

**РАСЧЕТ ЖЕСТКОСТИ ОСЕВОГО РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА**

Соосность обрабатываемых отверстий в корпусных деталях часто обеспечивается с помощью направляющих элементов на режущих инструментах осевого типа. Место расположения направляющих элементов, оказывающее влияние на точность обработки, может быть найдено с использованием метода граничных элементов [1].

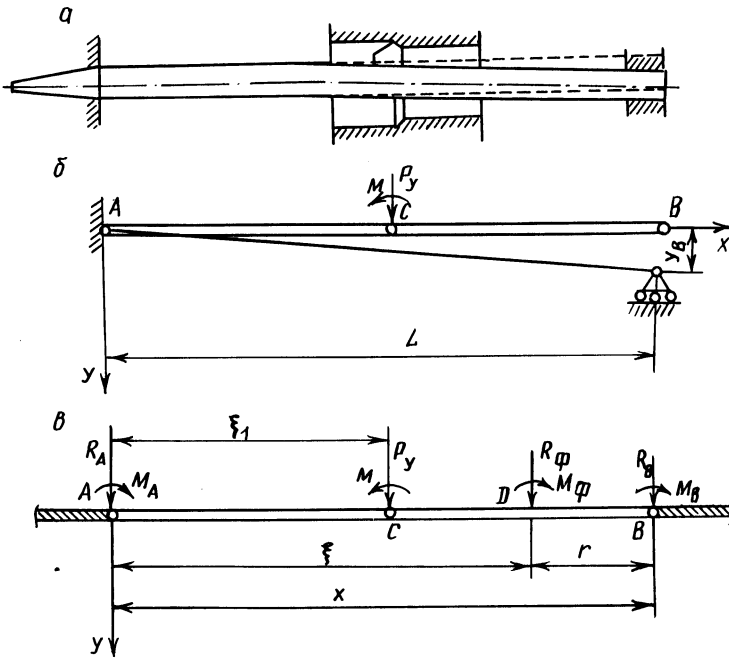


Рис. 1. Схема расточки отверстий (а) и расчетная схема к определению прогиба  $y$  и угла поворота  $\theta$  в условиях реальной (б) и фиктивной (в) нагрузок

На рис. 1, а изображена расчетная схема расточной борштанги с передней направляющей, жестко закрепленной в шпинделе станка и получившей деформацию  $y_B$  от направляющей, а также находящейся под действием силы резания  $P_y$  и момента  $M$  от силы  $P_x$ .

Прогиб  $y$  должен удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$dy^4/dx^4 = 0 \tag{1}$$

по всей длине борштанги, за исключением точки  $C$  приложения нагрузки. В рассматриваемом случае имеется только два граничных элемента  $A$  и  $B$ . Рас-

смотрим балку (рис. 1, б) в одномерной неограниченной области и приложим в точке  $D$  фиктивные нагрузки  $R_\Phi$  и  $M_\Phi$  (рис. 1, в). Считая, что реакция вызовет эквивалентный прогиб балки  $y$ , найдем решения уравнения (1) для сосредоточенной силы  $R_\Phi$  и момента  $M_\Phi$ .

Представим силу  $R_\Phi$  через  $\delta$ -функцию Дирака в форме  $P\delta(x - \zeta)$ , тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P\delta(x - \zeta).$$

Произведя замену переменных  $x - \zeta = r$  и  $\rho = r/l$  и обозначив  $\lambda = \frac{1}{12EI}$ ,

получим  $EI \frac{d^4 y}{dr^4} = P\delta(r)$ , или  $EI \frac{d^4 y}{l^4 d\rho^4} = P \frac{1}{l} \delta(\rho)$ . Тогда

$$\frac{d^4 y}{d\rho^4} = \frac{1}{EI} l^3 P\delta(\rho) = 12\lambda l^3 P\delta(\rho).$$

Решение уравнения (2) представим в нормированном виде, тогда для однородного уравнения  $d^4 y/d\rho^4 = 0$ :

$$y = D_0 + D_1 \rho + \frac{1}{2} D_2 \rho^2 + \frac{1}{6} D_3 \rho^3. \quad (2)$$

Частное решение линейного уравнения получалось как совместное решение однородного и правой части общего. Для определения коэффициентов  $D$  были решены совместно уравнения  $y = 0, dy/d\rho = 0$ . В результате получено общее решение

$$y_P = \frac{1}{2} P\lambda l^3 (1 - 3|\rho|^2 + 2|\rho|^3) = P(\zeta) G(x, \zeta). \quad (3)$$

Из уравнения (3) путем дифференцирования можно определить угол поворота  $\theta$  инструмента, изгибающий момент  $M_{из}$  и перерезывающую силу  $S$  в любом сечении:

$$\theta_{(P)} = \frac{dy}{dx} = 3P\lambda l^3 |\rho| (|\rho| - 1) \operatorname{sgn} \rho = P(\zeta) F(x, \zeta);$$

$$M_{из(P)} = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{4} Pl(2|\rho| - 1) = P(\zeta) E(x, \zeta); \quad (4)$$

$$S_{(P)} = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{2} P \operatorname{sgn} \rho = P(\zeta) D(x, \zeta).$$

Рассмотрим решение для балки, нагруженной сосредоточенным моментом  $M_\Phi$ . Для того чтобы использовать ранее полученное решение, представим сосредоточенный момент в виде двух сил  $P$ , смещенных на  $e$  друг относительно друга. Тогда решение для одной силы, действующей снизу, будет иметь вид

$$y' = D_0 + D_1 \rho + \frac{1}{2} D_2 \rho^2 + \frac{1}{6} D_3 \rho^3 + \int_0^\rho P \lambda (\rho - u)^3 \times \\ \times \delta(u - \zeta) d\zeta = D_0 + D_1 \rho + \frac{1}{2} D_2 \rho^2 + \frac{1}{6} D_3 \rho^3 + P \lambda (\rho - \zeta)^3, \quad (5)$$

а для другой силы

$$y'' = D_0 + D_1 \rho + \frac{1}{2} D_2 \rho^2 + \frac{1}{6} D_3 \rho^3 + \int_0^\rho P \lambda (\rho - u)^3 \delta(u - \epsilon) d\bar{u}.$$

Используя подстановку  $u = \epsilon + \rho - \bar{u}$ ,  $du = -d\bar{u}$ , получим

$$y'' = D_0 + D_1 \rho + \frac{1}{2} D_2 \rho^2 + \frac{1}{6} D_3 \rho^3 - \int_\epsilon^\rho P \lambda (\rho - \epsilon - \rho + \bar{u})^3 \times \\ \times \delta(\epsilon + \rho - \bar{u} - \epsilon) d\bar{u} = -P \lambda (\rho - \epsilon)^3. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения  $y'' = 0$ ,  $dy''/d\rho = 0$ , найдем коэффициенты  $D$ . При подстановке их в уравнения (5) и (6)

$$y' = -\frac{1}{2} P \lambda l^3 [1 - 3\epsilon\rho - 3\rho^2 + 3\rho^3\epsilon + 2(\rho^3 - 3\epsilon\rho^2)]; \\ y'' = -\frac{1}{2} P \lambda l^3 [1 - 3\epsilon\rho - 3\rho^2 + 3\rho^3\epsilon + 2(\rho^3 - 3\epsilon\rho^2)].$$

Так как решения для обеих сил  $P$  совпадают, можно записать в общем виде

$$y''' = -\frac{1}{2} P \lambda l^3 [1 - 3\epsilon|\rho| - 3|\rho|^2 + 3|\rho|^3\epsilon + 2(|\rho|^3 - 3\epsilon|\rho|^2)] \operatorname{sgn} \rho.$$

Общее же решение при действии сосредоточенного момента будет иметь вид

$$y_{(M)} = y - y''' = -\frac{3}{2} P \epsilon \lambda l^3 (|\rho| + |\rho|^3 - 2|\rho|^2) \operatorname{sgn} \rho = \\ = -\frac{3}{2} M \lambda l^2 (|\rho| + |\rho|^3 - 2|\rho|^2) \operatorname{sgn} \rho = M(\zeta) K(x, \zeta). \quad (7)$$

Тогда угол поворота  $\theta$ , изгибающий момент  $M_{из}$  и перерезывающая сила  $S$ :

$$\theta_{(M)} = \frac{dy}{d\rho} = -\frac{3}{2} M \lambda l (1 - 3|\rho|^2 - 4|\rho|) = M(\zeta) \bar{L}(x, \zeta); \\ M_{из(M)} = EI \frac{dy^2}{d\rho^2} = -\frac{1}{4} M (3|\rho| - 2) \operatorname{sgn} \rho = M(\zeta) \bar{I}(x, \zeta); \quad (8) \\ S_{(M)} = EI \frac{d^3y}{d\rho^3} = -\frac{3}{4} M/l = M(\zeta) N(x, \zeta).$$

Запишем в матричной форме для каждого сечения  $x$  балки уравнения (3), (4), (7) и (8):

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \theta(x) \\ M_{\text{из}}(x) \\ S(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x, 0) & \bar{K}(x, 0) & G(x, L) & \bar{K}(x, L) \\ F(x, 0) & \bar{L}(x, 0) & F(x, L) & \bar{L}(x, L) \\ E(x, 0) & \bar{I}(x, 0) & E(x, L) & \bar{I}(x, L) \\ D(x, 0) & N(x, 0) & D(x, L) & N(x, L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ M_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(x, \xi_1) & \bar{K}(x, \xi_1) \\ F(x, \xi_1) & \bar{L}(x, \xi_1) \\ E(x, \xi_1) & \bar{I}(x, \xi_1) \\ D(x, \xi_1) & N(x, \xi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_y(C) \\ M(C) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Выделим только те уравнения, левая часть которых известна из граничных условий. Для решения необходимо добавить в правую часть системы (9) константы  $C_1$  и  $C_2$ , а в матрицу коэффициентов соответственно 1 и 0, т. е.

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ \theta(x) \\ M_{\text{из}}(x) \\ S(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(x, 0) & \bar{K}(x, 0) & G(x, L) & \bar{K}(x, L) & 1 & 0 \\ F(x, 0) & \bar{L}(x, 0) & F(x, L) & \bar{L}(x, L) & 0 & 1 \\ E(x, 0) & \bar{I}(x, 0) & E(x, L) & \bar{I}(x, L) & 1 & 0 \\ D(x, 0) & N(x, 0) & D(x, L) & N(x, L) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \\ M_B \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(x, \xi_1) & \bar{K}(x, \xi_1) \\ F(x, \xi_1) & \bar{L}(x, \xi_1) \\ E(x, \xi_1) & \bar{I}(x, \xi_1) \\ D(x, \xi_1) & N(x, \xi_1) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_y(C) \\ M(C) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, для расчета жесткости осевого инструмента достаточно решить матричные уравнения (10), подставив в них как фиксированную, так и изменяющиеся в определенные интервалы времени нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б р е б б и я К., У о к е р С. Применение метода граничных элементов в технике. — М.: Мир, 1982. — 244 с.