УДК 539.3

В.А. Акимов

ПРИМЕНЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ И НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ДЛЯ РАСЧЕТА УПРУГОЙ ПОЛОСЫ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Белорусская государственная политехническая академия, Минск, Беларусь

Решение рассматриваемой задачи, как и предыдущей, записано в символическом виде, содержащем операторы бесконечно высокого порядка. Аргументом этих операторов является произведение продольной координаты полосы на поперечную производную. Представленное таким образом решение тождественно удовлетворяет уравнениям равновесия внутри области. Часть граничных условий выполняется за счет операторных коэффициентов, а оставшаяся часть – за счет входящих в решение двух произвольных аналитических функций. Построим два новых решения, соответствующих двум классам произвольно выбранных функций, представленных в виде несобственных интегралов и неортогональных рядов.

Рассмотрим равновесие упругой изотропной полосы жестко сцепленной основанием $z=0$ с неподвижным твердым телом, т.е. когда перемещения $U_0=U\big|_{z=0}$ и $W_0=W\big|_{z=0}$ тождественно равны нулю $U_0=0$, $W_0=0$.

Общее решение этой задачи, как и предыдущей, представим в виде:

Задача А: $U=-\frac{1}{2}[(\gamma-1)z\sin(z\partial_1)]f(x)$;

$$W=\frac{1}{2}\left[(\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1}-(\gamma-1)z\cos(z\partial_1)\right]f(x)$$

Задача В: $U=\frac{1}{2}\left[(\gamma-1)z\cos(z\partial_1)+(\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1}\right]g(x)$;

$$W=-\frac{1}{2}[(\gamma-1)z\sin z\partial_1]g(x),$$

где $\gamma=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\nu_2=\nu-2$; ν – коэффициент Пуассона, $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x}$ $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции.

Полагая $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Ae^{-i\lambda x}d\lambda$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Be^{-i\lambda x}d\lambda$ и используя теорему о дифференцировании под знаком интеграла по параметру x, получим

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n Ae^{-i\lambda x}d\lambda\,,\quad g^{(n)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\lambda)^n Be^{-i\lambda x}d\lambda$$

На основании этих формул устанавливаем

$$[sin(z\partial_1)]f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}sin(iz\lambda)Ae^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Ash(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$[cos(z\partial_1)]f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Ach(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda \qquad (1)$$

$$[z\partial_1 sin(z\partial_1)]f(x)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Az\cdot sh(z\lambda)\frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x})d\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A\lambda z\cdot sh(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$[z\partial_1 cos(z\partial_1)]f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Az\cdot ch(z\lambda)\frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x})d\lambda=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Az\lambda\cdot ch(z\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Аналогичные формулы получаются и для функции $g(x)$. Используя (1), запишем выражения для напряжений

$$\frac{\tau_{rz}}{G}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Ai[(\gamma-1)z\lambda\cdot chz\lambda-sh(z\lambda)]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}B[\gamma cos(z\lambda)+(\gamma-1)z\lambda\cdot sh(z\lambda)]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda, \qquad (2)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{G}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A[\gamma ch(z\lambda)-(\gamma-1)z\lambda\cdot sh(z\lambda)]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Bi[sh(z\lambda)+(\gamma-1)z\lambda\cdot ch(z\lambda)]\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Рассмотрим случай сжатия полосы сосредоточенной силой P, приложенной в точке $x=0$, $z=h$ перпендикулярно верхнему основанию. Тогда $\tau_{rz}(z=h)=0$; $\sigma_{zz}(z=h)=-P\delta(x)$ где $\delta(x)$ – дельта функция. Умножим уравнение (2) на $e^{i\lambda x}dx$ и проинтегрируем по всей длине полосы. Используя основную формулу интегрального преобразования Фурье

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}du\right\}e^{i\lambda x}dx$$

и свойство дельта функции $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx=1$, получим для определения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$

систему уравнений при $z = h$:

$$\begin{cases} Ai\left[(\gamma-1)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-sh(h\lambda)\right]+B\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)+(\gamma-1)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]=0 \\ A\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)-(\gamma-1)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]+Bi\left[sh(h\lambda)+(\gamma-1)h\lambda\cdot ch(h\lambda)\right]=-\dfrac{P}{\sqrt{2\pi}G} \end{cases}$$

Вычисляем определитель полученной системы

$$\Delta = sh^2(h\lambda)-\gamma^2 ch^2(h\lambda)-(\gamma-1)^2 h^2\lambda^2$$

и находим A и B:

$$A=-\frac{\left[\gamma\cdot ch(h\lambda)+(\gamma-1)h\lambda\cdot sh(h\lambda)\right]P}{\sqrt{2\pi}G\Delta},\quad B=\frac{\left[(\gamma-1)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-sh(h\lambda)\right]Pi}{\sqrt{2\pi}G\Delta}$$

Приведем расчетные формулы для напряжений в заделанном основании z=0:

$$\tau_{zx}=\frac{2\gamma P}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\gamma-1)h\lambda\cdot ch(h\lambda)-\gamma sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda)-\gamma^2ch^2(h\lambda)-(\gamma-1)^2h^2\lambda^2}sin(\lambda x)d\lambda,$$

$$\sigma_{zz}=-\frac{2\gamma P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma ch(h\lambda)+(\gamma-1)h\lambda\cdot sh(h\lambda)}{sh^2(h\lambda)-\gamma^2ch^2(h\lambda)-(\gamma-1)^2h^2\lambda^2}cos(\lambda x)d\lambda$$

С учетом $\left(\dfrac{1}{\gamma-1}\right)^2=(1-2\nu)^2$, $\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2=4(1-\nu)^2$ определяем:

$$\Delta = sh^2(h\lambda)-\gamma^2ch^2(h\lambda)-(\gamma-1)^2h^2\lambda^2=(\gamma-1)^2\left[(1/(\gamma-1))^2sh^2(h\lambda)-(\gamma/(\gamma-1))^2*\right.$$
$$\left.*ch^2(h\lambda)-h^2\lambda^2=(\gamma-1)^2\right[(1-2\nu)^2sh^2(h\lambda)-4(1-\nu)^2(sh^2(h\lambda)+1)-h^2\lambda^2\Big]=$$
$$=-(\gamma-1)^2\left[(3-4\nu)sh^2(h\lambda)+h^2\lambda^2+4(1-\nu)^2\right]$$

Вынося в числителе выражений τ_{zx} и σ_{zz} за скобки $(\gamma-1)$, после элементарных преобразований получим

$$\tau_{zx}\left(_{z=0}\right.=\frac{2(1-\nu)P}{\pi h}\int_0^\infty\frac{\mu\cdot ch(\mu)-(1-2\nu)sh(\mu)}{(3-4\nu)sh^2(\mu)+\mu^2+4(1-\nu)^2}sin\left(\frac{x}{h}\right)d\mu$$

$$\sigma_{zz}\left(_{z=0}\right.=-\frac{2(1-\nu)P}{\pi h}\int_0^\infty\frac{\mu\cdot sh(\mu)+2(1-\nu)ch(\mu)}{(3-4\nu)sh^2(\mu)+\mu^2+4(1-\nu)^2}cos\left(\frac{x}{h}\right)d\mu$$

где принято $\mu=\lambda h$

Полученный результат совпадает с [1, стр. 40–41].

Численные результаты здесь обычно получают с помощью теоремы о вычетах [1].

Вернемся к представлению функций $f(x)$ и $g(x)$ в виде рядов

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos\lambda_n x+b_n\sin\lambda_n x),\quad g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(c_k\cos\mu_n x+d_n\sin\mu_n x)$$

Условию $\tau_{zx}|_{z=h}=0$ можно удовлетворить, если в задаче A в качестве l_n взять корни трансцендентного уравнения $th(h\lambda)=(\gamma-1)h\lambda$ Тогда m_n в задаче B будут корнями трансцендентного уравнения $cth(h\mu)=-\dfrac{\gamma-1}{\gamma}h\mu$ и c_n=0. Не умоляя общности, а лишь для упрощения выкладок, считаем внешнюю нагрузку $F(x)$ симметричной, т.е.

$$F(x)=A_0+\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos\delta_k x\,,$$

где δ_k, A_o, A_k – известные величины.

Вводя новые переменные

$$X_k=G[\gamma ch(h\lambda_k)-(\gamma-1)h\lambda_k sh(h\lambda_k)]a_k=G\left[\gamma-(\gamma-1)^2h^2\lambda_k^2\right]a_k ch(h\lambda_k) \quad (3)$$

$$Y_k=G[sin(h\mu_k)+(\gamma-1)z\mu_k ch(z\mu_k)]d_k=\frac{G}{\gamma}\left[\gamma-(\gamma-1)^2h^2\mu_k^2\right]d_k sh(h\mu_k)$$

запишем граничное условие $\sigma_{zz}(z=h)=F(x)$ в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n\cos\lambda_n x-\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\cos\mu_n x+G\gamma a_0=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\delta_k x$$

Для нахождения коэффициентов разложения (4) будем использовать операторы

$$D_0(d_x)=[tg(hd_x)-(\gamma-1)hd_x]\cdot[\gamma\cdot ctg(hd_x)+(\gamma-1)hd_x]/d_x$$

$$D_1(d_x)=\frac{\lambda_n^2d_x^2}{\lambda_n^2+d_x^2}D_0(d_x)\,,\quad D_2(d_x)=\frac{\mu_n^2d_x^2}{\mu_n^2+d_x^2}D_0(d_x)\,,\ \text{где}\ d_x=\frac{d}{dx}$$

Применяя метод, подробно изложенный в [2], находим

$$a_0=\frac{1}{\gamma G}\left(A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_kD(\delta_k)\right),\quad X_n=\frac{2\mu_n ch^2h\lambda_n}{h\left[(\gamma-1)ch^2h\lambda_n-1\right]}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{\delta_k^2D(\delta_k)}{(\lambda_n^2-\delta_k^2)(\lambda_n^2-\mu_k^2)}\,,$$

$$Y_n=\frac{2\lambda_n^2sh^2h\mu_n}{h\left[(\gamma-1)sh^2h\mu_n-1\right]}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{\delta_k^2D(\delta_k)}{(\lambda_n^2-\delta_k^2)(\lambda_n^2-\mu_k^2)}\,,$$

где $D(\delta_k)=[th(h\delta_k)-(\gamma-1)h\delta_k]\cdot[\gamma\cdot cth(h\delta_k)+(\gamma-1)h\delta_k]/\delta_k$, $\lambda_n\neq\delta_n$, $\mu_n\neq\delta_n$

После этого из (3) находим коэффициенты a_k, d_k и тем самым окончательно получаем решение поставленной задачи в виде неортоганальных рядов. Полагая z = 0, получим формулы для расчета напряжений и деформаций в месте сцепления подложки с основанием.

ЛИТЕРАТУРА.
1. Я.С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. // АН СССР, М. – Л., 1963. – 367 с. 2. В.А. Акимов. Операторный метод решения задач теории упругости. //Диссертация канд. физ.-мат. наук, Минск, 1992. – 136 с.

УДК 546.621:621.785

Е. Ю. Василевич, В. Г. Шепелевич

СТРУКТУРА И СВОЙСТВА БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ АЛЮМИНИЙ-НИКЕЛЬ

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Сверхбыстрая закалка сплавов из жидкой фазы позволяет создать структуру, которую невозможно получить, используя традиционные методы термической обработки [1]. В последние три десятилетия активно ведутся исследования алюминиевых сплавов, получаемых при скоростях охлаждения жидкой фазы 10^5 К/с и выше. При этом особый интерес представляют сплавы алюминия с переходными элементами [2]. В связи с этим в данной работе представлены результаты исследования структуры и свойств системы алюминий-никель, содержащих до 1,2 ат. % легирующего элемента.

Быстрозатвердевшие фольги сплавов системы алюминий-никель, содержащих 0,15, 0,3, 0,6 и 1,2 ат. % Ni, получены выплескиванием капли расплава (≈0,2 г) на полированную внутреннюю поверхность медного цилиндра диаметром 20 см, вращающегося с частотой 25 об/с. Толщина получаемых фольг находилась в пределах от 10 до 100 мкм. Для исследования структуры и свойств использовались фольги толщиной 30...50 мкм. Скорость охлаждения расплава, как показал расчет [3], была выше 10^6 К/с. Исследование текстуры осуществлялось с помощью рентгеноструктурного анализа. Полюсные плотности дифракционных линий 111, 200, 220, 311, 331 и 420 рассчитывались по методу Харриса [4]. Параметр элементарной ячейки твердого раствора на основе алюминия рассчитывался по положению дифракционной линии 420. Также осуществлялось определение физического уширения данной линии. Микротвердость измерялась на приборе ПМТ-3 с использованием нагрузки 20 г. Изохронный отжиг проводился в интервале от комнатной температуры до 540 °С через 40 °С с выдержкой по 20 мин при каждой температуре.

Быстрозатвердевшие фольги сплавов системы алюминий-никель имеют мелкокристаллическую структуру. Средний размер зерна составляет несколько микрон и уменьшается с увеличением концентрации никеля в сплаве.

В таблице 1 приведены значения полюсных плотностей дифракционных линий фольг сплавов системы алюминий-никель, полученных сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы.