0^h y^2 dy = x \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично рассматривая выражение (2.18), получим момент инерции сечения относительно оси  $oy$ :

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^h dy \int_0^e x^2 dx = y \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^e = \frac{he^3}{3}.$$

Для вычисления центробежного момента инерции воспользуемся общей формулой (2.21):

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^e x dx \int_0^h y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^e \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{e^2 h^2}{4}.$$

Вычислим полярный момент инерции круга. При определении полярного момента инерции выделим бесконечно малый элемент в виде кругового сектора толщиной  $d\rho$  (рис. 2.5). Площадь выделенного элемента будет равна  $dA = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ .

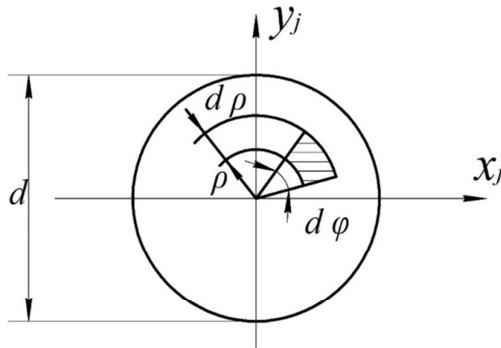


Рис. 2.5. Схема поперечного сечения

Для определения полярного момента инерции воспользуемся общей формулой (2.19):

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = \varphi \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

При вычислении моментов инерции фигуры сложной формы ее следует разбить на ряд простых фигур. В качестве примера возьмем сечение, форма которого представлена на рис. 2.6. Определим момент инерции относительно оси  $ox$ .

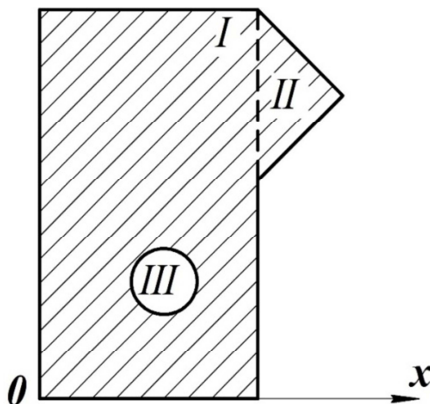


Рис. 2.6. Сечение сложной формы

Из формулы (2.17) следует, что момент инерции этой фигуры относительно оси  $ox$  равен сумме моментов инерции отдельных ее площадей:

$$J_x = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA - \int_{A_3} y^2 dA.$$

Интегралы правой части уравнения представляют собой моменты инерции простых фигур. Поэтому момент инерции всей фигуры равен:

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} - J_{x_3}.$$

При определении момента инерции сложной фигуры следует помнить, что если в сечении имеется отверстие, то площадь отверстия следует учитывать как отрицательную площадь.

При расчете стержней на прочность и жесткость при изгибе произведение модуля продольной упругости на величину момента инерции сечения  $E \cdot J$  называют жесткостью сечения.

При расчете стержней круглого поперечного сечения на прочность и жесткость при кручении произведение модуля упругости второго рода на полярный момент инерции  $G \cdot J_p$  называют жесткостью при кручении.

## 2.4. Приведенные жесткости сечения

Рассмотрим методы определения суммарных или приведенных жесткостей сечения, составленного из двух разнородных материалов. Такое сечение приведено на рис. 2.2. Для данного сечения осевые приведенные жесткости  $(E \cdot J_x)_{\text{пр}}$  и  $(E \cdot J_y)_{\text{пр}}$  относительно осей  $x$  и  $y$  можно представить в виде:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2; \quad (2.22)$$

$$(EJ_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \quad (2.23)$$

Приведенная центробежная жесткость сечения  $(EJ_{xy})_{\text{пр}}$  может быть представлена суммарно:

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \quad (2.24)$$

Интегралы в формулах (2.22) и (2.23) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (2.24) – центробежные моменты инерции. Поэтому:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_2 J_{x_2}; \quad (2.25)$$

$$(EJ_y)_{\text{пр}} = E_1 J_{y_1} + E_2 J_{y_2}; \quad (2.26)$$

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1 y_1} + E_2 J_{x_2 y_2}. \quad (2.27)$$

В случае если стержень собран из  $n$  стержней из различных материалов, то в общем случае приведенные жесткости сечения следует определять из следующих формул:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_2 J_{x_2} + \dots + E_n J_{x_n} = \sum_{i=1}^n E_i J_{x_i}; \quad (2.28)$$

$$(EJ_y)_{\text{пр}} = E_1 J_{y_1} + E_2 J_{y_2} + \dots + E_n J_{y_n} = \sum_{i=1}^n E_i J_{y_i}; \quad (2.29)$$

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1 y_1} + E_2 J_{x_2 y_2} + \dots + E_n J_{x_n y_n} = \sum_{i=1}^n E_i J_{x_i y_i}. \quad (2.30)$$

Осевые жесткости таких сечений всегда будут иметь положительные значения. Центробежная жесткость может быть положительной, отрицательной и в некоторых случаях обращаться в ноль в зависимости от положения координатных осей.

Следует отметить, что при повороте координатных осей в одну или другую сторону на  $90^\circ$  суммарная центробежная жесткость сечения меняет свой знак.

Для прямоугольного сечения, приведенного на рис. 2.7, *a* координаты  $x_1, x_2, y_1$  и  $y_2$  имеют положительное значение. Поэтому суммарная центробежная жесткость определяется из выражения:

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2.$$

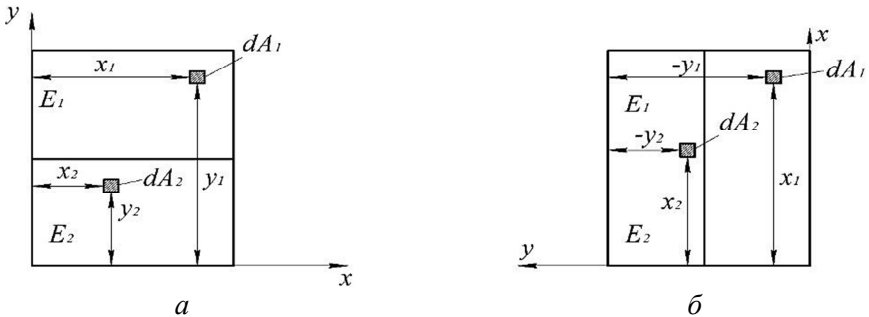


Рис. 2.7. Сечение стержня:  
*a* – схема сечения; *б* – сечение в системе повернутых осей

При повороте осей  $x$  и  $y$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки (рис. 2.7, б) координаты  $x_1$  и  $x_2$  положительны, а координаты  $y_1$  и  $y_2$  будут иметь отрицательное значение. Поэтому:

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = -E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 - E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2.$$

Абсолютная величина суммарных центробежных жесткостей не меняется, а меняется только знак.

Из формулы (2.24) для центробежной жесткости сечения следует, что если одна из осей является осью симметрии, то центробежная жесткость будет равна нулю. Рассмотрим сечение в виде прямоугольника, приведенного на рис. 2.8. Ось  $y$  является осью симметрии данного сечения.

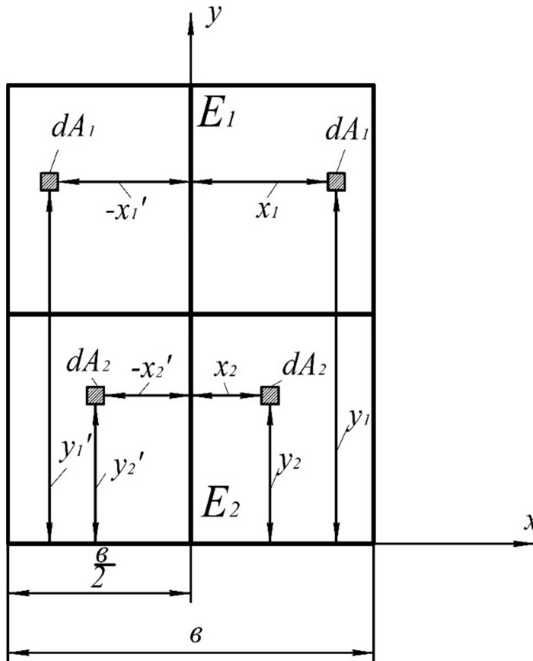


Рис. 2.8. Прямоугольное сечение стержня



Выделим бесконечно малые элементы  $dA_1$  и  $dA_2$  слева и справа от оси симметрии  $oy$ . В данном случае координаты  $x_1 = -x_1'$ ;  $y_1 = y_1'$ ;  $x_2 = -x_2'$ ;  $y_2 = y_2'$ . С учетом приведенных координат суммарная центробежная жесткость такого сечения будет равна:

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 - E_1 \int_{A_1} x_1' y_1' dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 - E_2 \int_{A_2} x_2' y_2' dA_2 = 0.$$

## 2.5. Приведенные жесткости сечения относительно параллельных осей

Выведем формулы преобразования приведенных жесткостей сечения при параллельном переносе координатных осей. Для этого обратимся к рис. 2.9.

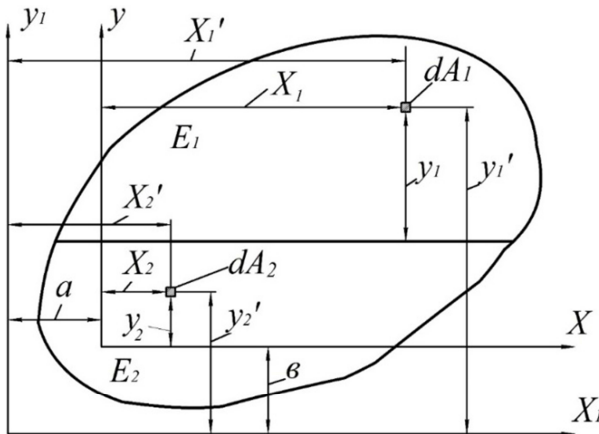


Рис. 2.9. Сечение произвольной формы

Будем считать, что известны жесткости сечения из двух разнородных материалов  $E_1 \neq E_2$  относительно осей  $x$  и  $y$ , которые описываются формулами:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2; \quad (2.31)$$

$$(EJ_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2; \quad (2.32)$$

$$(EJ_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \quad (2.33)$$

Требуется определить жесткости сечения относительно параллельных осей  $x_1$  и  $y_1$ . Координаты бесконечно малых площадей  $dA_1$  и  $dA_2$  можно выразить через координаты в старых осях:

$$x_1' = x_1 + a; \quad x_2' = x_2 + a; \quad y_1' = y_1 + \epsilon; \quad y_2' = y_2 + \epsilon.$$

Подставив новые координаты в выражение (2.31), получим:

$$\begin{aligned} (EJ_{x_1})_{\text{пр}} &= E_1 \int_{A_1} (y_1')^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2')^2 dA_2 = \\ &= E_1 \int_{A_1} (y_1 + \epsilon)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + \epsilon)^2 dA_2. \end{aligned}$$

Раскрывая круглые скобки, получим:

$$\begin{aligned} (EJ_{x_1})_{\text{пр}} &= E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + 2\epsilon E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + 2\epsilon E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2 + \\ &+ \epsilon^2 E_1 \int_{A_1} dA_1 + \epsilon^2 E_2 \int_{A_2} dA_2. \end{aligned}$$

Согласно обозначениям для статических моментов жесткости  $(Es_x)_{\text{пр}}$  и приведенной жесткости сечения  $(EJ_x)_{\text{пр}}$ , получим:

$$(EJ_{x_1})_{\text{пр}} = (EJ_x)_{\text{пр}} + 2 \cdot \epsilon (Es_x)_{\text{пр}} + \epsilon^2 (E_1 A_1 + E_2 A_2). \quad (2.34)$$

Аналогично подставляя новые координаты в формулу (2.32), получим:

$$(EJ_{y_1})_{\text{пр}} = (EJ_y)_{\text{пр}} + 2 \cdot a (Es_y)_{\text{пр}} + a^2 (E_1 A_1 + E_2 A_2). \quad (2.35)$$

Для приведенной центробежной жесткости сечения:

$$(EJ_{x_1y_1})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x_1 + a)(y_1 + \epsilon) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x_2 + a)(y_2 + \epsilon) dA_2.$$

Раскрывая круглые скобки, будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} (EJ_{x_1y_1})_{\text{пр}} = & E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 + E_1 \epsilon \int_{A_1} x_1 dA_1 + E_2 \epsilon \int_{A_2} x_2 dA_2 + \\ & + a E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + a E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2 + a \epsilon E_1 \int_{A_1} dA_1 + a \epsilon E_2 \int_{A_2} dA_2. \end{aligned}$$

Или окончательно для центробежной жесткости получим формулу следующего вида:

$$(EJ_{x_1y_1})_{\text{пр}} = (EJ_{xy})_{\text{пр}} + a(Es_x)_{\text{пр}} + \epsilon(Es_y)_{\text{пр}} + a\epsilon(E_1 A_1 + E_2 A_2). \quad (2.36)$$

Наибольшее практическое значение имеют приведенные жесткости сечения относительно осей центральной жесткости. Ранее указывалось, что статические моменты жесткости сечения равны нулю относительно осей центральной жесткости. В этом случае  $(Es_x)_{\text{пр}} = (Es_y)_{\text{пр}} = 0$ , а выражения (2.34)–(2.36) упрощаются и для стержня, состоящего из  $n$  разнородных материалов, они принимают следующий вид:

$$(EJ_{x_1})_{\text{пр}} = (EJ_x)_{\text{пр}} + \epsilon^2 \sum_{i=1}^n E_i A_i; \quad (2.37)$$

$$(EJ_{y_1})_{\text{пр}} = (EJ_y)_{\text{пр}} + a^2 \sum_{i=1}^n E_i A_i; \quad (2.38)$$

$$(EJ_{x_1y_1})_{\text{пр}} = (EJ_{xy})_{\text{пр}} + a\epsilon \sum_{i=1}^n E_i A_i. \quad (2.39)$$

Из выражений (2.37) и (2.38) следует, что приведенная осевая жесткость сечения при изгибе относительно любой оси равна приведенной жесткости относительно оси центральной жесткости, па-



Повернем первоначальные оси  $x$  и  $y$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки, считая такое направление положительным. Определим жесткости сечения относительно новых осей  $m$  и  $n$ . Подставив в выражения (2.31)–(2.33) новые координаты  $m_1, m_2, n_1$  и  $n_2$ , получим:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} n_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} n_2^2 dA_2; \quad (2.40)$$

$$(EJ_n)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} m_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} m_2^2 dA_2; \quad (2.41)$$

$$(EJ_{mn})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} m_1 n_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} m_2 n_2 dA_2. \quad (2.42)$$

Координаты произвольной бесконечно малой площадки  $dA_1$  в новых координатах  $m_1$  и  $n_1$  выражаются через прежние координаты следующим образом:

$$m_1 = OC = OL + KD = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha;$$

$$n_1 = BC = BD - LK = y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha.$$

Аналогично координаты  $m_2$  и  $n_2$  можно выразить через первоначальные координаты  $x_2$  и  $y_2$ .

$$m_2 = x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha;$$

$$n_2 = y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha.$$

Подставив полученные значения новых координат в выражения (2.40)–(2.42), получим следующий вид формул:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha)^2 dA_2; \quad (2.43)$$

$$(EJ_n)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)^2 dA_2; \quad (2.44)$$

$$(EJ_{mn})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)(y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha) dA_1 + \quad (2.45)$$

$$+ E_2 \int_{A_2} (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)(y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) dA_2.$$

Раскрывая круглые скобки в выражении (2.43) и почленно интегрируя, получим:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = \cos^2 \alpha E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + \sin^2 \alpha E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 +$$

$$+ \cos^2 \alpha E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 + \sin^2 \alpha E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2.$$

Сгруппировав слагаемые в последнем выражении определенным образом, получим следующую формулу:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = \left[ E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 \right] \cos^2 \alpha +$$

$$+ \left[ E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2 \right] \sin^2 \alpha - \quad (2.46)$$

$$- \left[ E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \right] \sin 2\alpha.$$

Рассматривая аналогично формулу (2.44), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
(EJ_n)_{\text{пр}} = & \left[ E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 \right] \sin^2 \alpha + \\
& + \left[ E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2 \right] \cos^2 \alpha + \\
& + \left[ E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \right] \sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Раскрывая круглые скобки в формуле (2.45) и почленно интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}
(EJ_{mn})_{\text{пр}} = & \cos^2 \alpha E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 - \sin \alpha \cos \alpha E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + \sin \alpha \cos \alpha E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 - \\
& - \sin^2 \alpha E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + \cos^2 \alpha E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 - \sin \alpha \cos \alpha E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2 + \\
& + \sin \alpha \cos \alpha E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 - \sin^2 \alpha E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2.
\end{aligned}$$

Сгруппировав слагаемые в последнем выражении определенным образом, получим:

$$\begin{aligned}
(EJ_{mn})_{\text{пр}} = & \left[ E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \right] \cos^2 \alpha - \\
& - \left[ E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \right] \sin^2 \alpha + \\
& + \left[ E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha - \\
& - \left[ E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

В формулах (2.46)–(2.48) выражения в квадратных скобках представляют осевые и центробежную жесткости сечения относительно первоначальных координатных осей  $x$  и  $y$ , которые представлены формулами (2.31)–(2.33). Окончательно формулы для определения приведенных жесткостей сечения относительно осей  $m$  и  $n$  будут равны:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = (EJ_x)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha + (EJ_y)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha - (EJ_{xy})_{\text{пр}} \cdot \sin 2\alpha; \quad (2.49)$$

$$(EJ_n)_{\text{пр}} = (EJ_x)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha + (EJ_y)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha + (EJ_{xy})_{\text{пр}} \cdot \sin 2\alpha; \quad (2.50)$$

$$(EJ_{mn})_{\text{пр}} = (EJ_{xy})_{\text{пр}} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} [(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}] \cdot \sin 2\alpha. \quad (2.51)$$

Следует отметить, что формулы (2.49)–(2.51) справедливы и для координатных осей, проходящих через центр жесткости сечения.

## 2.7. Главные оси и главные приведенные жесткости сечения

В соответствии с формулами (2.49) и (2.50), с изменением угла  $\alpha$  изменяются и величины приведенных жесткостей сечения. Суммируя левые и правые части этих уравнений, получаем следующее равенство:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} + (EJ_n)_{\text{пр}} = (EJ_x)_{\text{пр}} + (EJ_y)_{\text{пр}}. \quad (2.52)$$

Из полученного равенства следует, что сумма осевых приведенных жесткостей не зависит от угла  $\alpha$  и является величиной постоянной. Следовательно, существует такой угол  $\alpha$ , когда одна осевая жесткость сечения достигает максимума, а вторая будет иметь минимум. Для определения положения таких осей продифференцируем уравнение (2.49) по переменной  $\alpha$  и приравняем полученное выражение к нулю:

$$\frac{d(EJ_m)_{\text{пр}}}{d\alpha} = -(EJ_x)_{\text{пр}} \cdot \sin 2\alpha + (EJ_y)_{\text{пр}} \cdot \cos 2\alpha - 2(EJ_{xy})_{\text{пр}} \cdot \cos 2\alpha = 0.$$



Из последнего равенства следует:

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2(EJ_{xy})_{\text{пр}}}{(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}}. \quad (2.53)$$

При таком значении угла  $\alpha$  одна из приведенных осевых жесткостей сечения будет максимальной, а вторая – минимальной. Центробежная жесткость сечения может обращаться в ноль, что легко устанавливается с использованием полученного значения для  $\operatorname{tg}\alpha$  и формулы (2.51).

Оси, относительно которых центробежная жесткость сечения обращается в ноль, будем называть главными осями.

Оси, относительно которых центробежная жесткость сечения равна нулю, а начало координат совпадает с центром жесткости сечения, будем называть главными осями центральной жесткости  $m$  и  $n$ . Приведенные жесткости сечения относительно главных осей центральной жесткости будем называть главными приведенными жесткостями сечения.

Вычитая из уравнения (2.49) уравнение (2.50), получим:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} - (EJ_n)_{\text{пр}} = [(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}] \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha}. \quad (2.54)$$

Из тригонометрии известно следующее соотношение:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}.$$

Подставив вместо  $\operatorname{tg}2\alpha$  его значение, выраженное через жесткости сечения (2.53), получим:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{4(EJ_{xy})_{\text{пр}}^2}{[(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}]^2}}.$$

Подставив последнее соотношение в формулу (2.54), будем иметь:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} - (EJ_n)_{\text{пр}} = \sqrt{[(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}]^2 + 4(EJ_{xy})_{\text{пр}}^2}. \quad (2.55)$$

Рассматривая совместно систему уравнений из (2.52) и (2.55), окончательно получим:

$$(EJ_m)_{\text{пр}} = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}} + (EJ_y)_{\text{пр}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}]^2 + 4(EJ_{xy})_{\text{пр}}^2}; \quad (2.56)$$

$$(EJ_n)_{\text{пр}} = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}} + (EJ_y)_{\text{пр}}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{[(EJ_x)_{\text{пр}} - (EJ_y)_{\text{пр}}]^2 + 4(EJ_{xy})_{\text{пр}}^2}. \quad (2.57)$$

Формулы (2.56) и (2.57) позволяют определять главные приведенные жесткости  $(EJ_m)_{\text{пр}}$  и  $(EJ_n)_{\text{пр}}$  относительно осей, проходящих через центр жесткости сечения. Приведенная жесткость сечения  $(EJ_m)_{\text{пр}}$  всегда больше, чем приведенная жесткость сечения  $(EJ_n)_{\text{пр}}$ . Поэтому ось  $m$  откладывают поворотом оси центральной жесткости, относительно которой осевая приведенная жесткость максимальна.

Например, если  $(EJ_x)_{\text{пр}} > (EJ_y)_{\text{пр}}$ , то ось  $m$  откладывают путем поворота оси  $x$  на угол  $\alpha$ . Если  $(EJ_y)_{\text{пр}} > (EJ_x)_{\text{пр}}$ , то ось  $m$  откладывают путем поворота оси  $y$  на угол  $\alpha$ .

**Пример.** Определить положение главных осей центральной жесткости сечения и величины приведенных жесткостей относительно этих осей. Стержень состоит из двух прочно соединенных между собой стального и алюминиевого стержней. Поперечное сечение приведено на рис. 2.11. Модуль продольной упругости для стали принять равным  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, а для алюминия –  $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$  МПа.

Разобьем сечение на три прямоугольника и проведем оси, проходящие через центры тяжести отдельных фигур. Определим расстояния от осей  $x$  и  $y$  до центральных осей отдельных фигур, которые будут равны:

$$a_1 = 25 \text{ мм}; a_2 = 75 \text{ мм}; a_3 = 50 \text{ мм}; b_1 = b_2 = 80 \text{ мм}; b_3 = 20 \text{ мм}.$$

Используя выражения (2.15) и (2.16), определим координаты центра жесткости сечения относительно осей  $X$  и  $Y$ :

$$x_j = \frac{(Es_y)_{\text{пр}}}{\sum_{i=0}^n E_i A_i} = \frac{E_i \cdot s_{y_2} + E_1 \cdot s_{y_3} + E_2 \cdot s_{y_1}}{E_1 A_2 + E_1 A_3 + E_2 A_1} =$$

$$= \frac{E_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot a_2 + E_1 \cdot \sigma \cdot h_2 \cdot a_3 + E_2 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot a_1}{E_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 + E_1 \cdot \sigma \cdot h_2 + E_2 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1}.$$

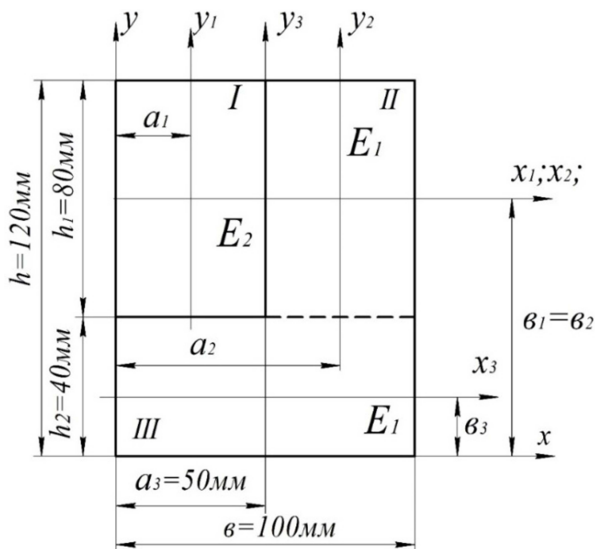


Рис. 2.11. Поперечное сечение стержня из двух разнородных материалов

Подставив численные значения в последнее выражение для координаты  $x_j$ , получим:

$$x_j = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 75 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40 \cdot 50 + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 25}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40 + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80} =$$

$$= 56,915 \text{ мм.}$$

Определим координату  $y_j$ :

$$y_j = \frac{(ES_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=0}^n E_i A_i} = \frac{E_1 s_{x_2} + E_1 s_{x_3} + E_2 s_{x_1}}{E_1 A_2 + E_1 A_3 + E_2 A_1} =$$

$$= \frac{E_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot \sigma_2 + E_1 \cdot \sigma \cdot h_2 \cdot \sigma_3 + E_2 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot \sigma_1}{E_1 \frac{\sigma}{2} h_1 + E_1 \cdot \sigma \cdot h_2 + E_2 \frac{\sigma}{2} h_1}.$$

Подставив численные значения в последнее выражение для координаты  $y_j$ , получим:

$$y_j = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 80 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40 \cdot 20 + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 80}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40 + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80} =$$

$$= 54,468 \text{ мм.}$$

На рис. 2.12 приведено поперечное сечение стержня с осями центральной жесткости  $x_j$  и  $y_j$ .

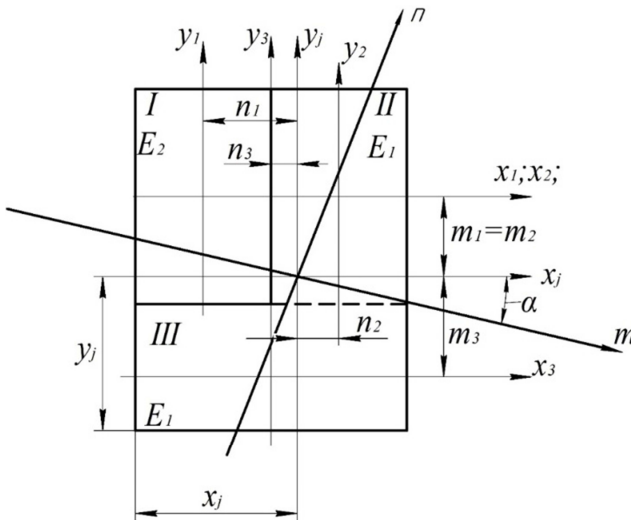


Рис. 2.12. Положение главных осей центральной жесткости

Определим расстояние от осей центральной жесткости  $x_j$  и  $y_j$  до центральных осей отдельных фигур.

$$m_1 = m_2 = h - y_j - \frac{h_1}{2} = 120 - 54,468 - 40 = 25,532 \text{ мм};$$

$$m_3 = -\left(y_i - \frac{h_2}{2}\right) = -(54,468 - 20) = -34,468 \text{ мм};$$

$$n_1 = -\left(x_j - \frac{e}{4}\right) = -(56,915 - 25) = -31,915 \text{ мм};$$

$$n_2 = e - \frac{e}{4} - x_j = 100 - 25 - 56,915 = 18,085 \text{ мм};$$

$$n_3 = -\left(x_j - \frac{e}{2}\right) = -(56,915 - 50) = -6,915 \text{ мм}.$$

Проверяем правильность определения положения осей центральной жесткости сечения. Приведенные статические моменты жесткостей сечения относительно осей  $x_j$  и  $y_j$  должны быть равны нулю.

Используя выражения для  $(Es_x)_{\text{пр}}$  и  $(Es_y)_{\text{пр}}$ , получим:

$$\begin{aligned} (Es_{x_j})_{\text{пр}} &= E_1 s_{x_2} + E_1 s_{x_3} + E_2 s_{x_1} = \\ &= E_1 \cdot \frac{e}{2} \cdot h_1 \cdot m_2 + E_1 \cdot e \cdot h_2 \cdot m_3 + E_2 \cdot \frac{e}{2} \cdot h_1 \cdot m_1 = \\ &= 2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 25,532 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40(-34,468) + \\ &+ 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 25,532 = 275\,745,6 \cdot 10^5 - 275\,744 \cdot 10^5 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ н} \cdot \text{мм}. \end{aligned}$$

Ошибка расчета составляет 0,00058 %, она связана с округлением числовых величин.

$$\begin{aligned}
(Es_{y_j})_{\text{пр}} &= E_1s_{y_2} + E_1s_{y_3} + E_2s_{y_1} = \\
&= E_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot n_2 + E_1 \cdot \sigma \cdot h_2 \cdot n_3 + E_2 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \cdot n_1 = \\
&= 2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 18,085 + 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40(-6,915) + \\
&+ 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80(-31,915) = 144\,680 \cdot 10^5 - 144\,682 \cdot 10^5 = -2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм}.
\end{aligned}$$

Ошибка расчета составляет 0,00138 %.

Определим приведенные осевые жесткости сечения относительно осей  $x_j$  и  $y_j$ , используя выражения (2.28) и (2.29):

$$\begin{aligned}
(EJ_{x_j})_{\text{пр}} &= \sum_{i=0}^n E_i J_{x_i} = E_1 J_{x_2} + E_1 A_2 m_2^2 + E_1 J_{x_3} + E_1 A_3 m_3^2 + E_2 J_{x_1} + E_2 A_1 m_1^2 = \\
&= E_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \cdot h_1^3 + E_1 \left( \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \right) \cdot m_2^2 + E_1 \frac{\sigma h_2^3}{12} + E_1 (\sigma \cdot h_2) m_3^2 + E_2 \frac{\sigma}{2} \cdot h_1^3 + \\
&+ E_2 \left( \frac{\sigma}{2} \cdot h_1 \right) m_1^2 = 2 \cdot 10^5 \frac{50 \cdot 80^3}{12} + 2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 25,532^2 + 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{100 \cdot 40^3}{12} + \\
&+ 2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 40(-34,468)^2 + 0,7 \cdot 10^5 \cdot \frac{50 \cdot 80^3}{12} + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 25,532^2 = \\
&= 233,84 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EJ_{y_j})_{\text{пр}} &= \sum_{i=0}^n E_i J_{y_i} = E_1 \cdot J_{y_2} + E_1 \cdot A_2 \cdot n_2^2 + E_1 J_{y_3} + E_1 A_3 n_3^2 + E_2 J_{y_1} + E_2 A_1 n_1^2 = \\
&= E_1 \frac{h_1 \left( \frac{\sigma}{2} \right)^3}{12} + E_1 \left( h_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \right) n_2^2 + E_1 \frac{h_2 \sigma^3}{12} + E_1 (h_2 \cdot \sigma) n_3^2 + E_2 \frac{h_1 \left( \frac{\sigma}{2} \right)^3}{12} + E_2 \left( h_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \right) n_1^2 = \\
&= 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{80 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 50 \cdot 18,085^2 + 2 \cdot 10^5 \frac{40 \cdot 100^3}{12} + \\
&+ 10^5 \cdot 40 \cdot 100 \cdot (-6,915)^2 + 0,7 \cdot 10^5 \frac{80 \cdot 50^3}{12} + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 50(-31,915)^2 = \\
&= 148,71 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.
\end{aligned}$$

Определяем центробежную жесткость сечения относительно осей  $x_j$  и  $y_j$  согласно формуле (2.30):

$$\begin{aligned}
 (EJ_{x_j y_j})_{\text{пр}} &= \sum_{i=0}^n E_i J_{x_i y_i} = E_1 A_2 m_2 n_2 + E_1 A_3 m_3 n_3 + E_2 A_1 m_1 n_1 = \\
 &= E_1 \left( h_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \right) m_2 n_2 + E_1 (h_2 \cdot \sigma) m_3 n_3 + E_2 \left( h_1 \cdot \frac{\sigma}{2} \right) m_1 n_1 = \\
 &= 2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 50 \cdot 25,532 \cdot 18,085 + 2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 100 (-34,468) (-6,915) + \\
 &\quad + 0,7 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 50 \cdot 25,532 \cdot (-31,915) = 33,19 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.
 \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (2.53) определим положение главных осей центральной жесткости сечения.

$$\text{tg} 2\alpha = - \frac{2(EJ_{x_j y_j})_{\text{пр}}}{(EJ_{x_j})_{\text{пр}} - (EJ_{y_j})_{\text{пр}}} = - \frac{2 \cdot 33,19 \cdot 10^{10}}{233,84 \cdot 10^{10} - 148,71 \cdot 10^{10}} = -0,7797.$$

Откуда  $2\alpha = -37,94^\circ$ , а  $\alpha = -18,97^\circ$ .

Главные оси центральной жесткости сечения  $m$  и  $n$  получим поворотом осей  $x_j$  и  $y_j$  по часовой стрелке (рис. 2.12).

В соответствии с формулами (2.56) и (2.57) определим жесткости сечения относительно осей  $m$  и  $n$ .

$$\begin{aligned}
 (EJ_m)_{\text{пр}} &= \frac{(EJ_{x_j})_{\text{пр}} + (EJ_{y_j})_{\text{пр}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[(EJ_{x_j})_{\text{пр}} - (EJ_{y_j})_{\text{пр}}]^2 + 4(EJ_{x_j y_j})_{\text{пр}}^2} = \\
 &= \frac{233,84 \cdot 10^{10} + 148,71 \cdot 10^{10}}{2} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{(233,84 \cdot 10^{10} - 148,71 \cdot 10^{10})^2 + 4(33,19 \cdot 10^{10})^2} = 245,25 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

$$\begin{aligned}
 (EJ_n)_{\text{пр}} &= \frac{(EJ_{x_j})_{\text{пр}} + (EJ_{y_j})_{\text{пр}}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{[(EJ_{x_j})_{\text{пр}} - (EJ_{y_j})_{\text{пр}}]^2 + 4(EJ_{x_j y_j})_{\text{пр}}^2} = \\
 &= \frac{233,84 \cdot 10^{10} + 148,71 \cdot 10^{10}}{2} -
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{(233,84 \cdot 10^{10} - 148,71 \cdot 10^{10})^2 + 4(33,19 \cdot 10^{10})^2} = 137,3 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

### 3. ИЗГИБ

Под *изгибом* следует понимать такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях могут возникать изгибающие моменты и поперечные силы. Изгиб стержня вызывается силами, действующими перпендикулярно к оси стержня. Если в сечениях возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы отсутствуют, то такой изгиб называют чистым изгибом. Однако в большинстве случаев в поперечных сечениях возникают не только изгибающие моменты, но и поперечные силы. Такой изгиб называется поперечным изгибом.

В данной главе будем рассматривать прямые стержни, составленные из двух прочно соединенных стержней из различных материалов. При этом силовая плоскость будет проходить через продольную ось стержня, являющуюся одной из главных осей центральной жесткости сечения. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. В случае, если силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных осей центральной жесткости сечения, то изгиб называется косым. Балка, подвергающаяся воздействию внешних нагрузок, должна быть закреплена особым способом, чтобы быть геометрически неизменной. Устройства, которыми крепится балка, называются опорами.

#### 3.1. Типы опор балок

Конструктивно опоры балок весьма разнообразны, и для проведения расчетов опоры схематизируются и сводятся к трем наиболее распространенным типам:

1. Шарнирно подвижная опора (рис. 3.1, *а*). Она может передвигаться на катках, уложенных на неподвижную плоскость. В такой опоре возникает только одна вертикальная реакция  $R_A$ , которая проходит через центр шарнира перпендикулярно плоскости, на которой она размещена.

2. Шарнирно неподвижная опора (рис. 3.1, *б*). Она крепится жестко к неподвижной плоскости. В такой опоре могут возникать вертикальная  $R_A$  и горизонтальная  $H_A$  реакции.

3. Жесткое защемление или заделка (рис. 3.1, *в*). В заделке могут возникать вертикальная  $R_A$ , горизонтальная  $H_A$  реакции и реактивный момент  $M$ .



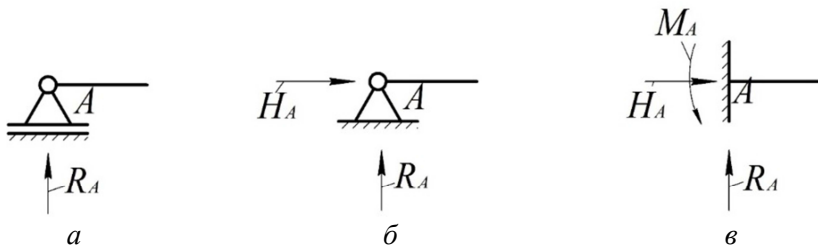


Рис. 3.1. Виды опор: *a* – шарнирно подвижная; *б* – шарнирно неподвижная; *в* – жесткое защемление (заделка)

Если один конец балки защемлен и не имеет других опор, то такая балка называется консолью (рис. 3.2, *a*). Балки, снабженные с одного конца шарнирно неподвижной опорой, а с другого шарнирно подвижной, называют однопролетными балками (рис. 3.2, *б*). Однопролетные балки, снабженные двумя опорами не по концам, называются консольными балками (рис. 3.2, *в*).

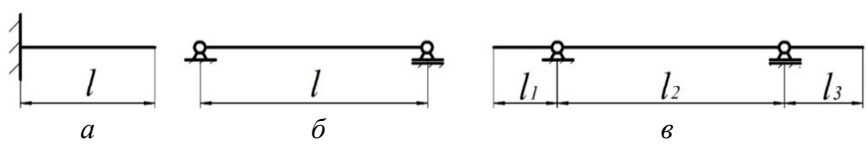


Рис. 3.2. Виды балок: *a* – консольная балка (консоль); *б* – двухопорная балка; *в* – двухопорная балка с консолями

Известно, что для плоской системы сил можно составить три уравнения статики для определения опорных реакций. Балка считается статически определимой, если число неизвестных опорных реакций не превышает трех. Если число неизвестных реакций больше трех, то такая балка является статически неопределимой.

Балки, показанные на рис. 3.2, статически определимые, они и будут объектами исследования в данной главе.

### 3.2. Определение реакций в опорах

При поперечном изгибе нагрузки на балку действуют перпендикулярные ее оси. Поэтому при определении опорных реакций горизонтальная реакция не определяется, так как она равна нулю.

Остальные опорные реакции определяются из уравнений статики. Следует знать, что если на участке балки действует распределенная нагрузка, то ее действие заменяют равнодействующей, которая равна площади ее действия и приложена в центре тяжести площади распределенной нагрузки. Рассмотрим два основных типа статически определимых балок – консольную и двухопорную.

На рис. 3.3 показана консольная балка с нагрузками различного вида. При таком действии нагрузок в заделке возникают вертикальная реакция  $R_{(A)}$  и реактивный момент  $M_{(A)}$ .

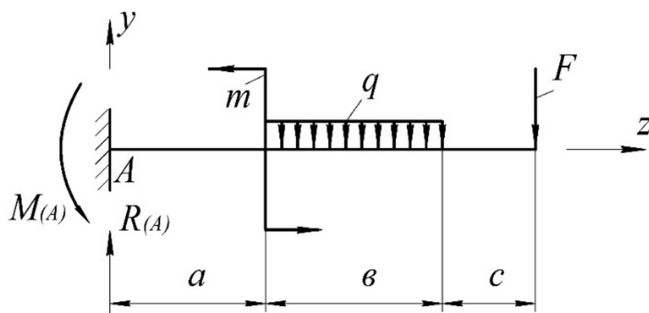


Рис. 3.3. Схема нагружения консольной балки

1. Из условия равновесия сил на вертикальную ось  $y$  следует:

$$\sum F_{(y)} = 0; R_{(A)} = F + q \cdot b. \quad (3.1)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно заделки  $A$  равна нулю. Из этого следует:

$$\sum M = 0; M_{(A)} = F(a + b + c) + q \cdot b \cdot \left( a + \frac{b}{2} \right) - m. \quad (3.2)$$

Положение сосредоточенного изгибающего момента  $m$  не влияет на реактивный момент  $M_{(A)}$ .

На рис. 3.4 показана двухопорная однопролетная балка. В опорах  $A$  и  $B$  возникнут вертикальные опорные реакции  $R_{(A)}$  и  $R_{(B)}$ .

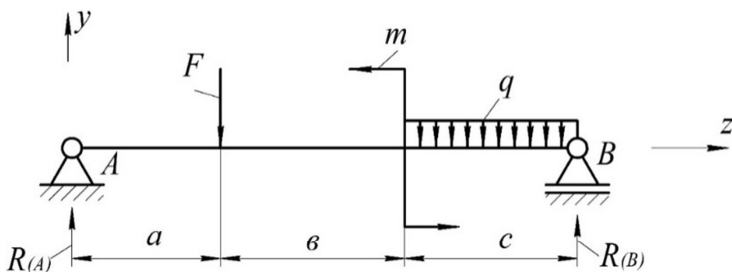


Рис. 3.4. Схема нагружения двухопорной балки

1. Сумма моментов всех сил относительно шарнира  $A$  позволяет определить реакцию  $R_{(B)}$ :

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_{(B)} = \frac{q \cdot c \left( a + b + \frac{c}{2} \right) - m + F \cdot a}{a + b + c}. \quad (3.3)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно шарнира  $B$  позволяет определить реакцию  $R_{(A)}$ :

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad R_{(A)} = \frac{F(b + c) + m + q \cdot c \cdot \frac{c}{2}}{a + b + c}. \quad (3.4)$$

3. Для проверки правильности определения реакций  $R_{(A)}$  и  $R_{(B)}$  необходимо условие равенства нулю всех сил на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum F_{(Y)} = 0; \quad R_{(A)} - F - q \cdot c + R_{(B)} = 0.$$

Перед составлением уравнений равновесия следует выбрать направление опорных реакций и реактивного момента. Если после вычислений какая-либо реакция или реактивный момент будет иметь отрицательное значение, то на схеме необходимо изменить направление реакции или реактивного момента на обратное. Правило знаков при составлении уравнений статики можно выбирать произвольно, но оно должно быть одинаковым для всех силовых факторов.

### 3.3. Определение внутренних силовых факторов

Для расчетов на прочность различных видов балок необходимо уметь определять законы изменения внутренних силовых факторов в сечениях по длине балки. Вследствие того, что все внешние силы располагаются в плоскости  $yo_z$ , задача значительно упрощается, так как в любом сечении балки могут возникать только вертикальная поперечная сила  $Q_{(z)}$  и изгибающий момент  $M_{(z)}$ . Для получения расчетных формул рассмотрим балку, приведенную на рис. 3.5, а.

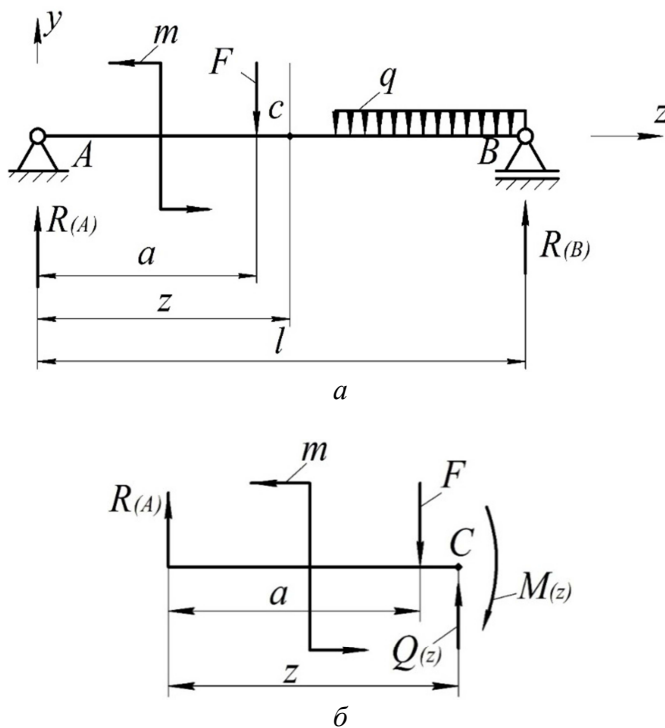


Рис. 3.5. Двухопорная балка:  
а – схема нагружения; б – равновесие левой части балки

На расстоянии  $z$  от левой опоры проведем сечение в точке C и мысленно разделим балку на две части. Поперечная сила  $Q_{(z)}$  и изгибающий момент  $M_{(z)}$  выражают действие правой части балки на ее

левую часть. Величина внутренних сил не зависит от того, рассматриваются условия равновесия левой или правой части балки. Силовые факторы можно определять из условий равновесия одной из частей балки.

Рассмотрим левую часть балки, показанной на рис. 3.5, б. Возьмем сумму сил на вертикальную ось  $y$ , из условия статического равновесия она должна быть равна нулю:

$$\sum F_{(y)} = 0; \quad R_A - F + Q_{(z)} = 0; \tag{3.5}$$

$$Q_{(z)} = F - R_A.$$

Из выражения (3.5) следует, что поперечная сила в сечении балки равна сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения балки.

Очевидно, что сумма изгибающих моментов от всех сил, действующих на левую часть балки, также должна быть равна нулю:

$$\sum M_{(c)} = 0; \quad R_A \cdot z - m - F(z - a) + M_{(z)} = 0; \tag{3.6}$$

$$M_z = F(z - a) + m - R_A \cdot z.$$

Из выражения (3.6) следует, что изгибающий момент в любом сечении балки равен сумме моментов от всех сил, расположенных по одну сторону сечения.

Знак поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  должен указывать на характер деформации, вызванный данным силовым фактором. Характеру деформации должен соответствовать знак силового фактора. Из этого вытекает правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента.

Поперечная сила считается положительной ( $Q > 0$ ), если сумма внешних сил слева от сечения дает равнодействующую, направленную вверх, а справа от сечения – вниз (рис. 3.6, а). Поперечную силу следует считать отрицательной, если равнодействующая слева от сечения направлена вниз, а справа – вверх (рис. 3.6, б).

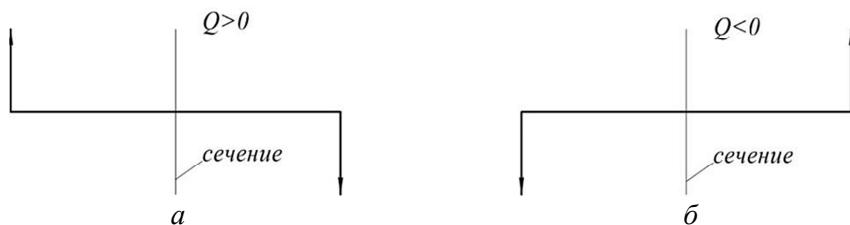


Рис. 3.6. Правило знаков для поперечных сил:  
 а – положительное значение поперечной силы;  
 б – отрицательное значение поперечной силы

Знак изгибающего момента устанавливается в зависимости от кривизны изогнутой линии балки.

Изгибающий момент считается положительным, если сумма моментов сил, действующих на левую часть балки, дает равнодействующий момент, направленный по часовой стрелке, а справа от сечения – против часовой стрелки (рис. 3.7, а). Изгибающий момент в сечении балки считается отрицательным, если равнодействующий момент слева от сечения направлен против часовой стрелки, а справа – по часовой стрелке (рис. 3.7, б).

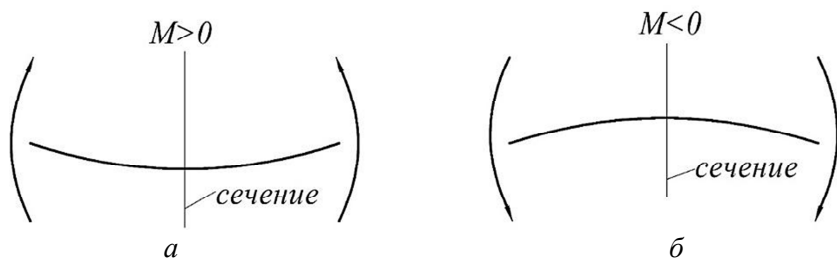


Рис. 3.7. Правило знаков для изгибающих моментов:  
 а – положительное значение изгибающего момента;  
 б – отрицательное значение изгибающего момента

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов ординаты положительных величин откладываются вверх от осевой линии, а отрицательные – вниз.

Для эпюры изгибающих моментов правило знаков можно трактовать и следующим образом. Эпюра моментов строится на сжатых волокнах балки, то есть ордината изгибающего момента откладывается в сторону вогнутости оси балки.

### 3.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для простых случаев нагружения

Эти эпюры представляют собой графики изменения величин поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  по длинам участков балки. Такие эпюры позволяют определять те сечения балки, где эти величины достигают максимального значения и являются опасными с точки зрения прочности. Рассмотрим консольную балку, которая на своем конце нагружена сосредоточенной силой  $F$  (рис. 3.8).

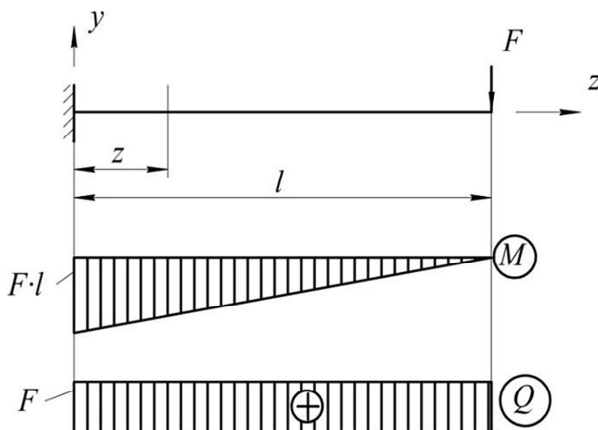


Рис. 3.8. Схема нагружения консольной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проведем сечение на расстоянии  $z$  от заделки и определим  $Q_{(z)}$  и  $M_{(z)}$ , действующих в этом сечении. Справа от сечения приложена сила  $F$ , и поэтому:

$$Q_{(z)} = F; \quad M_{(z)} = -F(l - z).$$

Из приведенных значений ясно, что поперечная сила является величиной постоянной по всей длине балки. Эпюра изгибающих моментов изменяется по длине по линейному закону.

$$z = 0; \quad M_{(z)} = 0; \quad z = l; \quad M_{(z)} = -Fl.$$

По полученным данным построены эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 3.8).

Рассмотрим случай, когда консольная балка по всей ее длине нагружена распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 3.9).

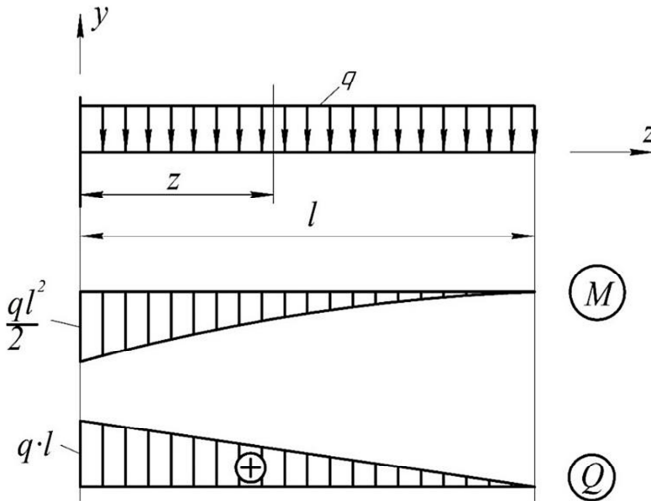


Рис. 3.9. Схема нагружения консольной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Определим поперечную силу и изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от заделки:

$$Q_{(z)} = q(l-z); \quad M_{(z)} = -q(l-z) \frac{(l-z)}{2} = -q \frac{(l-z)^2}{2}.$$

Из полученных выражений следует, что  $Q$  изменяется по линейному закону по длине балки, а эпюра  $M$  – по параболическому.

$$z = 0; \quad Q_{(z)} = 0; \quad M_{(z)} = 0.$$

$$z = l; \quad Q_{(z)} = q \cdot l; \quad M_{(z)} = -\frac{ql^2}{2}.$$

По полученным значениям построены эпюры  $Q$  и  $M$ , приведенные на рис. 3.9.



При построении эпюр рассматривалась та часть балки, в которой не было заделки. Такая методика построения позволяет не находить опорные реакции, возникающие в заделке.

На рис. 3.10 изображена двухопорная балка, нагруженная сосредоточенной силой  $F$ , размещенной произвольно относительно опор.

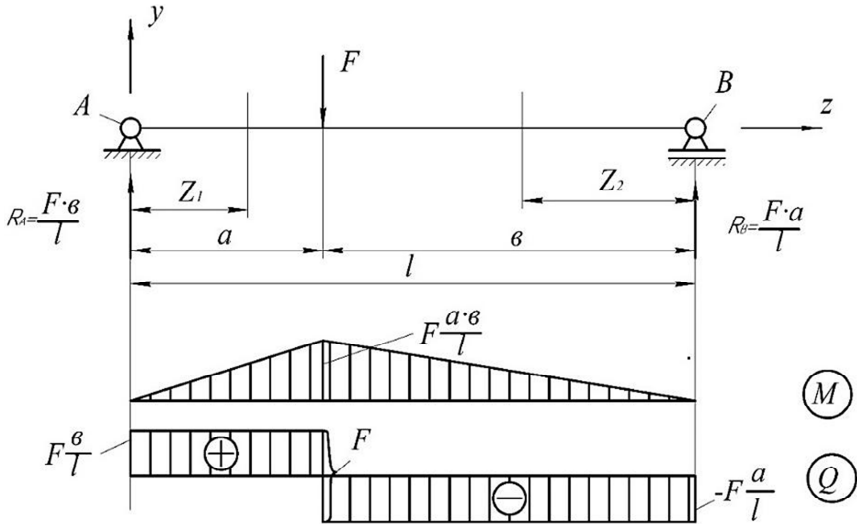


Рис. 3.10. Схема нагружения двухопорной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

В этом случае следует определить опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ .

$$\sum M_{(A)} = 0; R_B \cdot l - F \cdot a = 0; R_B = \frac{F \cdot a}{l};$$

$$\sum M_{(B)} = 0; -R_A \cdot l + F \cdot b = 0; R_A = \frac{F \cdot b}{l}.$$

Определение поперечных сил и изгибающих моментов следует вести по отдельным участкам. Граница участка создается с появлением нового силового фактора, и с переходом на другой участок

меняются величины  $Q$  и  $M$ . Рассмотрим первый участок на расстоянии  $z_1$  от левой опоры:

$$Q_{(z_1)} = R_A = \frac{F \cdot \epsilon}{l}; \quad M_{(z_1)} = R_A \cdot z_1 = \frac{F \cdot \epsilon}{l} \cdot z_1.$$

Вычисляем  $M_{(z_1)}$  на границах первого участка:

$$z_1 = 0; \quad M_{(z_1)} = 0; \quad z_1 = a; \quad M_{(z_1)} = R_A \cdot a = \frac{F \cdot a \cdot \epsilon}{l}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  на первом участке. Для построения эпюр на втором участке рассмотрим сечение на расстоянии  $z_2$  от правой опоры балки:

$$Q_{(z_2)} = -R_B = -\frac{F \cdot a}{l}; \quad M_{(z_2)} = R_B \cdot z_2 = \frac{F \cdot \epsilon}{l} \cdot z_2.$$

Вычисляем значения  $M_{(z_2)}$  по границам второго участка.

$$z_2 = 0; \quad M_{(z_2)} = 0; \quad z_2 = \epsilon; \quad M_{(z_2)} = \frac{F \cdot a \cdot \epsilon}{l}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  на втором участке балки. Эпюра  $Q$  прямоугольная на обоих участках и имеет разрыв в точке приложения силы  $F$  на величину этой силы. Эпюра  $M$  имеет линейную зависимость, но в точке приложения силы  $F$  терпит излом.

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой по всей длине (рис. 3.11).

Определяем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad R_B = \frac{ql}{2};$$

$$\sum M_{(B)} = 0; \quad -R_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad R_A = \frac{ql}{2}.$$

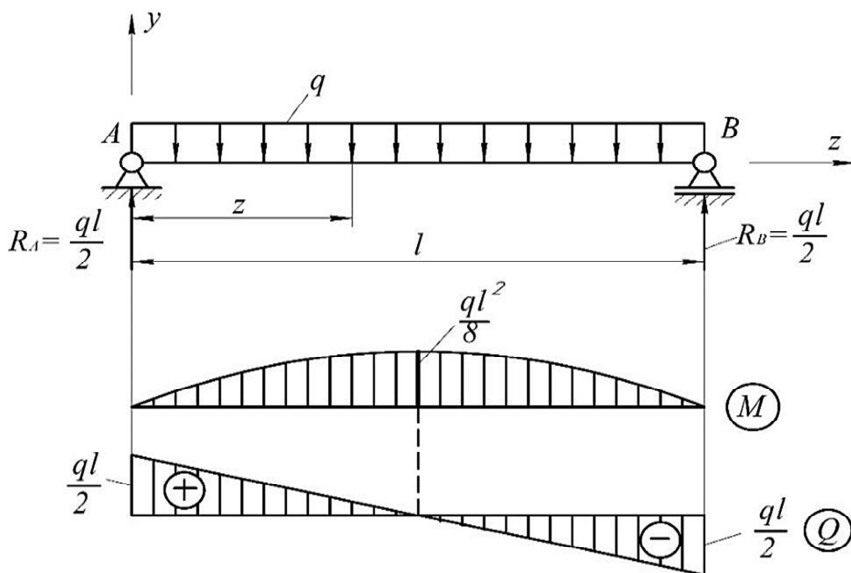


Рис. 3.11. Схема нагружения двухопорной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Определяем поперечную силу и изгибающий момент в поперечном сечении на расстоянии  $z$  от левой опоры:

$$Q_{(z)} = R_A - q \cdot z = \frac{ql}{2} - q \cdot z;$$

$$M_{(z)} = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \frac{ql}{2}z - q \frac{z^2}{2}.$$

Для построения эпюр вычисляем следующее:

$$z = 0; \quad Q_{(z)} = \frac{ql}{2}; \quad M_{(z)} = 0;$$

$$z = l; \quad Q_{(z)} = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}; \quad M_{(z)} = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

Определим величину  $M_{(z)}$  при  $z = \frac{l}{2}$ :

$$M_{(z)} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

По полученным данным строим эпюры  $Q$  и  $M$ . Эпюра  $Q$  имеет линейную зависимость, а эпюра  $M$  – параболическую. Следует заметить, что в сечении, где эпюра  $Q$  пересекает осевую линию  $\left(z = \frac{l}{2}\right)$ , эпюра  $M$  имеет максимум значения.

В качестве последнего простого примера рассмотрим двухопорную балку, нагруженную сосредоточенным изгибающим моментом в произвольном сечении (рис. 3.12).

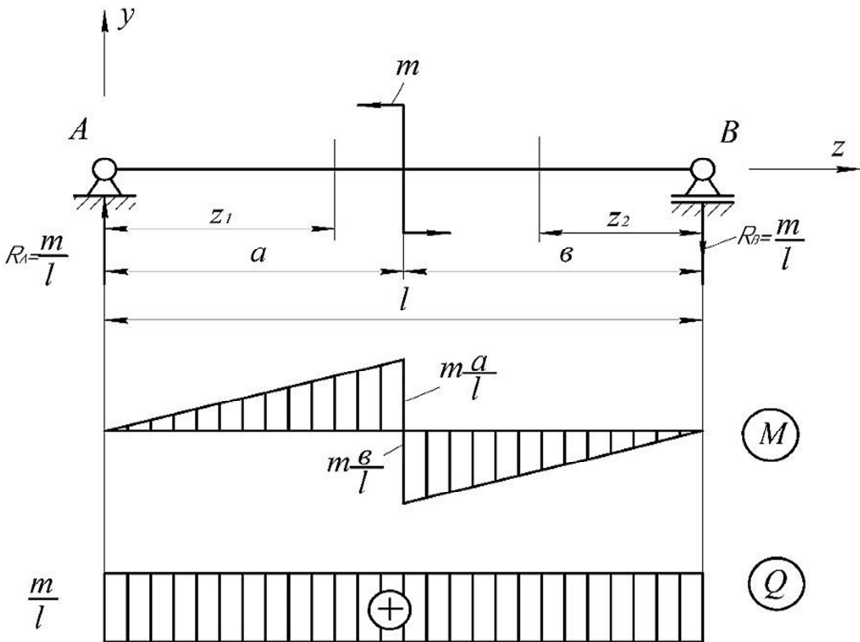


Рис. 3.12. Схема нагружения двухопорной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Находим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0 \quad -R_B \cdot l + m = 0; \quad R_B = \frac{m}{l};$$

$$\sum M_B = 0 \quad -R_A \cdot l + m = 0; \quad R_A = \frac{m}{l}.$$

Поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$  определяем по участкам. Рассмотрим первый участок на расстоянии  $z_1$  от левой опоры балки:

$$Q_{(z_1)} = R_A = \frac{m}{l}; \quad M_{(z_1)} = R_A \cdot z_1 = \frac{m}{l} \cdot z_1.$$

Вычисляем значения  $M_{(z_1)}$  по границам участка:

$$z_1 = 0; \quad M_{(z_1)} = 0; \quad z_1 = a; \quad M_{(z_1)} = m \frac{a}{l}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  на первом участке балки.

Рассмотрим второй участок балки на расстоянии  $z_2$  от правой опоры:

$$Q_{(z_2)} = R_B = \frac{m}{l}; \quad M_{(z_2)} = -R_B \cdot z_2 = -\frac{m}{l} \cdot z_2.$$

Вычислим значения  $M_{(z_2)}$  по границам участка:

$$z_2 = 0; \quad M_{(z_2)} = 0; \quad z_2 = b; \quad M_{(z_2)} = -m \frac{b}{l}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  на втором участке.

В данном примере следует отметить, что эпюра  $M$  терпит разрыв в том сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент. Величина разрыва соответствует величине изгибающего момента  $m$ . Эпюра  $Q$  прямоугольна по всей длине балки.

### 3.5. Дифференциальные зависимости между силовыми факторами при изгибе балки

Между силовыми факторами, возникающими в поперечных сечениях балки, существуют зависимости, которые позволяют контролировать результаты построения эпюр. Распределенную нагрузку направим снизу вверх, так как в этом случае она дает положительную составляющую изгибающего момента в любом сечении балки. Рассмотрим получение этих зависимостей, используя двухопорную балку с произвольными внешними нагрузками (рис. 3.13).

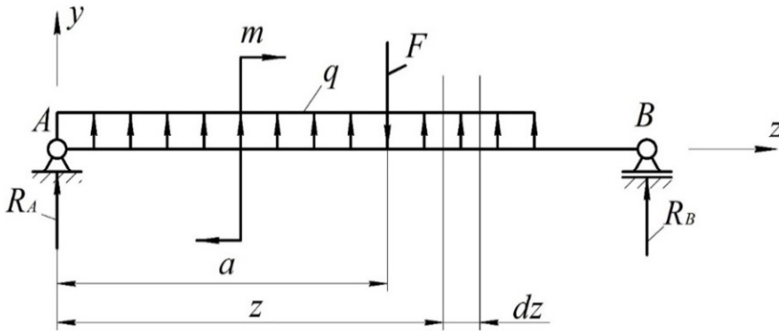


Рис. 3.13. Схема нагружения двухопорной балки

Определим поперечную силу в сечении на расстоянии  $z$  от левой опоры балки:

$$Q_{(z)} = R_A - F + q \cdot z. \quad (3.7)$$

Поперечная сила в сечении на расстоянии  $(z + dz)$  от левой опоры балки будет равна:

$$Q_{(z)} + dQ_{(z)} = R_A - F + q(z + dz). \quad (3.8)$$

Вычитая из уравнения (3.8) уравнение (3.7), получим:

$$dQ_{(z)} = q \cdot dz \quad \text{или} \quad q = \frac{dQ_{(z)}}{dz}. \quad (3.9)$$

Изгибающий момент в сечении балки на расстоянии  $z$  от левой опоры равен:

$$M_{(z)} = R_A \cdot z + m - F(z - a) + q \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (3.10)$$

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $(z + dz)$  от левой опоры балки равен:

$$M_{(z)} + dM_{(z)} = R_A(z + dz) + m - F(z + dz - a) + q \frac{(z + dz)^2}{2}. \quad (3.11)$$

Раскрывая круглые скобки, пренебрегая бесконечно малой величиной  $\frac{(dz)^2}{2}$  и вычитая из уравнения (3.11) уравнение (3.10), получим:

$$dM_{(z)} = (R_A - F + q \cdot z) dz.$$

В последнем выражении величина в круглых скобках равна поперечной силе  $Q_{(z)}$  в соответствии с (3.7), а поэтому:

$$Q_{(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz}. \quad (3.12)$$

Из совместного рассмотрения выражений (3.9) и (3.12) следует:

$$q = \frac{d^2 M_{(z)}}{dz^2}. \quad (3.13)$$

Соотношения (3.9), (3.12) и (3.13) называются дифференциальными зависимостями между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки при поперечном изгибе.

Дифференциальные соотношения и примеры построения эпюр  $M$  и  $Q$  для простых случаев нагружения балок позволяют установить некоторые особенности при построении эпюр:

1. На участке балки, где действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра  $M$  – по параболическому.

2. Выпуклость параболы обращена в сторону противоположную действию распределенной нагрузки.

3. На том участке балки, где действует распределенная нагрузка и эпюра  $Q$  пересекает осевую линию, эпюра  $M$  в точке пересечения осевой линии будет иметь экстремальное значение, а касательная к эпюре  $M$  будет параллельна оси эпюры.

4. На тех участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  прямоугольна, а эпюра  $M$  изменяется по линейному закону и наклонена к оси эпюры.

5. Там, где приложена сосредоточенная сила, эпюра  $Q$  терпит разрыв на величину этой силы, а эпюра  $M$  имеет излом.

6. Там, где приложен сосредоточенный изгибающий момент, эпюра  $M$  терпит разрыв на величину изгибающего момента, а эпюра  $Q$  сохраняет плавность и непрерывность.

**Пример.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 3.14.

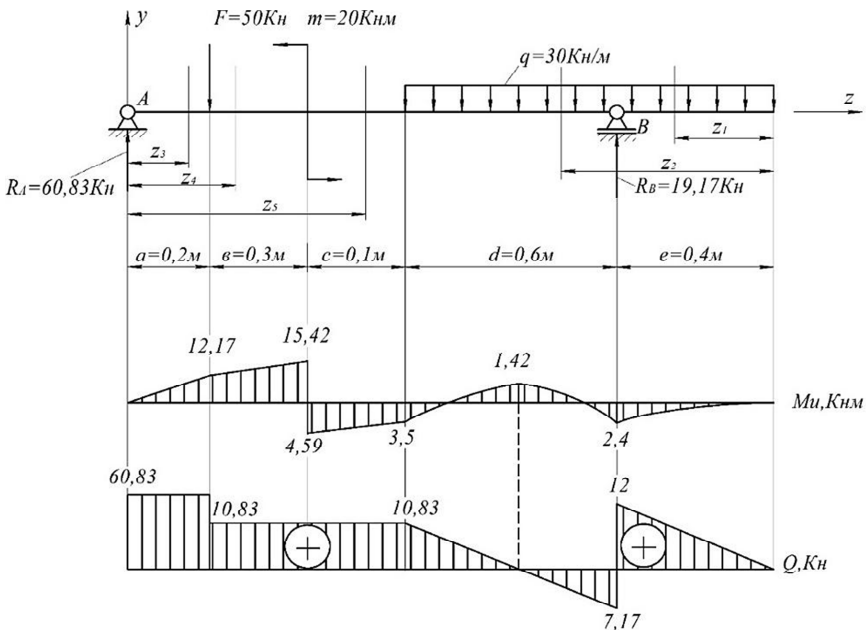


Рис. 3.14. Схема нагружения двухопорной балки и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил



Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; & -q \cdot 1 \cdot 1,1 + R_B \cdot 1,2 + m - F \cdot 0,2 = -30 \cdot 1 \cdot 1,1 + \\ & + R_B \cdot 1,2 - 50 \cdot 0,2 + 20 = 0;\end{aligned}$$

$$R_B = 19,17 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; & -R_A \cdot 1,2 + F \cdot 1 + m + q \cdot 0,6 \cdot 0,3 - q \cdot 0,4 \cdot 0,2 = \\ & = -R_A \cdot 1,2 + 50 \cdot 1 + 20 + 30 \cdot 0,6 \cdot 0,3 - 30 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0;\end{aligned}$$

$$R_A = 60,83 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum F_{(y)} = 0; R_A - F - q \cdot 1 + R_B = 60,83 - 50 - 30 \cdot 1 + 19,17 = 0.$$

Балка имеет пять участков, поэтому вводим пять произвольных сечений.

Наиболее простое построение эпюр  $Q$  и  $M$  для такой балки заключается в следующем:

1. Количество участков разделяем на примерно равное их число.
2. Строим эпюры  $Q$  и  $M$  с одного конца балки до ее среднего сечения, а затем с другого конца до этого сечения.

Для участка  $0 \leq z_1 \leq 0,4$ :

$$Q_{(z_1)} = q \cdot z_1; \quad z_1 = 0; \quad Q_{(z_1)} = 0; \quad z_1 = 0,4; \quad Q_{(z_1)} = 30 \cdot 0,4 = 12 \text{ кН};$$

$$M_{(z_1)} = -q \frac{z_1^2}{2}; \quad z_1 = 0; \quad M_{(z_1)} = 0; \quad z_1 = 0,4; \quad M_{(z_1)} = -30 \frac{0,4^2}{2} = -2,4.$$

Для участка  $0,4 \leq z_2 \leq 1,0$ :

$$Q_{(z_2)} = q \cdot z_2 - R_B; \quad z_2 = 0,4; \quad Q_{(z_2)} = 30 \cdot 0,4 - 19,17 = -7,17 \text{ кН};$$

$$z_2 = 1,0; \quad Q_{(z_2)} = 30 \cdot 1 - 19,17 = 10,83 \text{ кН.}$$

На данном участке эпюра  $Q$  пересекает осевую линию, то есть  $Q = 0$ . В этой точке эпюра  $M$  будет иметь экстремальное значение, которое необходимо определять. Для определения расстояния  $z_2$  до этой точки следует приравнять правую часть уравнения для  $Q_{(z_2)}$  к нулю.

$$qz_2 - R_B = 0; \quad z_2 = \frac{R_B}{q} = \frac{19,17}{30} = 0,639 \text{ м};$$

$$M_{z_2} = -q \frac{z_2^2}{2} + R_B(z_2 - 0,4); \quad z_2 = 0,4; \quad M_{(z_2)} = -30 \frac{0,4^2}{2} = -2,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 0,639; \quad M_{z_2} = -30 \frac{0,639^2}{2} + 19,17(0,639 - 0,4) = 1,42 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 1; \quad M_{z_2} = -30 \frac{1^2}{2} + 19,17(1 - 0,4) = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Дальнейшее построение эпюр начнем от опоры А.  
Для участка  $0 \leq z_3 \leq 0,2$ :

$$Q_{(z_3)} = R_A = 60,83 \text{ кН};$$

$$M_{(z_3)} = R_A \cdot z_3; \quad z_3 = 0; \quad M_{(z_3)} = 0; \quad z_3 = 0,2;$$

$$M_{(z_3)} = 60,83 \cdot 0,2 = 12,17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Для участка  $0,2 \leq z_4 \leq 0,5$ :

$$Q_{(z_4)} = R_A - F = 60,83 - 50 = 10,83 \text{ кН};$$

$$M_{(z_4)} = R_A \cdot z_4 - F(z_4 - 0,2); \quad z_4 = 0,2; \quad M_{(z_4)} = 60,83 \cdot 0,2 = 12,17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_4 = 0,5; \quad M_{(z_4)} = 60,83 \cdot 0,5 - 50(0,5 - 0,2) = 15,42 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для участка  $0,5 \leq z_5 \leq 0,6$ :

$$Q_{(z_5)} = R_A - F = 60,83 - 50 = 10,83 \text{ кН};$$

$$M_{(z_5)} = R_A \cdot z_2 - F(z_2 - 0,2) - m;$$

$$z_2 = 0,5; \quad M_{(z_2)} = 60,83 \cdot 0,5 - 50(0,5 - 0,2) - 20 = -4,59 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 0,6; \quad M_{(z_2)} = 60,83 \cdot 0,6 - 50(0,6 - 0,2) - 20 = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, которые приведены на рис. 3.14.

### 3.6. Нормальные напряжения при изгибе прямого стержня, состоящего из двух неоднородных материалов

Чтобы упростить решение задачи, рассмотрим наиболее простой случай изгиба, который называется чистым изгибом. Под чистым изгибом понимают такой вид нагружения балки или участка балки, когда в поперечных сечениях возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. В соответствии с выражением (3.12) изгибающие моменты имеют постоянное значение  $M = \text{const}$  на таком участке балки. На рис. 3.15 схематически показана консольная балка, подвергаемая воздействию чистого изгиба.

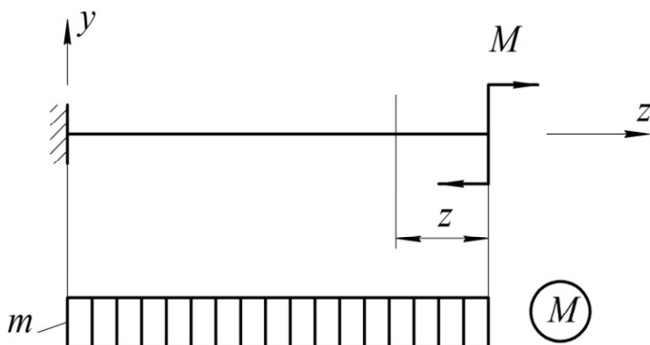


Рис. 3.15. Схема нагружения консольной балки и эпюра изгибающих моментов

В качестве стержня консольной балки возьмем стержень прямоугоньного поперечного сечения, составленный из двух неоднородных материалов, прочно соединенных между собой по длине. В качестве соединения можно использовать склеивание их между собой, сварку взрывом металлических стержней и многие другие способы. Пусть материалы стержней отличаются друг от друга модулями продольной упругости и при этом  $E_1 > E_2$ .

Из балки после ее деформации выделим двумя сечениями, перпендикулярными к оси балки, элемент, длина которого до деформации была равной  $dz$  (рис. 3.16). Так как в любом сечении балки возникает один и тот же изгибающий момент, то изменение кривизны для всех участков балки будет одним и тем же. Поэтому ось стержня будет иметь форму дуги окружности.

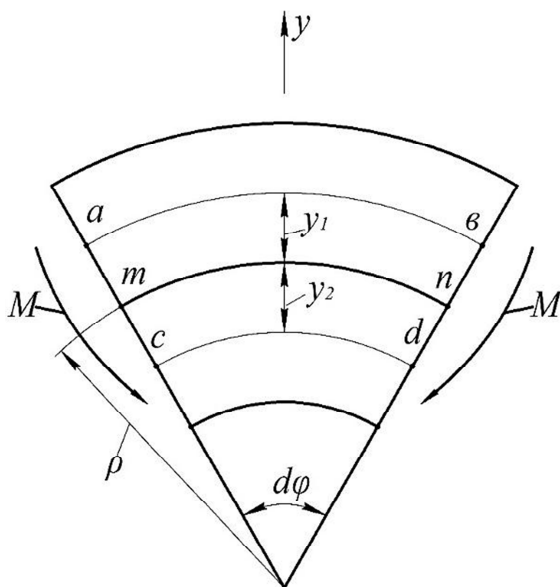


Рис. 3.16. Схема деформации участка балки при чистом изгибе

При деформации чистого изгиба следует помнить гипотезу Бернулли или гипотезу плоских сечений, которая утверждает, что плоское сечение до деформации останется плоским и после деформации. Под воздействием изгибающего момента верхние волокна на вы-

пуклой стороне участка балки подвергаются растяжению, а на вогнутой – сжатию. Очевидно, существует слой, в котором удлинения или укорочения волокон отсутствуют. Такой слой называют нейтральным слоем. Примем, что нейтральный слой проходит по границе раздела разнородных материалов. Радиус кривизны нейтрального слоя  $mn$  обозначим  $\rho$ .

Относительное удлинение волокна  $av$  будет равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{av - mn}{mn} = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}. \quad (3.14)$$

Относительное укорочение волокна  $cd$  равно:

$$\varepsilon_2 = \frac{cd - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_2)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_2}{\rho}. \quad (3.15)$$

Так как в сечениях стержня нет касательных напряжений, которые вызываются поперечными силами  $Q$ , то продольные волокна находятся в состоянии простого растяжения или сжатия, а надавливание волокон друг на друга отсутствует. В соответствии с законом Гука при растяжении или сжатии (1.8) в материалах стержня будут возникать нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1; \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2. \quad (3.16)$$

Подставив в формулы для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в соответствии с формулами (3.14) и (3.15), получаем:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_2 = -E_2 \frac{y_2}{\rho}. \quad (3.17)$$

Формулы (3.17) устанавливают закон изменения нормальных напряжений по высоте сечения балки. На рис. 3.17, *а* показано поперечное сечение балки, а на рис. 3.17, *б* распределение нормальных напряжений по высоте сечения.

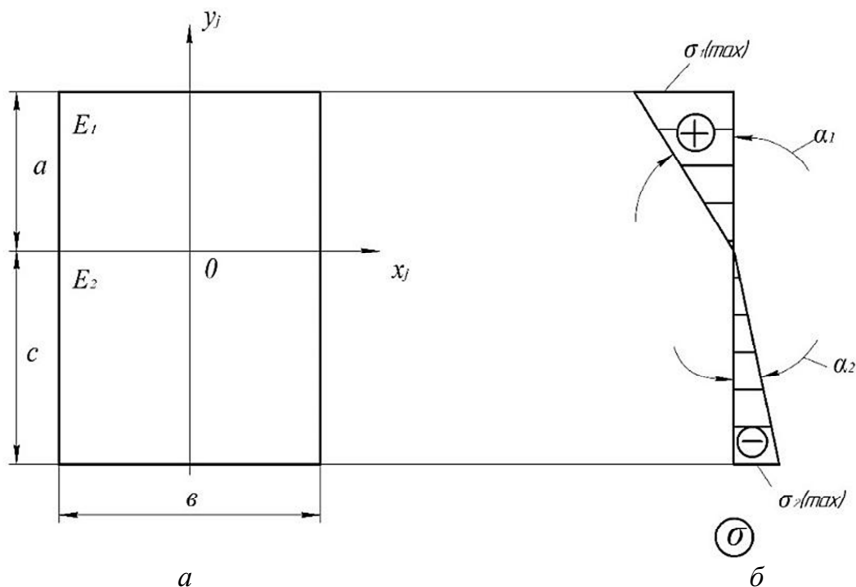


Рис. 3.17. Поперечное сечение: *a* – сечение из двух разнородных материалов; *б* – эпюра нормальных напряжений по высоте сечения

Согласно формулам (3.17) нормальные напряжения изменяются по линейному закону и достигают максимальных значений в наиболее удаленных точках от нейтральной линии. На нейтральной линии они равны нулю. Угол  $\alpha_1$ , определяющий наклон линии изменения  $\sigma_1$  относительно вертикальной оси, будет больше угла  $\alpha_2$ , который определяет наклон линии изменения  $\sigma_2$  относительно вертикальной оси. Это связано с тем, что при выводе формул (3.17) было принято неравенство  $E_1 > E_2$ .

Для того чтобы нейтральный слой проходил через соединения двух материалов балки, необходимо определить соотношение между высотами отдельных частей поперечного сечения. Свяжем нормальные напряжения  $\sigma$  с продольной внутренней силой  $N$ . При чистом изгибе  $N = 0$ , а сумма элементарных площадок  $\sigma \cdot dA$  дает продольную силу  $N$ . Поэтому:

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA_1 + \int_{A_2} \sigma_2 dA_2 = 0.$$

Подставив в полученное выражение для внутренней силы  $N$  величины для нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  из (3.17), получим:

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1 dA_1 - \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2 dA_2 = 0. \quad (3.18)$$

В выражении (3.18) интегралы представляют статические моменты площадей частей сечения, относительно нейтральной оси  $x_j$ . Из этого вытекает равенство статических моментов жесткостей сечения:

$$E_1 s_{x_1} = E_2 s_{x_2}. \quad (3.19)$$

Из приведенного равенства (3.19) следует, что нейтральный слой совпадает с осью центральной жесткости, то есть проходит через центр жесткости сечения.

Статические моменты площадей относительно нейтральной оси  $x_j$  будут равны:

$$s_{x_1} = A_1 \frac{a}{2} = \epsilon \cdot a \frac{a}{2} = \epsilon \frac{a^2}{2}; \quad s_{x_2} = A_2 \cdot \frac{c}{2} = \epsilon \cdot c \frac{c}{2} = \epsilon \frac{c^2}{2}.$$

Подставив полученные значения для  $s_{x_1}$  и  $s_{x_2}$  в равенство (3.19), получим следующее соотношение между высотами отдельных частей сечения:

$$c = a \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad \text{или} \quad a = c \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}. \quad (3.20)$$

Данные соотношения позволяют определить величину высоты части сечения  $a$  при известной высоте  $c$  и наоборот.

Рассмотрим часть участка консольной балки длиной  $z$ , как показано на рис. 3.15. Схематически данный участок балки приведен на рис. 3.18.

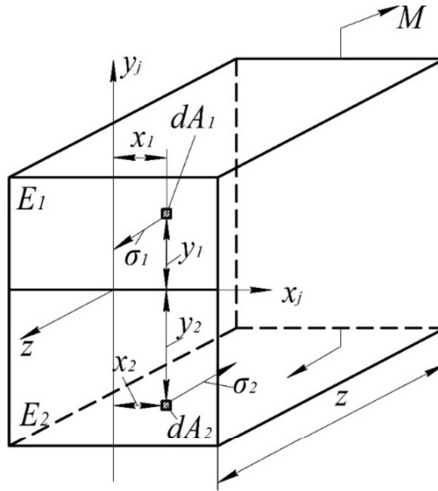


Рис. 3.18. Схема действия внутренних и внешних сил на отсеченную часть балки

Изгибающий момент  $M$  действует в плоскости  $yoz$  и не действует в плоскости  $uox$ . При указанном условии момент элементарных сил на площадке  $dA$  относительно оси  $y_j$  равен нулю, а относительно оси  $x_j$  – изгибающему моменту  $M$ . В этом случае получим:

$$M(y) = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot x_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot x_2 \cdot dA_2 = 0; \quad (3.21)$$

$$M(x) = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot y_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot y_2 \cdot dA_2 = M. \quad (3.22)$$

Подставив в полученные уравнения значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  из выражений (3.17), получим:

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 = 0; \quad (3.23)$$

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 dA_2 = M. \quad (3.24)$$



Интегралы, входящие в уравнение (3.23), представляют центробежные моменты инерции, а в уравнении (3.24) – осевые моменты инерции частей сечения относительно осей центральной жесткости. Поэтому формулы (3.23) и (3.24) можно представить:

$$E_1 J_{x_1 y_1} + E_2 J_{x_2 y_2} = (EJ_x)_{\text{пр}} = 0; \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\rho} (E_1 J_{x_1} + E_2 J_{x_2}) = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}}}{\rho} = M. \quad (3.26)$$

Равенство (3.25) показывает, что оси  $x_j$  и  $y_j$  являются главными осями центральной жесткости. Из этого следует, что для плоского изгиба силовая плоскость должна совпадать с одной из главных осей центральной жесткости, а нейтральный слой проходит через вторую главную ось центральной жесткости сечения. Таким образом, уравнения (3.19) и (3.25) полностью определяют положение главных осей центральной жесткости такого сечения.

Из уравнения (3.26) следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.27)$$

Подставив (3.27) в (3.17), окончательно получим:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_2. \quad (3.28)$$

Полученные формулы (3.28) позволяют определять нормальные напряжения при изгибе в любой точке поперечного сечения с различной жесткостью частей сечения.

Рассмотрим второй случай чистого изгиба консольной балки, показанной схематически на рис. 3.15.

Для исследования распределения нормальных напряжений возьмем стержень прямоугольного поперечного сечения, у которого высоты отдельных частей сечения из неоднородных материалов будут

равны. Как и в первом случае, модули продольной упругости материалов стержня будут соответствовать неравенству  $E_1 > E_2$ . На основании полученных уравнений (3.20) можно утверждать, что нейтральная ось сместится в сторону материала с большим значением модуля продольной упругости  $E_1$  (рис. 3.19, а).

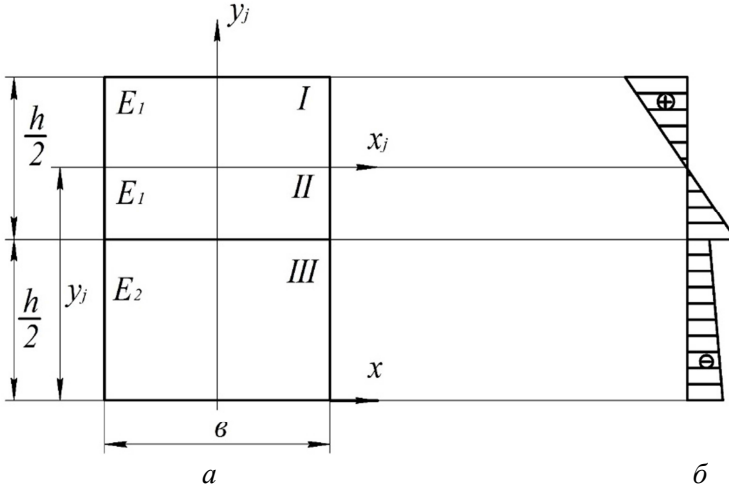


Рис. 3.19. Поперечное сечение: а – сечение из двух разнородных материалов; б – эпюра нормальных напряжений по высоте сечения

Ось  $y_j$  является осью симметрии для обеих частей сечения, поэтому она является главной осью центральной жесткости сечения. Для получения деформации плоского изгиба необходимо, чтобы через ось  $y_j$  проходила силовая плоскость.

Нейтральная ось будет совпадать с осью  $x_j$ , проходящей через центр жесткости сечения, и она будет также главной осью центральной жесткости сечения. Используя уравнения (2.16), определим координату этой оси относительно оси  $x$ :

$$y_j = \frac{(Es_x)_{\text{пр}}}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} = \frac{E_1 \cdot \sigma \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{3}{4} h + E_2 \cdot \sigma \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{E_1 \cdot \sigma \cdot \frac{h}{2} + E_2 \cdot \sigma \cdot \frac{h}{2}} = \frac{3E_1 + E_2}{4(E_1 + E_2)} h.$$

Главная ось центральной жесткости  $x_j$  делит сечение на три части.

Выделим из балки после ее деформации двумя сечениями, перпендикулярными к оси балки, элемент, длина которого до деформации была равной  $dz$ . В результате деформации этого участка под действием изгибающего момента  $M$  нейтральный слой  $mn$  образует часть дуги окружности (рис. 3.20). Верхние волокна такого элемента относительно нейтрального слоя удлинятся, а нижние – укоротятся.

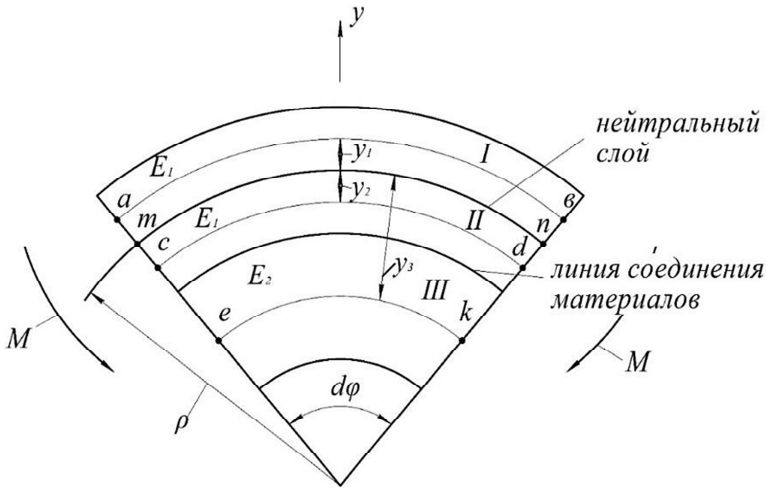


Рис. 3.20. Схема деформации участка балки при чистом изгибе

Относительное удлинение волокна  $ab$  будет равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{ab - mn}{mn} = \frac{(\rho + y_1)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}. \quad (3.29)$$

Относительное укорочение волокон  $cd$  и  $ek$  будут соответственно равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{cd - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_2)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_2}{\rho}; \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{ek - mn}{mn} = \frac{(\rho - y_3)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y_3}{\rho}. \quad (3.31)$$

В соответствии с законом Гука (1.8) нормальные напряжения в отдельных частях поперечного сечения будут равны:

$$\sigma_1 = E_1 \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_2 = -E_1 \frac{y_2}{\rho}; \quad \sigma_3 = -E_2 \frac{y_3}{\rho}. \quad (3.32)$$

В соответствии с формулами (3.32) закон изменения нормальных напряжений по высоте данного сечения приведен на рис. 3.19. Нормальные напряжения изменяются по линейному закону и достигают максимальных значений в наиболее удаленных зонах от нейтральной линии. В зоне соединения двух неоднородных материалов эпюра напряжений терпит разрыв.

Из условий статического равновесия можно представить следующее равенство:

$$\frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + \frac{E_1}{\rho} \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_3} y_3^2 dA_3 = M. \quad (3.33)$$

Интегралы, входящие в уравнения (3.33), представляют собой осевые моменты инерции частей сечения относительно нейтральной оси  $x_j$ , а поэтому:

$$\frac{1}{\rho} (E_1 J_{x_1} + E_1 J_{x_2} + E_2 J_{x_3}) = \frac{(EJ_x)_{\text{пр}}}{\rho} = M. \quad (3.34)$$

Из уравнения (3.34) следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.35)$$

Подставив выражение (3.35) в уравнения (3.32) получим:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_2; \quad \sigma_3 = -\frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_3. \quad (3.36)$$

Когда стержень состоит из  $n$  прочно соединенных между собой стержней, которые отличаются модулями продольной упругости, формулу для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_i = \frac{E_i \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot y_i, \quad (3.37)$$

где  $E_i$  – модуль продольной упругости части сечения, в которой определяют величину нормального напряжения;

$y_i$  – координата точки, в которой определяют напряжение, она должна находиться в той части сечения, которой соответствует  $E_i$ .

Полученное уравнение (3.37) позволяет определять нормальные напряжения для сложных сечений из неоднородных материалов. Нормальные напряжения будут положительны, если рассматриваемые волокна относительно нейтрального слоя подвергаются растяжению, и отрицательны, если сжатию.

### 3.7. Касательные напряжения при поперечном изгибе

В большинстве случаев изгиб балки сопровождается возникновением в поперечных сечениях не только изгибающих моментов, но и поперечных сил. Такой вид изгиба называют поперечным. Поперечная сила  $Q$  представляет собой равнодействующую распределенных сил, действующих в плоскости сечения. Элементарные силы в плоскости сечения называются касательными напряжениями.

Исследуем распределение касательных напряжений по высоте сечения при поперечном изгибе балки прямоугольного поперечного сечения. На рис. 3.21, *а* показана схема нагружения консольной балки, эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ . На рис. 3.21, *б* показано прямоугольное поперечное сечение этой балки.

Балка состоит из двух прочно соединенных между собой стержней из различных материалов одинаковых высот  $\frac{h}{2}$ , при этом модули продольной упругости соответствуют неравенству  $E_1 > E_2$ . В соответствии с уравнениями (3.20) нейтральный слой сместится в область материала с большим значением модуля упругости  $E_1$ .

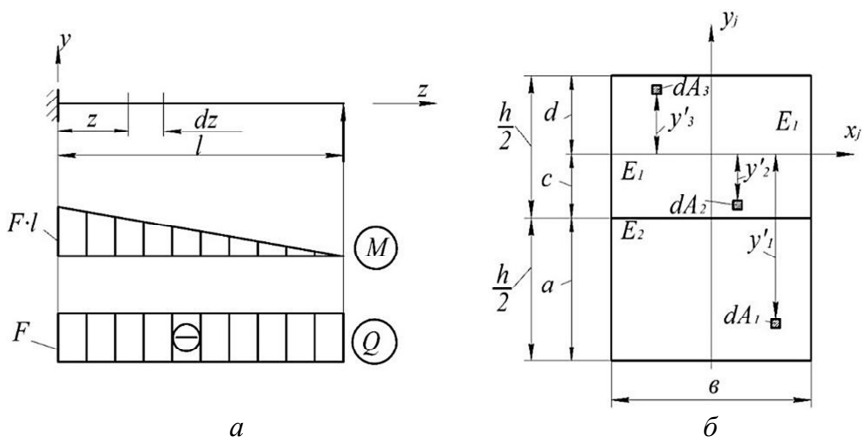


Рис. 3.21. Схема балки: *a* – схема нагружения и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил; *б* – поперечное сечение из двух разнородных материалов

Выделим из балки элемент бесконечно малой длины  $dz$  и рассмотрим внутренние силы, возникающие в левой и правой частях сечений (рис. 3.22, *a*). При поперечном изгибе изгибающие моменты по длине балки изменяются, и в левой части сечения они будут больше, чем в правой, на величину  $dM$ . На рис. 3.22, *б* показано распределение нормальных напряжений по левой и правой частям сечений.

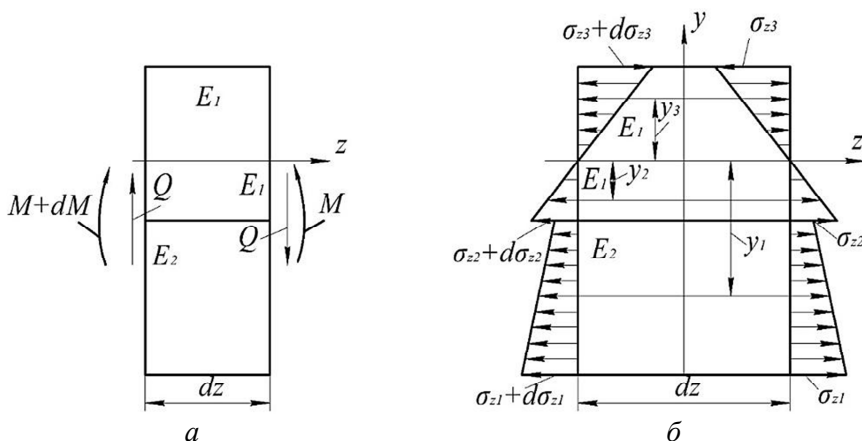


Рис. 3.22. Элемент балки: *a* – внутренние силы, действующие в сечении; *б* – эпюра нормальных напряжений по высоте сечения

Продольным горизонтальным сечением на расстоянии  $y_1$  от нейтрального слоя (рис. 3.22, б) разделим элемент на две части и рассмотрим условие равновесия нижней части сечения (рис. 3.23). При этом следует учитывать, что по закону парности касательные напряжения будут действовать не только в поперечных сечениях, но и в продольных.

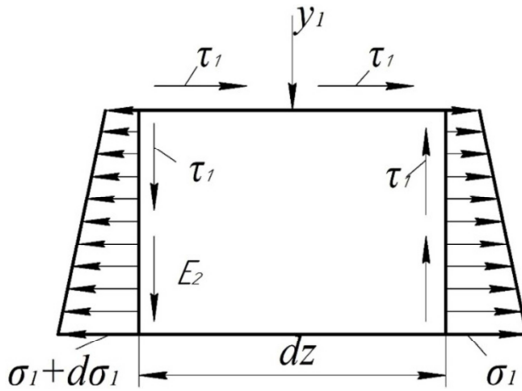


Рис. 3.23. Схема равновесия нижней части балки

Равнодействующая нормальных напряжений в правой части рассматриваемого элемента будет равна:

$$N_1 = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot dA_1.$$

Подставив в полученное выражение значение для  $\sigma_1$  и используя формулу (3.37), будем иметь:

$$N_1 = \frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр } A_1}} \int y'_1 \cdot dA_1. \quad (3.38)$$

Через  $y'_1$  обозначена координата бесконечно малой площади  $dA_1$  в части сечения с модулем упругости  $E_2$  (рис. 3.21, б). Полученный интеграл представляет собой статический момент относительно нейт-

ральной оси  $x_j$  части площади сечения, находящейся ниже уровня  $y_1$  (рис. 3.22, б, 3.23). Обозначим этот статический момент через  $s_{x_1}^0$ .

Тогда:

$$N_1 = \frac{M \cdot E_2 \cdot s_{x_1}^0}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.39)$$

В левом сечении равнодействующая нормальных напряжений может быть представлена в виде:

$$N_1 + dN_1 = \frac{(M + dM) \cdot E_2 s_{x_1}^0}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.40)$$

Уравнение равновесия для выделенного элемента может быть представлено следующим равенством:

$$N_1 + \tau_1 \cdot \sigma \cdot dz - (N_1 + dN_1) = 0. \quad (3.41)$$

После подстановки уравнений (3.39) и (3.40) в уравнение (3.41) получим следующее равенство:

$$\tau_1 \cdot \sigma \cdot dz = \frac{dM \cdot E_2 \cdot s_{x_1}^0}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.42)$$

Используя дифференциальную зависимость  $Q = \frac{dM}{dz}$  и разделив левую и правую части уравнения (3.42) на произведения  $\sigma \cdot dz$ , получим:

$$\tau_1 = \frac{Q \cdot E_2 s_{x_1}^0}{\sigma (EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.43)$$

В соответствии с данными, приведенными на рис. 3.21, статический момент части площади сечения  $s_{x_1}^0$  определяют из выражения:



$$s_{x_1}^0 = \epsilon \left[ (a+c) - y_1 \right] \frac{\left[ (a+c) - y_1 \right]}{2} = \epsilon \frac{\left[ (a+c)^2 - y_1^2 \right]}{2}.$$

Так как переменная  $y_1$  входит в уравнение для  $s_{x_1}^0$  во второй степени, то касательные напряжения по высоте сечения изменяются по параболическому закону.

Продольным горизонтальным сечением на расстоянии  $y_2$  от нейтрального слоя (рис. 3.22, б) разделим элемент на две части и рассмотрим условие равновесия нижней части сечения (рис. 3.24).

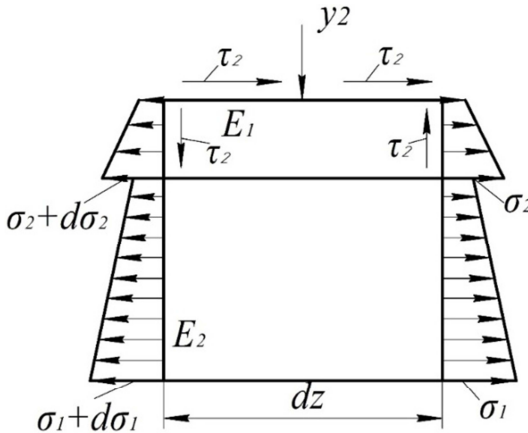


Рис. 3.24. Схема равновесия нижней части балки из двух разнородных материалов

Равнодействующая нормальных напряжений в правом сечении будет равна:

$$N_1 + N_2 = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot dA_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot dA_2.$$

Подставив в полученное равенство значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , в соответствии с формулой (3.37) будем иметь:

$$N_1 + N_2 = \frac{M \cdot E_2}{(EJ_x)_{\text{пр } A_1}} \int_{A_1} y_1' dA_1 + \frac{M \cdot E_1}{(EJ_x)_{\text{пр } A_2}} \int_{A_2} y_2' dA_2. \quad (3.44)$$

Координата  $y'_2$  бесконечно малой площади  $dA_2$  находится в части площади сечения с модулем упругости  $E_1$  (рис. 3.21, б). С учетом того, что интегралы представляют собой статические моменты относительно нейтральной оси  $x_j$ , последнюю формулу (3.44) можно преобразовать к виду:

$$N_1 + N_2 = \frac{M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \left( E_2 s_{x_1}^0 + E_1 s_{x_2}^0 \right) = \frac{M (Es_x^0)_{\text{пр}}}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.45)$$

В левом сечении элемента равнодействующая нормальных напряжений будет равна:

$$(N_1 + dN_1) + (N_2 + dN_2) = \frac{(M + dM)(Es_x^0)_{\text{пр}}}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.46)$$

Составляя для выделенного элемента (рис. 3.24) уравнение равновесия как сумму сил на ось  $z$ , получим:

$$N_1 + N_2 - [(N_1 + dN_1) + (N_2 + dN_2)] + \tau_2 \cdot \sigma \cdot dz = 0. \quad (3.47)$$

После подстановки уравнений (3.45) и (3.46) в уравнение (3.47) будем иметь равенство:

$$\tau_2 \cdot \sigma \cdot dz = \frac{dM (Es_x^0)_{\text{пр}}}{(EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.48)$$

Разделив левую и правую части уравнения (3.48) на произведение  $\sigma \cdot dz$  и используя дифференциальную зависимость  $Q = \frac{dM}{dz}$ , получим:

$$\tau_2 = \frac{Q (Es_x^0)_{\text{пр}}}{\sigma \cdot (EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.49)$$

Для получения формулы, определяющей изменения касательных напряжений  $\tau_3$  в верхней части сечения, продольным сечением на расстоянии  $u_3$  от нейтрального слоя рассечем элемент на две части (рис. 3.22, б). Аналогично, как и для напряжения  $\tau_1$ , рассматривая условие равновесия отсеченной верхней части элемента, получим:

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot E_1 \cdot s_{x_3}^0}{\varrho \cdot (EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.50)$$

На основании полученных результатов по определению касательных напряжений  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  можно предложить общую формулу по определению касательных напряжений для балки, состоящей из прочно соединенных между собой стержней из различных материалов:

$$\tau = \frac{Q \cdot (Es_x^0)_{\text{пр}}}{\varrho (EJ_x)_{\text{пр}}}. \quad (3.51)$$

Приведенный статический момент жесткости части сечения  $(Es_x^0)_{\text{пр}}$  определяют относительно нейтральной оси для той части сечения, которая находится выше или ниже точки, в которой вычисляют величину касательных напряжений. Максимальные касательные напряжения возникают в зоне нейтральной линии. Эпюра распределения касательных напряжений по высоте сечения приведена на рис. 3.25, б.

Полученное выражение (3.51) позволяет вычислить величину касательных напряжений в поперечных сечениях балки. Однако в силу парности касательных напряжений такие же по величине касательные напряжения будут действовать и в продольных сечениях. Зависимость изменения касательных напряжений от координаты  $u$  в сечении определяется через приведенный статический момент жесткости сечения  $(Es_x^0)_{\text{пр}}$ . У края кромок напряжения равны нулю и до-

стигают максимума на нейтральном слое. Главная ось центральной жесткости  $x_j$  при поперечном изгибе совпадает с нейтральной осью и делит сечение на две части с одинаковой жесткостью частей сечения. Это означает, что эпюра касательных напряжений описывается плавной параболической кривой без разрывов.

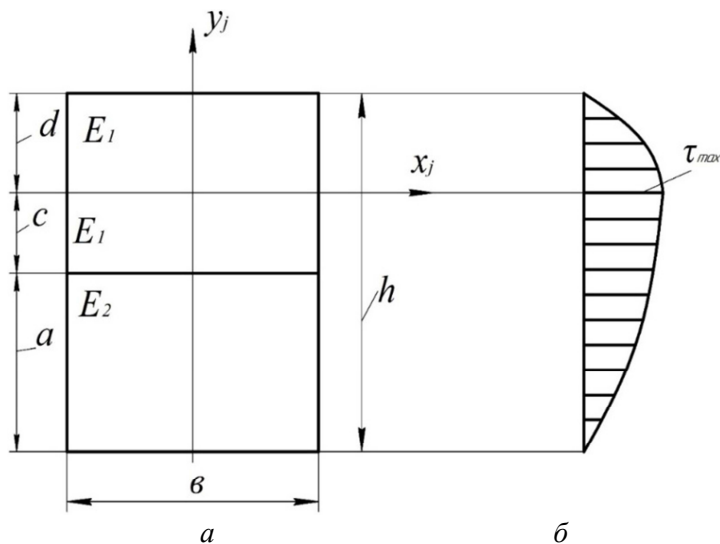


Рис. 3.25. Сечение балки: *a* – сечение из двух разнородных материалов; *б* – эпюра касательных напряжений по высоте сечения

**Пример.** Построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения для консольной балки, состоящей из прочно соединенных между собой стального и алюминиевого стержней. Подобрать высоту алюминиевого стержня таким образом, чтобы нейтральный слой проходил по границе соединения стержней. Принять ширину сечения  $b = 40$  мм, а высоту стальной части поперечного сечения  $a = 50$  мм. Модуль упругости стали  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, алюминия –  $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$  МПа.

Схема нагружения консольной балки и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил приведены на рис. 3.26, *a*, а поперечное сечение – на рис. 3.26, *б*.

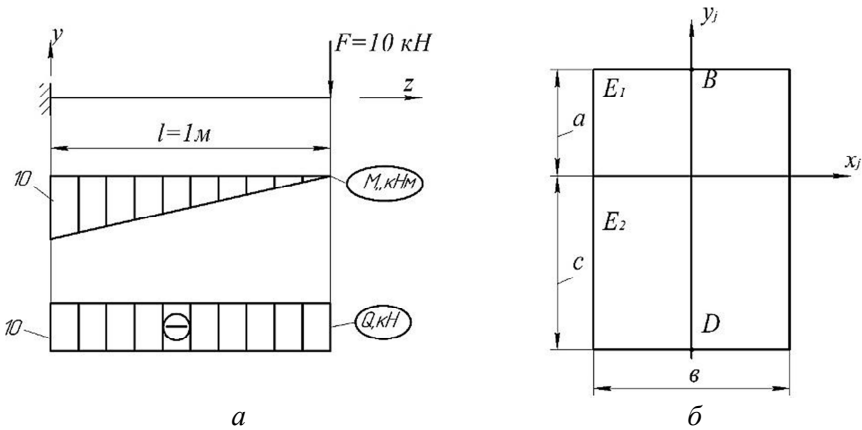


Рис. 3.26. Консольная балка: *a* – схема нагружения и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил; *б* – поперечное сечение из двух разнородных материалов

Используя формулу (3.20), определим высоту алюминиевой части поперечного сечения *c* таким образом, чтобы нейтральный слой пересекал главную ось центральной жесткости  $x_j$ :

$$c = a \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = 50 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{0,7 \cdot 10^5}} = 84,52 \text{ мм.}$$

Приведенная жесткость сечения  $(EJ_x)_{\text{пр}}$  относительно нейтральной оси  $x_j$  в соответствии с формулой (2.37) будет равна:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_1 A_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + E_2 J_{x_2} + E_2 A_2 \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

или

$$\begin{aligned} (EJ_x)_{\text{пр}} &= E_1 \left[ \frac{6a^3}{12} + \epsilon \cdot a \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] + E_2 \left[ \frac{6c^3}{12} + \epsilon \cdot c \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] = \\ &= 2 \cdot 10^5 \left[ \frac{40 \cdot 50^3}{12} + 40 \cdot 50 \left(\frac{50}{2}\right)^2 \right] + \\ &+ 0,7 \cdot 10^5 \left[ \frac{40 \cdot 84,52^3}{12} + 40 \cdot 84,52 \left(\frac{84,52}{2}\right)^2 \right] = 8\,968\,610 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2. \end{aligned}$$

Для определения нормальных напряжений в наиболее удаленных точках  $B$  и  $D$  от нейтральной оси, воспользуемся формулой (3.37):

$$\sigma_B = \frac{E_1 \cdot M_{\max}}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot a = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^6}{8\,968\,610 \cdot 10^5} \cdot 50 = 111,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\frac{E_2 \cdot M_{\max}}{(EJ_x)_{\text{пр}}} \cdot c = -\frac{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^6}{8\,968\,610 \cdot 10^5} \cdot 84,52 = -65,97 \text{ МПа}.$$

По полученным данным на рис. 3.27, б показано распределение нормальных напряжений по высоте сечения.

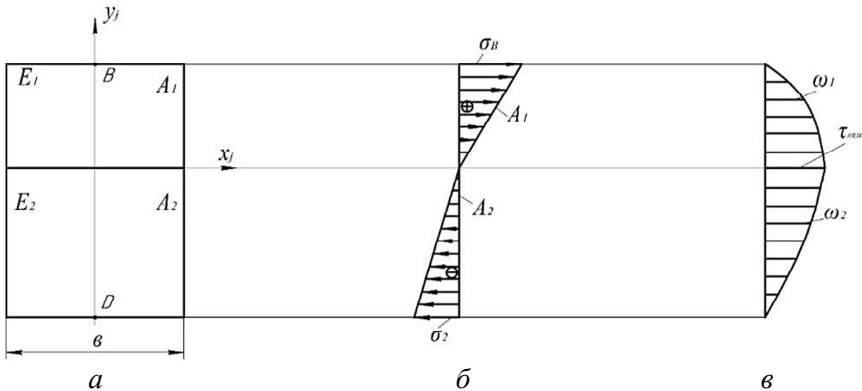


Рис. 3.27. Схема сечения:  $a$  – сечение из двух разнородных материалов;  $b$  – эпюра нормальных напряжений;  $c$  – эпюра касательных напряжений

Для условия статического равновесия изгибающий момент в защемлении от действия силы  $F$  должен быть равным равнодействующему моменту от нормальных напряжений. Равнодействующий момент от нормальных напряжений получим следующим образом:

$$M = A_1 \cdot \sigma_B \cdot \frac{2}{3}a + A_2 \cdot \sigma_D \cdot \frac{2}{3}c = \frac{1}{2} \sigma_B \cdot a \cdot \sigma_B \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \sigma_D \cdot c \cdot \sigma_D \cdot \frac{2}{3}c$$

или

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} 111,5 \cdot 50 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 + \frac{1}{2} 65,97 \cdot 84,52 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 84,52 = \\ &= 10,0002 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 10,0002 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Полученное значение изгибающего момента от действия нормальных напряжений равно изгибающему моменту от внешней силы  $F$ , что подтверждает точность распределения этих напряжений по высоте сечения.

Определим статический момент жесткости сечения высотой  $a$  относительно оси  $x_j$ , используя формулу (2.10):

$$E_1 s_{x_1}^0 = E_1 A_1 \cdot \frac{a}{2} = E_1 \cdot \vartheta \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 2,0 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \frac{50}{2} = 1 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Определим статический момент жесткости сечения высотой  $c$  относительно нейтральной оси  $x_j$ :

$$\begin{aligned} E_2 s_{x_2}^0 &= E_2 A_2 \cdot \frac{c}{2} = E_2 \cdot \vartheta \cdot c \cdot \frac{c}{2} = 0,7 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 84,52 \cdot \frac{84,52}{2} = \\ &= 1 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}. \end{aligned}$$

Проведенные расчеты устанавливают, что при таком соотношении высот для стальной и алюминиевой частей стержня приведенные статические моменты жесткости верхней и нижней частей сечения относительно оси  $x_j$  будут равны.

Используя формулу (3.51), определим величину максимальных касательных напряжений на нейтральной оси  $x_j$ :

$$\tau_{\max} = \frac{Q(Es_{x_1}^0)_{\text{пр}}}{\vartheta(EJ_x)_{\text{пр}}} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{10}}{40 \cdot 8\,968\,610 \cdot 10^5} = 2,7875 \text{ МПа}.$$

Эпюра распределения касательных напряжений по высоте сечения показана на рис. 3.27, в.

Для условия статического равновесия необходимо, чтобы равнодействующая касательных напряжений, действующая в плоскости поперечного сечения, была равна поперечной силе  $F$ . Равнодействующую касательных напряжений определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= \omega_1 \vartheta + \omega_2 \vartheta = \frac{2}{3} \tau_{\max} \cdot a \cdot \vartheta + \frac{2}{3} \tau_{\max} \cdot c \cdot \vartheta; \\ Q &= \frac{2}{3} \cdot 2,7875 \cdot 50 \cdot 40 + \frac{2}{3} \cdot 2,7875 \cdot 84,52 \cdot 40 = 10 \cdot 10^3 \text{ Н} = 10 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проведенная проверка полностью подтверждает правильность показанного распределения касательных напряжений по высоте сечения.

**Пример.** Двухопорная железобетонная балка нагружена сосредоточенной силой  $F = 70 \text{ кН}$ . Исследовать распределение нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений по высоте сечения балки в зоне приложения нагрузки  $F$ . Схема нагружения балки и эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  показаны на рис. 3.28, а. Поперечное сечение приведено на рис. 3.28, б. Принять модуль упругости бетона равным  $E_1 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , модуль упругости стали  $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

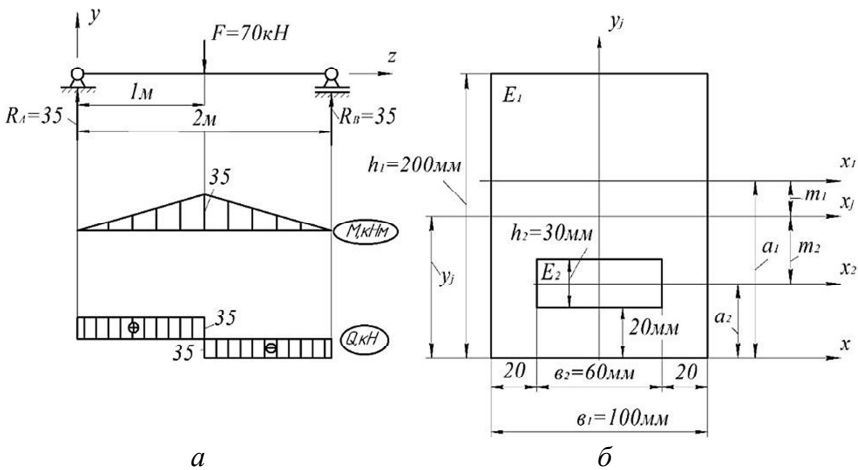


Рис. 3.28. Схема двухопорной балки: а – схема нагружения и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил; б – поперечное сечение балки

Ось  $y_j$  является осью симметрии, и поэтому она является главной осью центральной жесткости сечения. Определим положение второй главной оси центральной жесткости  $x_j$  приняв за ось отсчета ось  $x$ . Расстояния между осью  $x$  и центральными осями  $x_1$  и  $x_2$  будут равны:

$$a_1 = 100 \text{ мм}; \quad a_2 = 35 \text{ мм}.$$



В соответствии с формулой (2.16) получим следующее выражение для определения координаты  $y_j$ , определяющей положение оси  $x_j$ :

$$y_j = \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 - E_1 \cdot A_2 \cdot a_2 + E_2 \cdot A_2 \cdot a_2}{E_1 A_1 - E_1 A_2 + E_2 A_2} = \frac{E_1 \cdot \varrho_1 \cdot h_1 \cdot a_1 + (E_2 - E_1) \varrho_2 h_2 a_2}{E_1 \varrho_1 h_1 + (E_2 - E_1) \varrho_2 h_2}.$$

Подставив все числовые величины в последнее выражение, получим:

$$y_j = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 100 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30 \cdot 35}{0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30} = 70,91 \text{ мм.}$$

По полученному значению  $y_j$  на рис. 3.28, б представлено положение главной оси центральной жесткости  $x_j$ . При правильном определении положения оси  $x_j$  статический момент жесткости сечения относительно этой оси будет равен нулю. Определим расстояния  $m_1$  и  $m_2$  между осью  $x_j$  и центральными осями  $x_1$  и  $x_2$ :

$$m_1 = 29,09 \text{ мм}; \quad m_2 = -35,91 \text{ мм.}$$

Определяем статический момент жесткости сечения:

$$(Es_{x_j})_{\text{пр}} = E_1 A_1 m_1 - E_1 A_1 m_2 + E_2 A_2 m_2 = E_1 \varrho_1 h_1 m_1 + (E_2 - E_1) \varrho_2 h_2 m_2 s$$

или

$$\begin{aligned} (Es_{x_j})_{\text{пр}} &= 0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 29,09 + (2 \cdot 10^5 - 0,2 \cdot 10^5) \cdot 60 \cdot 30 (-35,91) = \\ &= 129,288 \cdot 10^5 - 129,277 \cdot 10^5 \approx 0. \end{aligned}$$

Проверкой установлено, что положение главной оси центральной жесткости  $x_j$  определено правильно.

На основании формулы (2.28) получим величину приведенной жесткости сечения  $(EJ_x)_{\text{пр}}$ :

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 J_{x_1} + E_1 A_1 m_1^2 - E_1 J_{x_2} - E_1 A_2 m_2^2 + E_2 J_{x_2} + E_2 A_2 m_2^2.$$

В расширенном виде последнее выражение может быть представлено:

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = E_1 \left[ \frac{\epsilon_1 h_1^3}{12} + \epsilon_1 h_1 m_1^2 - \frac{\epsilon_2 h_2^3}{12} - \epsilon_2 h_2 m_2^2 \right] + E_2 \left[ \frac{\epsilon_2 h_2^3}{12} + \epsilon_2 h_2 m_2^2 \right];$$

$$(EJ_x)_{\text{пр}} = 0,210^5 \left[ \frac{100 \cdot 200^3}{12} + 100 \cdot 200 \cdot 29,09^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{60 \cdot 30^3}{12} - 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] + 2 \cdot 10^5 \left[ \frac{60 \cdot 30^3}{12} + 60 \cdot 30(-35,91)^2 \right] =$$

$$= 2113,942 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

На рис. 3.29, *a* показано поперечное сечение балки точками *A*, *B*, *C* и *D* и указаны зоны, в которых следует определить величины нормальных напряжений для построения эпюры распределения напряжений по высоте сечения.

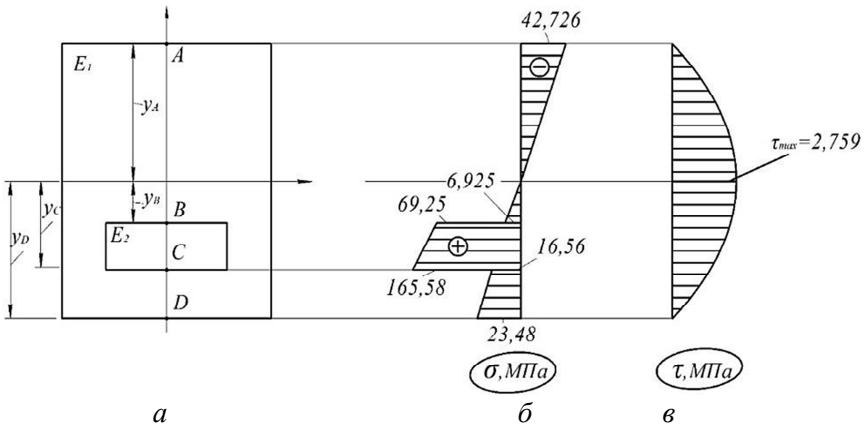


Рис. 3.29. Сечение балки: *a* – поперечное сечение; *б* – эпюра нормальных напряжений по высоте сечения; *в* – эпюра касательных напряжений по высоте сечения

Координаты соответствующих точек относительно оси  $x_j$  будут равны:

$$y_A = 129,09 \text{ мм}; y_B = 20,91 \text{ мм}; y_C = 50,91 \text{ мм}; y_D = 70,91 \text{ мм}.$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $A$ , используя формулу (3.37):

$$\sigma_A = -\frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_A = -\frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 129,09 = -42,726 \text{ МПа.}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $B$  в массе бетона:

$$\sigma_B = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 20,91 = 6,925 \text{ МПа.}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $B$  в массе стальной пластины:

$$\sigma_B = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_B = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942} \cdot 20,91 = 69,25 \text{ МПа.}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $C$  в массе стальной пластины:

$$\sigma_C = \frac{E_2 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 165,58 \text{ МПа.}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $C$  в массе бетона:

$$\sigma_C = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_C = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 50,91 = 16,56 \text{ МПа.}$$

Определяем величину нормального напряжения в точке  $D$ .

$$\sigma_D = \frac{E_1 \cdot M}{(EJ_x)_{\text{пр}}} y_D = \frac{0,2 \cdot 10^5 \cdot 35 \cdot 10^6}{2113,942 \cdot 10^9} \cdot 70,91 = 23,48 \text{ МПа.}$$

По полученным результатам построена эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения (рис. 3.29, б).

Для определения максимальных касательных напряжений на нейтральной оси  $x_j$  предварительно следует определить статический момент жесткости сечения  $(Es_{x_j}^0)_{\text{пр}}$ , лежащего выше оси  $x_j$ .

$$\begin{aligned}(Es_{x_j}^0)_{\text{пр}} &= E_1 \cdot A_1 \frac{y_A}{2} = E_1 \cdot e_1 \cdot y_A \cdot \frac{y_A}{2} = 0,2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 129,09 \frac{129,09}{2} = \\ &= 166\,642,281 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм}.\end{aligned}$$

Используя выражение (3.51), определим величину максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q(Es_{x_j}^0)_{\text{пр}}}{e(EJ_x)_{\text{пр}}} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 166\,642,281 \cdot 10^5}{100 \cdot 2113,942 \cdot 10^9} = 2,759 \text{ МПа}.$$

Эпюра распределения касательных напряжений по высоте сечения приведена на рис. 3.29, в.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для студентов / В. И. Феодосьев. – М. : МГТУ, 1999. – 588 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 6-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 2008. – 560 с : ил.
3. Кинасошвили, Р. С. Сопротивление материалов : учебник / Р. С. Кинасошвили. – 6-е изд., перераб. – М. : Физматгиз, 1960. – 388 с.
4. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка. – Киев : Вища школа, 1986. – С. 458–461.
5. Подскрепко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскрепко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с : ил.
6. Дудяк, А. И. Определение направления главных осей жесткости / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан // Инновации в машиностроении – 2015: материалы научно-технической конференции.
7. Дудяк, А. И. Геометрические характеристики плоских сечений / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан // Инновации в машиностроении – 2015: материалы научно-технической конференции.
8. Дудяк, А. И. Геометрические характеристики плоских сечений переменной жесткости / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2016. – Вып. 31. – С. 95–101.
9. Дудяк, А. И. Моменты инерции при повороте осей для сечения переменной жесткости / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2016. – Вып. 31. – С. 310–313.
10. Дудяк, А. И. Геометрические характеристики плоских сечений переменной жесткости : учебно-методическое пособие / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан. – Минск : БНТУ, 2018.
11. Дудяк, А. И. Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях балки при изгибе / А. И. Дудяк [и др.] // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 15-й Международной научно-технической конференции. – Минск, 2018. – Т. 3. – С. 225.

12. Дудяк, А. И. Упрощенная методика расчета системы стержней на прочность при осевом растяжении, сжатии / А. И. Дудяк [и др.] // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 15-й Международной научно-технической конференции. – Минск, 2018. – Т. 3. – С. 219.

13. Дудяк, А. И. Определение нормальных напряжений в стержне, состоящем из двух разнородных материалов / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан, П. А. Мелеховец // Перспективные направления развития технологий в машиностроении и металлообработке: материалы 34-й Международной научно-технической конференции». – Минск, 2019. – С. 71–74.

14. Дудяк, А. И. Определение жесткостей сечения стержня, состоящего из разнородных А материалов / А. И. Дудяк [и др.] // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2022. – Вып. 36. – С. 126.

15. Дудяк, А. И. Определение нормальных напряжений в стержне, состоящем из двух разнородных материалов / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан, П. А. Мелеховец // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2020. – Вып. 35. – С. 81.

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ .....	4
1.1. Внутренняя сила .....	4
1.2. Напряжения и деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука .....	5
1.3. Статически определимые и статически неопределимые системы .....	11
1.4. Испытание материалов на растяжение и сжатие .....	17
1.5. Допускаемые напряжения .....	24
1.6. Учет собственного веса при осевом растяжении или сжатии .....	26
1.7. Расчет стержня равного сопротивления .....	28
2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ .....	31
2.1. Статические моменты и центры тяжести .....	31
2.2. Статические моменты жесткости. Определение центра жесткости сечения .....	33
2.3. Моменты инерции плоских сечений .....	38
2.4. Приведенные жесткости сечения .....	42
2.5. Приведенные жесткости сечения относительно параллельных осей .....	45
2.6. Зависимости между жесткостями сечения при повороте координатных осей .....	48
2.7. Главные оси и главные приведенные жесткости сечения .....	52
3. ИЗГИБ .....	60
3.1. Типы опор балок .....	60
3.2. Определение реакций в опорах .....	61
3.3. Определение внутренних силовых факторов .....	64
3.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для простых случаев нагружения .....	67
3.5. Дифференциальные зависимости между силовыми факторами при изгибе балки .....	74
3.6. Нормальные напряжения при изгибе прямого стержня, состоящего из двух неоднородных материалов .....	79
3.7. Касательные напряжения при поперечном изгибе .....	89
ЛИТЕРАТУРА .....	105

Учебное издание

**ДУДЯК** Александр Иванович  
**ДИКАН** Жанна Геннадьевна  
**ВАСИЛЕВИЧ** Юрий Владимирович

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие  
по учебной дисциплине «Механика материалов»

Редактор *Н. А. Костешева*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 07.04.2023. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 3,93. Тираж 100. Заказ 746.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.