но при проведении проектных расчетов на долговечность. Сравнительный анализ полученных уравнений показывает, что уравнение (17) включает наиболее чувствительные параметры распределения Вейбулла в явном, а менее чувствительные – в неявном виде, охватывая при этом все параметры эквивалентного схематизированного нагрузочного блока, является наиболее универсальным и предпочтительным для описания нагруженности деталей машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Почтенный Е.К., Капуста П.П. Приведение асимметричных циклов к эквивалентным по повреждающему воздействию симметричным или отнулевым// Весці НАН Беларусі: Серыя фізіка-тэхнічных навук.- 2000. – № 2. – С. 59 – 61.

УДК 539.3

А.Е. Крушевский, Т. Лудеманн

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНКИ В ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Известно, что динамические расчеты тонких упругих пластинок базируются на решении уравнения Софи Жермен, построенного на основе гипотез Кирхгофа – Лява [1]. Однако, уже при нахождении низших частот результаты оказываются слишком приближенными [2]. Поэтому возникает необходимость уточнить собственные частоты изгиба тонких пластинок на основе точной теории пластин, рассмотренной в работе [3].

Итак, собственные частоты изгиба пластин на основе уравнения Софи Жермен для прямоугольной шарнирно – опертой пластинки определяются по формуле

$$\omega_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad (1)$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластинки, E – модуль Юнга, ρ – плотность материала, n – коэффициент Пуассона, h – толщина пластинки, m, n – натуральные числа, указывающие номер волны, ω_{mn} – собственные частоты.

При этом каждой волне с номером *"m"*, *"n"* соответствует единственная собственная частота. В уточненной постановке [2] те же частоты определяются в результате решения биквадратного уравнения

$$\omega^2_{mn}=\frac{G}{\rho\left[\frac{3}{5}+\frac{\pi^2h^2\gamma_2}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]}\left\{\left[\frac{\gamma_2h^2\pi^4(\gamma+1)}{240\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{(13\gamma-10)\pi^2}{10\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\frac{3}{h^2}\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\gamma_2h^2\pi^4(\gamma+1)}{240\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{(13\gamma-10)\pi^2}{10\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+\frac{3}{h^2}\right)^2-\\&-\left(\frac{3}{5}+\frac{\pi^2h^2\gamma_2}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\gamma_2h^2\pi^6}{120\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^3+\frac{2(\gamma-1)\pi^4}{\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\right)\end{aligned}}\right\}\tag{2}$$

причем каждой волне соответствуют две собственные частоты. В формуле (2) G – модуль сдвига, $\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2=\gamma-2$.

В точной постановке собственные частоты определяются в результате решения следующего трансцендентного уравнения [3]

$$\begin{aligned}&\frac{\left[\rho\frac{\omega^2}{G}-2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]^2}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}}cos\frac{h}{2}\sqrt{\rho\frac{\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}sin\frac{h}{2}\sqrt{\rho\frac{\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}+\\&+4\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{\rho\frac{\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}cos\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\gamma G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}sin\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G}-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}=0\end{aligned}\tag{3}$$

Оказывается, что в точной постановке каждой волне с номером "m", "n" соответствует безчисленное множество собственных частот. К сожалению, написанное выше уравнение (3) позволяет найти частоты лишь приближенными, численными методами. В частности, раскладывая в ряд Маклорена и ограничиваясь первыми двумя членами, получим следующее приближенное алгебраическое частотное уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\rho^3\omega^6h^4}{G^3}-\frac{8\rho^2\omega^4h^2}{\gamma G^2}\left[3\gamma+1+\frac{(\gamma+1)\pi^2h^2}{8}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\\&+\frac{192\rho\omega^2}{G}\left\{\frac{(\gamma-1)\pi^2h^2}{3\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+\left[1+\frac{\pi^2h^2}{24}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[1+\frac{\pi^2h^2}{8}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\right\}-\\&\frac{-64\pi^4h^2(\gamma-1)}{\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=0\end{aligned}\tag{4}$$

При учете лишь последних двух слагаемых в уравнении (4) имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\rho\omega^2}{G}\left\{\left[1+\frac{\pi^2h^2}{8}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\cdot\left[1+\frac{\pi^2h^2}{24}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\frac{(\gamma-1)\pi^2h^2}{3\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right\}=\\&=\frac{(\gamma-1)\pi^4h^2}{3\gamma}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\end{aligned}\tag{5}$$

Если в левой части уравнения (5) пренебречь слагаемыми, содержащими $\pi^2 h^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$, что справедливо для низших частот, то получим формулу (1) технической теории изгиба пластин. Следовательно, формулу (5) следует рассматривать как уточнение технической теории при определении высших собственных частот.

При учете трех слагаемых в уравнении (4) имеем формулу для определения собственных частот при $\gamma = 3$ в уточненной постановке.

$$\frac{\rho\omega^2}{G}=\frac{4\pi^4 h^2}{3K}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2, \tag{6}$$

где

$$K=\frac{2\pi^2h^2}{3}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+3\left[1+\frac{\pi^2h^2}{8}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[1+\frac{\pi^2h^2}{24}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{\begin{aligned}&\left\{\frac{2\pi^2h^2}{3}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+3\left[1+\frac{\pi^2h^2}{8}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\cdot\left[1+\frac{\pi^2h^2}{24}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\right\}^2-\\&-\frac{\pi^4h^4}{27}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\left[10+\frac{\pi^2h^2}{2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\end{aligned}}$$

Для квадратной пластинки первые частоты (a = b, m = n = 1 при $\frac{h}{a}=0{,}1$ равны $\omega_1=0{,}916\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$, $\omega_2=27{,}124\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$.

Сравнение с результатами расчета по уточненной теории, рассмотренной в работе (2), показывает незначительное увеличение и уменьшение значений собственных частот в точной постановке. Так, в уточненной постановке имеем $\omega_1=0{,}903\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$, $\omega_2=32{,}586\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$, в точной постановке имеем $\omega_1=0{,}916\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$, $\omega_2=27{,}124\sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$.

Очевидно, что увеличение числа слагаемых в частотном уравнении (4) или (3) изменит значение частоты ω_1 в меньшую сторону, а частоты ω_2 – в большую сторону и приблизит их значение к частотам, вычисляемым по формуле (2).

Таким образом, как техническая, так и уточненная теория динамики пластин следуют из точной теории как соответствующие приближения решения поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понамарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том 3.– М.: Машгиз, 1959.- 1118 с.2. Крушевский А.Е. Лудеманн. Т. Уточненная терия динамики тонких пластин//Машиностроение. – 2000. – Вып. 16. С 225–229.3. Крушевский А.Е. Решение задачи о равновесии плиты в точной постановке//Материалы секции теоретической и прикладной механики. 26-я н/т конференция. – Мн.: БПИ, 1970.– С 51–57.