ЛИТЕРАТУРА

1. А.П. Томилов, М.Я.Фиошин, В.А. Смирнов. Электрохимический синтез органических веществ. Химия. 1976. 423 с. 2. Костюк Н.Н., Дик Т.А., Требников А.Г. Электрохимический способ получения летучих b-дикетонатов металлов // Материалы международной научно-технической конференции. Могилёв. 25–26 октября, 2001 г., с.107. 3. Костюк Н.Н., Дик Т.А., Требников А.Г. Установка для проведения термогравиметрических исследований. // Тезисы докладов III международной научно-технической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы физики". Саранск. 6–8 июня 2001 г., с.149. 4. Нейланд О.Я., Страдынь Я.П., Силиньш Э.А., Балоде Д.Р., Валтере С.П., Кадыш В.П., Калнинь С.В., Кампар В.Э., Мажейка И.Б., Тауре Л.Ф. Строение и таутомерные превращения b-дикарбонильных соединений. Рига. 1977. 448 с.

УДК 539.4

А.Е. Крушевский, В.Ф. Кондратюк

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВТУЛКИ ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ОТСУТСТВИЯ НАГРУЗКИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Белорусский национальный технический университет,
ОАО "Белгорхимпром"

Одна из главных задач расчета на виброустойчивость — определение собственных форм и полного или неполного спектра частот собственных колебаний детали. В настоящей статье представлена оригинальная методика составления дифференциального уравнения динамики втулки при осесимметричной деформации. Полученное уравнение может служить основанием для решения задачи о собственных колебаниях.

В качестве исходного используем вариационное уравнение равновесия элементарного слоя [1]:

$$\frac{d}{dz}\int_A (T\cdot\vec{e}_k)\cdot\delta\ \vec{u}dA-\int_A (T\cdot\cdot\delta\ E)dA+\int_A \left(\vec{K}-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\cdot\delta\ \vec{u}dA+$$

$$+\oint\frac{\vec{F}_n\cdot\delta\ \vec{u}dS}{\sqrt{1-n_k^2}}=0,$$

где T – тензор напряжений,

$\delta\vec{u}$ – вектор возможных перемещений ($\vec{u}$ – вектор перемещений),

$T \cdot\cdot \delta\ E$ – бискалярное произведение тензора напряжений на тензор возможной деформации,

$\vec{K}$ – вектор объемных сил,

ρ – плотность материала демпфера,

$\vec{F}_n$ – вектор поверхностных сил,

$\vec{e}_k$ – орт оси z,

n_k – проекция единичной внешней нормали на ось z;

$dA = rdrd\theta,\ dS = rd\theta.$

Упругие перемещения u, w в цилиндрических координатах по оси r (радиальные) и по оси z (вертикальные) строим с помощью степенных рядов:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} r(r^m - R_2^m)U_{m+1} + Cr,$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \{[\frac{(R_1^{m+1} - r^{m+1})}{m+1} - R_2^m(R_1 - r)]R_1 d_z U_{m+1} -$$

$$-\frac{1}{\gamma_2 d_z}[(\gamma m + \gamma + \gamma_2)R_1^m - 2(\gamma - 1)R_2^m]U_{m+1}\} - \frac{2(\gamma - 1)Cz}{\gamma_2} + D.$$

Можно привлечь неголономную связь:

$$G\sum_{m=1}^{\infty} [(\gamma m + \gamma + \gamma_2)(R_2^m - R_1^m) + \gamma_2 R_1(\frac{R_1^{m+1} - R_2^{m+1}}{m+1} -$$

$$-R_1 R_2^m + R_2^{m+1})d_z^2]U_{m+1} = \sigma_r /_{r=R_2}.$$

Здесь R_1, R_2 – внутренний и наружный диаметры демпфера;

$\gamma = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2 = \gamma - 2$, ν – коэффициент Пуассона,

G — модуль сдвига;

U_{m+1} – обобщенные перемещения;

C, D – постоянные; d_z, d_z^2 – дифференциальные операторы (первая и вторая производные по z); $\dfrac{1}{d_z}$ – интегральный оператор; σ_r – радиальное напряжение.

Если ограничиться двумя слагаемыми и исключить обобщенное перемещение U_3 с помощью неголономной связи, то получим следующие формулы для перемещений и напряжений.

$$u = r(r-R_2)\{\frac{\gamma_2 R_1(R-R_1)}{6}d_z^2[2(2R_2+R_1)-3(r+R_2)]+$$
$$+2(2\gamma-1)(R_1+R_2)-(3\gamma-2)(r+R_2)\}U_2;$$
$$w = R_1(R_1-r)\{-\frac{\gamma_2 R_1(R_2-R_1)(R_2-r)^2}{}d_z^3+$$
$$+d_z[(2\gamma-1)(R_1+R_2)(R_1+r-2R_2)-\frac{(3\gamma-2)}{3}(R_1^2+R_1 r+r^2-3R_2^2)\}U_2-$$
$$-\frac{R_1(R_2-R_1)}{3}(2R_2+R_1)d_z[(3\gamma-2)R_1-2(\gamma-1)R_2]U_2+$$
$$+R_1(R_2-R_1)[(2\gamma-1)R_1^2-(\gamma-1)R_2^2]d_z U_2-$$
$$-\frac{2(2\gamma-1)(R_1+R_2)}{\gamma_2 d_z}[(3\gamma-2)R_1-2(\gamma-1)R_2]U_2+$$
$$+\frac{2(3\gamma-2)}{\gamma_2 d_z}[(2\gamma-1)R_1^2-(\gamma-1)R_2^2]U_2;$$
$$\tau_{rz} = \frac{\gamma_2 G R_1(R_2-R_1)}{6}(r-R_1)(r-R_2)(2R_1+R_2-3r)d_z^3 U_2+$$
$$+(r-R_1)(r-R_2)[2(2\gamma-1)(R_1+R_2)-(3\gamma-2)(r+R_2)]d_z U_2;$$
$$\sigma_r = -\frac{\gamma_2}{6}GR_1^2(R_2-R_1)(R_1-r)(R_2-r)^2 d_z^4 U_2+$$
$$+\gamma_2 d_z^2\{R_1(R_1-r)[(2\gamma-1)(R_1+R_2)(R_1+r-2R_2)+$$
$$+\frac{(3\gamma-2)}{3}(R_2-R_1)(2R_2+R_1)]+\frac{R_1(2R_2+R_1)(R_2-R_1)}{3}(3\gamma-2)(r-R_1)-$$
$$-(2\gamma-1)R_1(R_2-R_1)(r^2R_1^2)\}U_2+2(2\gamma-1)(3\gamma-2)(r-R_1)(R_2-r)U_2;$$
$$\sigma_\theta = \sigma_r-\frac{\gamma_2}{3}R_1 r(R_2-R_1)d_z^2[2(2R_2+R_1)-$$
$$-3r]U_2-2r[(2\gamma-1)(R_1+R_2)-(3\gamma-2)r]U_2;$$
$$\sigma_z = \sigma_r+2(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial r}).$$

Полученные формулы точно выполняют условие отсутствия нагрузки на цилиндрических поверхностях:

При $r=R_1$ и $r=R_2$ $\tau_{rz}=0$, $\sigma_r=0$.

Возможные перемещения: $\delta u-r$, $\delta w-0$.

Вариационное уравнение при $\vec{K}=\vec{F}=0$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{-R_1}^{R_2}\tau_{rz}r^2dr-\int_{-R_1}^{R_2}(\sigma_r+\sigma_\theta)rdr-\rho\int_{-R_1}^{R_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}r^2dr=0.$$

В результате получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка.

$$A\frac{\partial^4 U_2}{\partial z^4}+B\frac{\partial^4 U_2}{\partial z^2\partial t^2}+C\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}+D\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}+EU_2=0;$$

$$A=\frac{\gamma_2 R_1(R_2-R_1)}{6}\int_{R_1}^{R_2}r(r-R_1)(r-R_2)(R_2r-3r^2+2R_1R_2)dr,$$

$$B=\frac{\gamma_2 R_1(R_2-R_1)\rho}{6G}\int_{R_1}^{R_2}r^3(r-R_2)[3(r+R_2)-2(2R_2+R_1)]dr,$$

$$C=\int_{R_1}^{R_2}\{r^2(r-R_1)(r-R_2)[2(2\gamma-1)(R_1+R_2)-(3\gamma-2)(r+R_2)]+$$

$$+2\gamma_2R_1(r-R_1)r[(2\gamma-1)(R_1+R_2)(R_1+r-2R_2)+$$

$$+\frac{(3\gamma-2)}{3}(R_2-R_1)(2R_2+R_1)]-\frac{2R_1}{3}(2R_2+R_1)(R_2-R_1)(3\gamma-2)r(r-R_1)+$$

$$+2(2\gamma-1)R_1(R_2-R_1)r(r^2-R_1^2)+\frac{\gamma_2R_1(R_2-R_1)r^2}{3}[(2R_2+R_1)-3r]\}dr,$$

$$D=-\frac{\rho}{G}\int_{R_1}^{R_2}r^3(r-R_2)[2(2\gamma-1)(R_1+R_2)-(3\gamma-2)(r+R_2)]dr,$$

$$E=4\int_{R_1}^{R_2}[(2\gamma-1)(3\gamma-2)r(r-R_1)(r-R_2)+$$

$$+(2\gamma-1)(R_1+R_2)r^2-(3\gamma-2)r^3]dr.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск: Наука и техника, 1967. — 228 с.