УДК 624.04

С. М. Босяков, О. Н. Скляр

УСТАНОВИВШИЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Белорусский государственный университет,
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Модель идеально-пластической среды в условиях плоской деформации, предложенная [1], отвечает сущности явлений в технологических задачах, где имеются значительные пластические деформации, а также в задачах о предельных нагрузках. Нестационарные процессы в такой среде с достаточной полнотой рассмотрены в [1] с позиций метода характеристик [2]. В данной работе проводится анализ волновых движений в идеально-пластической среде от кратковременного импульса, подчиняющейся условию пластичности Треска-Сен-Венана, на базе классического метода характеристик [3, 4].

Система динамических уравнений равновесия, описывающая неустановившиеся движения, имеет следующий вид [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\chi}{\partial x}-2\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\sin 2\beta-\frac{\partial\beta}{\partial y}\cos 2\beta\right)-\frac{\rho_0}{k}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{\rho_0 X}{k}=0,\\
\frac{\partial\chi}{\partial y}+2\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\cos 2\beta+\frac{\partial\beta}{\partial y}\sin 2\beta\right)-\frac{\rho_0}{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{\rho_0 Y}{k}=0,\\
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos 2\beta-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\sin 2\beta=0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где v_x, v_y — компоненты вектора скорости, $\chi=\left(\sigma_x+\sigma_y\right)/2k$ — функция напряжений, k — максимальное касательное напряжение, X, Y — проекции массовых сил на оси координат, ρ_0 — плотность, β — угол между положительным направлением оси x и направлением максимального главного напряжения (при $\beta=0$ оси координат совпадают с положением главных напряжений).

Зададим начальные данные Коши на гиперплоскости $Z(t,x,y)=0$ и перейдем к новым переменным $Z=Z(t,x,y)$, $Z_x=Z_x(t,x,y)$ и $Z_y=Z_y(t,x,y)$. Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным и подставим их в систему (1). После несложных преобразований получим:

$$\frac{\partial\chi}{\partial Z}p_1-2\left(p_1\sin 2\beta-p_2\cos 2\beta\right)\frac{\partial\beta}{\partial Z}-\frac{\rho_0}{k}\frac{\partial v_x}{\partial Z}\left(p_0+v_xp_1+v_yp_2\right)+\ldots=0,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial Z}+2\left(p_1\cos 2\beta+p_2\sin 2\beta\right)\frac{\partial\beta}{\partial Z}-\frac{\rho_0}{k}\frac{\partial v_y}{\partial Z}\left(p_0+v_xp_1+v_yp_2\right)+\ldots=0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial Z}p_1+\frac{\partial v_y}{\partial Z}p_2+\ldots=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial Z}\left(p_2\cos 2\beta-p_1\sin 2\beta\right)+\frac{\partial v_y}{\partial Z}\left(p_1\cos 2\beta+p_2\sin 2\beta\right)+\ldots=0,$$

где $p_0=\dfrac{\partial Z}{\partial t}$, $p_1=\dfrac{\partial Z}{\partial x}$, $p_2=\dfrac{\partial Z}{\partial y}$.

Уравнение характеристической гиперплоскости найдем, приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при частных производных от v_x, v_y, χ и β по Z:

$$\det\left\|\omega_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,4}}=0, \qquad (3)$$

$\omega_{11}=p_1$, $\omega_{22}=p_2$, $\omega_{33}=p_1$, $\omega_{34}=p_2$, $\omega_{12}=-2\left(p_1\sin 2\beta-p_2\cos 2\beta\right)$,
$\omega_{13}=\omega_{24}=-\left(p_0+v_xp_1+v_yp_2\right)\rho_0/k$, $\omega_{43}=p_2\cos 2\beta-p_1\sin 2\beta$,
$\omega_{21}=2\left(p_2\sin 2\beta+p_1\cos 2\beta\right)$, $\omega_{44}=p_2\sin 2\beta+p_1\cos 2\beta$, остальные компоненты ω_{ij} равны нулю.

Раскрывая определитель, получим

$$2\left(\left(p_1^2-p_2^2\right)\cos 2\beta+2p_1p_2\sin 2\beta\right)^2=0, \qquad (4)$$

или

$$\left(p_1^2-p_2^2\right)\cos 2\beta+2p_1p_2\sin 2\beta=0. \qquad (5)$$

Покажем, что уравнение (5) является характеристическим для системы установившихся движений идеально-пластической среды. В этом случае (1) принимает вид [1]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}-2\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\sin 2\beta-\frac{\partial\beta}{\partial y}\cos 2\beta\right)-\frac{\rho_0}{k}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{\rho_0X}{k}=0,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}+2\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\cos 2\beta+\frac{\partial\beta}{\partial y}\sin 2\beta\right)-\frac{\rho_0}{k}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{\rho_0Y}{k}=0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos 2\beta-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\sin 2\beta=0,$$

Реализация метода характеристик [3, 4] применительно к системе (6) позволяет получить следующее уравнение первого порядка для поверхности разрыва:

$$\det\left\|\overline{\omega}_{ij}\right\|_{i,j=\overline{1,4}}=0\,, \tag{7}$$

где $\overline{\omega}_{13}=\overline{\omega}_{24}=-\left(v_x p_1+v_y p_2\right)\rho_0/k$, остальные $\overline{\omega}_{ij}$ совпадают с соответствующими компонентами ω_{ij} определителя (3).

Раскрывая определитель (7), после очевидных преобразований придем к уравнению (6). Таким образом, как в случае неустановившихся движений, так и для установившихся движений идеально пластической среды уравнение характеристик определяет стационарный разрыв, т. е такую линию разрыва, положение которой на плоскости не меняется с течением времени. Отметим, что ориентация линий характеристик зависит только от ориентации главных осей напряжений и не зависит от свойств самой среды. Чтобы построить линии характеристик разделим (5) на g^2. В результате получим

$$\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cos 2\beta+2\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\beta=0\,, \tag{8}$$

$\cos\alpha=p_1/g\,,\sin\alpha=p_2/g$, α —угол между нормалью к линии характеристик и осью x .

Из (7) следует

$$\cos\left(2\alpha-2\beta\right)=0\,, \tag{9}$$

На рис. 1 представлены линии характеристик для различных углов β наклона максимального напряжения σ_1 к оси координат x , построенные с помощью (9).

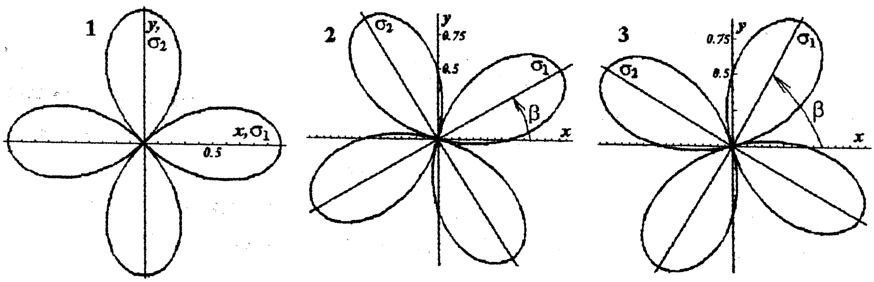

Рис. 1. Линии характеристик в идеально пластической среде в условиях плоской деформации: 1 — $\beta=0$; 2 — $\beta=\pi/6$; 3 — $\beta=\pi/3$.

Рис. 1 показывает, что линия характеристик при возрастании угла β от нуля до $\pi/2$ на $\Delta\beta$ поворачивается относительно оси x на тот же угол $\Delta\beta$ против часовой стрелки, однако ориентация линии характеристик относительно осей главных напряжений σ_1 и σ_2 остается неизменным.

В заключение отметим, что вид линии характеристик для идеально пластической среды (см. рис. 1) имеет тот же вид, что и линии разрыва скоростей и напряжений для сжимаемой пластической среды при $\beta = 0$ и $a = 1$ в случае неустановившихся движений [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гениев Г. А., Эстрин М. И. Динамика пластической и сыпучей сред. М.: Стройиздат, 1972. — 216 с. 2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. — 608 с. 3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980.: — 280 с. 1980. 4. Новацкий В. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. — 307 с.

УДК 539.3

М.Г. Ботогова, Е.Д. Рафеенко

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Разработка методов численного решения задач теории оболочек достигла в настоящее время такого уровня, при котором трудно назвать задачу, не поддающуюся численному решению. Для осесимметрично нагруженных оболочек вращения — это методы ортогональной прогонки, в случаях не допускающих разделения переменных — это вариационные методы, в том числе интенсивно разрабатываемые в последнее время методы конечных элементов. В связи с этим происходит переоценка роли и значения аналитических методов. В простейших случаях аналитические методы дают точное решение задачи. Во многих других случаях они приводят к удовлетворительному по точности приближенному решению или позволяют существенно упростить численное решение. Ведущее место среди аналитических методов, применяемых для решения задач теории оболочек, занимают методы асимптотического интегрирования, использующие малость относительной толщины оболочки.

С математической точки зрения исследование свободных колебаний оболочек сводится к нахождению собственных чисел и соответствующих им векторов сложных систем дифференциальных уравнений. Проинтегрировать эти уравнения удается лишь в простейших случаях одномерных задач при однородном исходном состоянии, когда уравнения имеют постоянные коэффициенты. В данной же работе рас-