УДК 621.839.1

В.А. Акимов

АНАЛИЗ ПРИНУЖДЕННОГО ВРАЩЕНИЯ СВОБОДНО СИДЯЩЕГО НА ОСИ ДИСКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТРЕНИЯ СЦЕПЛЕНИЯ

Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Беларусь

На практике имеется большое число задач, в которых мы имеем дело с двумя взаимосоприкасающимися дисками, вращающимся один относительно другого в различных вариантах. Рассмотрим следующий случай.

Имеются два диска: один из них вращается с некоторой скоростью и может совершать поступательное движение относительно поверхности другого. Второй диск свободно вращается вокруг неподвижной оси (рис. 1). Подобный случай встречается в оптике, при шлифовке линз.

Вначале диски вращаются в разных направлениях. Будем постепенно надвигать второй диск. При полном перекрытии оба диска будут вращаться в одном направлении. Следовательно, имеется такая зона перекрытия, когда диск 1 стоит. Поставим себе задачу найти межцентровые расстояния при остановке дисков (рис. 2).

$$|M| = k\iint\limits_S |\vec{F}_i| O_1N = k\iint\limits_S (a\cos\varphi - r)\underbrace{rd\varphi dr}_{dS},$$

где $OO_1 = a$, причем O — центр полярной системы координат, находится в центре подвижной оси диска; k — коэффициент пропорциональности; O_1 — центр оси свободного вращения диска.

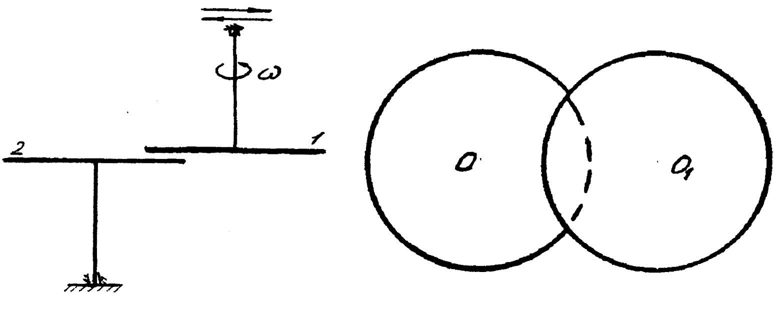

Рис. 1.

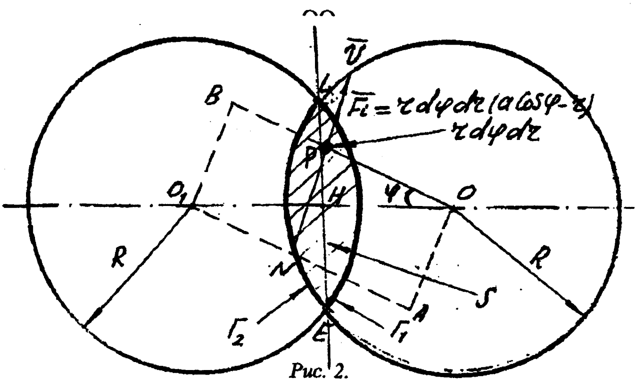

Рис. 2.

Сила трения F_i элементарной площадки с центром в точке P направлена по скорости этой точки, т.е. $NP \perp OB$, а $OB = O_1A$ по построению; S — область пересечения 2-х дисков радиуса R; $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ — граница области пересечения; 2 — ведомый диск; 1 — ведущий.

Уравнение границ складывается из двух следующих:

$$\Gamma_1 : \rho_1 = a\cos\varphi - \sqrt{R^2 - a\sin^2\varphi} \;\; ; \;\; \Gamma_2 : \rho_2 = R .$$

Максимальные значения $\pm\varphi$ достигается в точках L и E

где
$$\varphi_{max} = \alpha_0 = \arccos\frac{a}{2R} .$$

При рассмотрении перекрытия дисков имеем три различных случая:

Случай 1 (рис. 2) — область малых перекрытий

$$0 \le \alpha_0 \le \pi/4 \quad \sqrt{2}R \le a \le 2R \quad 0 \le \varphi \le \alpha_0$$

В этом случае имеем

$$M = 2k\int_0^{\alpha_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r(a\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi , \qquad (1)$$

где $\rho_1 = a\cos\varphi - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}$, $\qquad \rho_2 = R; \qquad \alpha_0 = \arccos\dfrac{a}{2R}$.

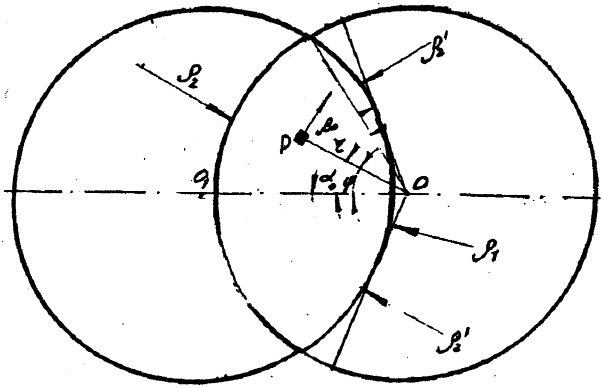

Рис. 3.

Случай 2 (рис. 3): область средних перекрытий

$\pi/4 \le \beta_0 \le \pi/2$, $\quad \pi/4 \le \alpha_0 \le \pi/3$, $\quad R \le a \le \sqrt{2}R$, $\quad 0 \le \varphi \le \beta_0$.

В этом случае имеем

$$M = 2k\int_0^{\alpha_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r(a\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi + 2k\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r(a\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi\,, \tag{2}$$

где α_0, ρ_1, ρ_2 — те же, что и в первом случае

$$\beta_0 = \arcsin\frac{R}{a}, \qquad \rho_2{}' = a\cos\varphi + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}$$

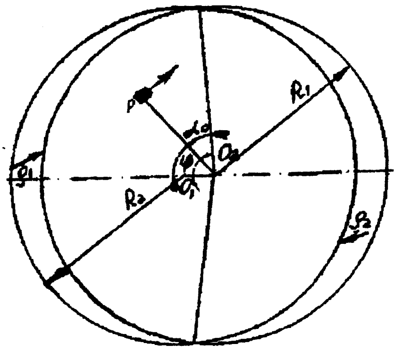

Рис. 4.

Случай 3.

Область больших перекрытий: (рис. 4).

$0 \le \varphi \le \pi$, $\pi/3 \le \alpha_0 \le \pi/2$, $0 \le a \le R$.

В этом случае имеем:

$$M = 2k\int_0^{\alpha_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r(a\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi + 2k\int_{\alpha_0}^{\pi}\int_0^{\rho_2'} r(a\cos\varphi - r)\,dr\,d\varphi, \qquad (3)$$

где α_0, ρ_1, ρ_2' — те же, что в первом и во втором случае. Коэффициент пропорциональности k вычисляется отдельно, а в данном случае полагаем $k = 1$.

Выведем теперь формулы зависимости угловой скорости диска как функцию области перекрытия.

1. Область малых перекрытий

$$M = 2k\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{ar^2\cos\varphi}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{a\cos\varphi-\sqrt{R^2-a^2\sin^2\varphi}}^{R} d\varphi = \left(2aR^2 - \frac{a^3}{3}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}} -$$

$$-\frac{2}{9}a^3\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}R^3\arccos\frac{a}{2R} - \frac{2}{3}\int_0^{\alpha_0}(R^2 - a^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi.$$

Соотношение между угловыми скоростями имеет вид:

$$\omega_M = \omega[F(\lambda) - I_1(\lambda)], \qquad (4)$$

где ω_M — угловая скорость ведомого диска при малой зоне перекрытия; ω_1 — угловая скорость ведущего диска ($\omega = const$).

$$F(\lambda) = 2\lambda(3-2\lambda^2)(1-\lambda^2)^{1/2} - \frac{8}{3}\lambda^3(1-\lambda^2)^{1/2} - \arccos\lambda =$$

$$= \frac{2}{3}\lambda(9-10\lambda^2)(1-\lambda^2)^{1/2} - \arccos\lambda.$$

$I_1(\lambda) = \int_0^{\alpha_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi$ — псевдоэллиптический интеграл; λ_0 — корень уравнения; $I_1(\lambda) = F(\lambda)$; $\lambda = \dfrac{a}{2R}$ — безразмерный параметр.

Согласно [1], [2], [3] получаем

$$I_1(\lambda) = 2\lambda E\left(\delta_0;\frac{1}{2\lambda}\right) - \frac{4\lambda^2-1}{2\lambda}F\left(\delta_0;\frac{1}{2\lambda}\right) + 4\lambda^2\left[\frac{1-4\lambda^2}{3\lambda}F\left(\delta_0;\frac{1}{2\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{8\lambda^2-1}{6\lambda}E\left(\delta_0;\frac{1}{2\lambda}\right) - \frac{2\lambda}{3}[(1+4\lambda^4-4\lambda^2)(1-\lambda^2)(1+16\lambda^6-16\lambda^4)\right]^{1/2}, \qquad (5)$$

где $\delta_0 = \arcsin(2\lambda\sqrt{1-\lambda^2})$, $2\lambda > 1$; $F\left(\delta_0;\dfrac{1}{2\lambda}\right)$ — эллиптический интеграл 1-го рода; $E\left(\delta_0;\dfrac{1}{2\lambda}\right)$ — эллиптический интеграл 2-го рода.

2. Область средних перекрытий

Аналогично 1 определяем

$$\omega_C = 2\omega\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{ar^2\cos\varphi}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{a\cos\varphi-\sqrt{R^2-a^2\sin^2\varphi}}^{R} d\varphi +$$

$$+2\omega\int_0^{\beta_0}\left(\frac{ar^2\cos\varphi}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{a\cos\varphi-\sqrt{R^2-a^2\sin^2\varphi}}^{a+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\varphi}} d\varphi = \omega_M - 2\omega\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi \qquad (6)$$

Последний член в (6) можно представить в виде

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi = \int_0^{\beta_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi - \int_0^{\alpha_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6) получим

$$\omega_C = \omega[F(\lambda) + I_1(\lambda) - I_2(\lambda)],$$

где ω_C — угловая скорость ведомого диска при малой зоне перекрытия;

$I_1(\lambda)$ задается соотношением (5);

$$I_2(\lambda) = 2\lambda E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2\lambda}\right) - \frac{4\lambda^2-1}{2\lambda}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2\lambda}\right) + 4\lambda^2\left[\frac{1-4\lambda^2}{3\lambda}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{8\lambda^2-1}{6\lambda}E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2\lambda}\right)\right], \qquad 2\lambda \geq 1.$$

3. Область больших перекрытий

В этом случае находим

$$\omega_Б = 2\omega\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{ar^2\cos\varphi}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^R d\varphi + \omega\int_{\alpha_0}^{\pi}\left(\frac{ar^2\cos\varphi}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \omega[F(\lambda) + I_1'(\lambda) - I_3(\lambda)],$$

$\omega_Б$ — угловая скорость ведомого диска при большой зоне перекрытия

где $I_1'(\lambda) = \int_0^{\alpha_0}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi$ — эллиптический интеграл 2-го рода;

$$I_1'(\lambda) = E(\alpha_0,2\lambda) + 4\lambda^2\left\{\frac{1-4\lambda^2}{12\lambda^2}F(\alpha_0,2\lambda) + \frac{8\lambda^2-1}{12\lambda^2}E(\alpha_0,2\lambda) - \right.$$

$$\left. -\frac{\lambda}{3}[(1+4\lambda^4-4\lambda^2)(1-\lambda^2)]^{1/2}\right\},$$

$$I_3(\lambda)=\int_0^{\pi}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi=2\int_0^{\pi/2}(1-4\lambda^2\sin^2\varphi)^{3/2}d\varphi=2E\left(\frac{\pi}{2},2\lambda\right)+$$

$$+8\lambda^2\left\{\frac{1-4\lambda^2}{12\lambda^2}F\left(\frac{\pi}{2},2\lambda\right)+\frac{8\lambda^2-1}{12\lambda^2}E\left(\frac{\pi}{2},2\lambda\right)-\frac{\lambda}{3}[(1+4\lambda^4-4\lambda^2)(1-\lambda^2)]^{1/2}\right\},$$

$2\lambda\le 1,\qquad \alpha_0=\arccos\lambda$.

Итак, нами получена формула

$$\omega_1(\lambda)=\begin{cases}\omega_M(\lambda) & \text{при } \sqrt{2}/2\le\lambda\le 1,\\ \omega_C(\lambda) & \text{при } 1/2\le\lambda\le\sqrt{2}/2,\\ \omega_Б(\lambda) & \text{при } 0\le\lambda\le 1/2.\end{cases}$$

Для нахождения корней трансцендентного уравнения $\omega(\lambda)=0$ необходимо привлечение ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Из-во наука, 1977. 2. Беляков В.А., Кравцова Р.И., Раппопорт М.Р. Таблицы аналитических интегралов. Из-во АН СССР, 1962. 3. Граденштейн И.С., Рыжик И.М. Таблиц интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, 1971.

УДК 621.839.1

В.А. Акимов

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗНОСА ТРУЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Данная работа является продолжением выполненной ранее работы о вращающихся дисках.

Один из дисков вращается с некоторой угловой скоростью ω и может совершать поступательное движение относительно поверхности другого. Второй диск свободно вращается вокруг неподвижной оси за счет соприкосновения с первым (рис. 1) с некоторой угловой скоростью ω_1. Очевидно, что в течение всего процесса движения выполняется условие $\omega\ge\omega_1$. Была найдена угловая скорость ω как функция ω и параметра перекрытия λ:

а) $\omega_1(\lambda)=\omega_M(\lambda)$ при $\sqrt{2}/2\le\lambda\le 1$,