

ВЛИЯНИЕ ОТВЕРСТИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗКИ И СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Как известно, стержни имеют очень широкое применение в виде различного рода деталей разнообразных механизмов и машин, а также в строительных конструкциях. Исследование стержней на устойчивость всегда было важной задачей. Наибольший интерес вызывает случай, когда на устойчивость стержней влияет не только нагрузка, но и собственный вес стержня, которым нельзя пренебрегать. В технике такими конструкциями могут быть разного рода печи, футерованные огнеупорными материалами.

В качестве примера решим задачу об устойчивости стержня (верхний конец свободен, нижний – заземлен) при одновременном действии на него сосредоточенной силы F и собственного веса (рис. 1, а).

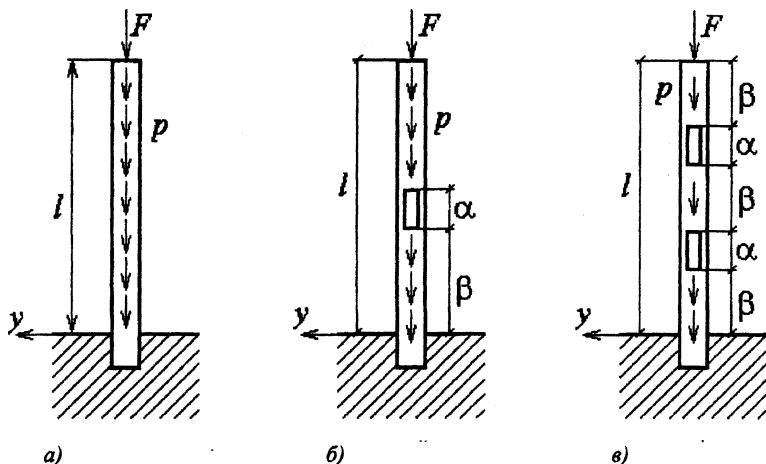


рис. 1. Одновременное действие нагрузки и собственного веса на стержень.

Обозначим силу веса, приходящуюся на единицу длины, через p . Величина p – переменная, $p=p(x)$.

Рассмотрим основное уравнение метода Бубнова – Галеркина [1]:

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + (F + R_{l-x}) \frac{dv}{dx} \right] \frac{d\eta_i}{dx} dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

или

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + (F + p(l-x)) \frac{dv}{dx} \right] \frac{d\eta_i}{dx} dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где E – модуль упругости, I – минимальный момент инерции сечения, v – изогнутая линия при потере устойчивости ($v = f_1 \eta_1 + f_2 \eta_2 + f_3 \eta_3 + \dots + f_n \eta_n$), l – длина стержня, η_i – функция от x , удовлетворяющая геометрическим граничным условиям задачи.

Уравнение упругой линии примем в виде:

$$v = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (3)$$

Тогда

$$\eta = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}. \quad (4)$$

Подставим (3), (4) в (2), считая жесткость постоянной, проинтегрировав полученное выражение, получим:

$$\int_0^l \left[-EI \frac{\pi}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (F + p(l-x)) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \right] dx = 0 \quad (5)$$

$$EI \frac{\pi^2}{4l^2} = F + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) pl, \quad (6)$$

или

$$4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) pl^3 + 4Fl^2 = EI\pi^2. \quad (7)$$

Для нахождения критической длины мы должны решить уравнение (7).

Рассмотрим случай, когда стержень ослаблен одним отверстием (рис. 1,б).

Тогда, подставляя (3), (4) в (2) и учитывая, что жесткость стержня переменная, получим:

$$\int_0^{\beta} \left[-EI_1 \frac{\pi}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (F + p_1(l-x)) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \right] dx +$$

$$\int_{\beta}^{\beta+\alpha} \left[-EI_2 \frac{\pi}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (F + p_2(l-x)) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \right] dx +$$

$$\int_{\beta+\alpha}^l \left[-EI_1 \frac{\pi}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} + (F + p_1(l-x)) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \right] dx = 0 \quad (8)$$

где I_1 – момент инерции сечения сплошного стержня, I_2 – момент инерции сечения стержня с отверстием, p_1 – сила веса сплошного стержня, p_2 – сила веса стержня с отверстием.

Уравнения (7) и (8) были решены с помощью ПЭВМ. Рассмотрим некоторые из полученных результатов.

Исследуем устойчивость стержня прямоугольного сечения ($a \times b$). Минимальный момент инерции сечения: $I_{\min} = \frac{a \cdot b^3}{12}$. В качестве материалов использовали:

алюминий, медь, иридий, сталь, свинец, кирпич, железо, бетон, железобетон. Сечение стержня – 2×1 (см).

Зависимость критической длины стержней, для различных материалов, от нагрузки представлена в табл. 1.

Таблица 1.

Зависимость критической длины стержня от нагрузки.

МАТЕРИАЛ	НАГРУЗКА					
	F=100 Н	F=200 Н	F=300 Н	F=400 Н	F=500 Н	F=600 Н
Иридий	380,66	301,09	255,13	224,79	203,00	186,41
Сталь	274,39	201,22	165,94	144,33	129,39	118,28
Железо	268,12	196,48	161,99	140,88	126,29	115,44
Медь	213,05	155,65	128,21	111,46	99,89	91,30
Кирпич	105,68	74,99	61,29	53,09	47,50	43,37
Алюминий	167,02	119,09	97,45	84,47	75,58	69,02
Железобетон	110,10	78,22	63,94	55,40	49,57	45,25
Свинец	78,32	56,28	46,14	40,03	35,84	32,73
Бетон	87,05	61,77	50,48	43,74	39,13	35,72

Найдем критическую длину того же стержня, но ослабленного одним отверстием (см. рис. 1, б). Отверстие выберем посередине стержня ($\beta = (l - \alpha) / 2$). Длина отверстия α , сечение отверстия – 1×1 (см).

Значения критической длины стержня (в см), ослабленного одним отверстием длиной $\alpha = l/10$, приведены в табл. 2, а отверстием длины $\alpha = l/9$ – в табл. 3. При этом сосредоточенная сила изменялась от 100 Н до 600 Н.

Таблица 2.

Зависимость критической длины стержня ослабленного одним отверстием ($\alpha = l/10$), от нагрузки.

МАТЕРИАЛ	НАГРУЗКА					
	F=100 Н	F=200 Н	F=300 Н	F=400 Н	F=500 Н	F=600 Н
Иридий	376,88	295,89	249,95	219,88	198,38	182,07
Сталь	268,97	196,58	161,95	140,79	126,19	115,34
Железо	262,79	191,93	158,09	137,42	123,16	112,57
Медь	208,72	152,02	125,11	108,72	97,42	89,03
Алюминий	163,02	116,13	95,00	82,34	73,68	67,28
Железобетон	107,39	76,26	62,33	54,00	48,31	44,11
Кирпич	103,06	73,11	59,74	51,75	46,30	42,27
Бетон	84,90	60,22	49,21	42,63	38,14	34,82
Свинец	76,54	54,91	45,00	39,03	34,94	31,91

Таблица 3.

Зависимость критической длины стержня ослабленного одним отверстием ($\alpha = l/9$), от нагрузки.

МАТЕРИАЛ	НАГРУЗКА					
	F=100 Н	F=200 Н	F=300 Н	F=400 Н	F=500 Н	F=600 Н
Иридий	376,43	295,29	249,36	219,32	197,85	181,58
Сталь	268,35	196,05	161,50	140,39	125,83	115,00
Железо	262,18	191,42	157,65	137,03	122,81	112,24
Медь	208,23	151,61	124,76	108,41	97,14	88,77
Алюминий	162,56	115,80	94,73	82,10	73,46	67,08
Железобетон	107,09	76,04	62,15	53,85	48,17	43,98
Кирпич	102,77	72,90	59,57	51,60	46,16	42,15
Бетон	84,65	60,05	49,07	42,51	38,03	34,72
Свинец	76,34	54,75	44,87	38,92	34,84	31,82

Значения критической длины стержня (в см), ослабленного двумя отверстиями (рис. 1, в) длиной $\alpha = l/10$, приведены в табл. 4, а отверстиями длиной $\alpha = l/9$ – в табл. 5. При этом сосредоточенная сила изменялась от 100 Н до 600 Н. Отверстия расположены от основания стержня на расстоянии $\beta = (l - 2\alpha)/3$ и на таком же расстоянии друг от друга. Геометрические параметры стержня те же, что и для одного отверстия.

Таблица 4.

Зависимость критической длины стержня ослабленного двумя отверстиями ($\alpha = 1/10$), от нагрузки.

МАТЕРИАЛ	НАГРУЗКА					
	$F=100$ Н	$F=200$ Н	$F=300$ Н	$F=400$ Н	$F=500$ Н	$F=600$ Н
Иридий	370,88	289,64	244,14	214,53	193,43	177,46
Сталь	262,81	191,63	157,77	137,12	122,87	112,30
Железо	256,75	187,10	154,00	133,83	119,93	109,60
Медь	203,86	148,17	121,87	105,87	94,85	86,68
Алюминий	158,81	113,07	92,49	80,15	71,72	65,49
Кирпич	100,35	71,17	58,15	50,38	45,07	41,14
Железобетон	104,58	74,24	60,67	52,57	47,03	42,94
Бетон	82,66	58,62	47,90	41,50	37,12	33,89
Свинец	74,63	53,48	43,81	38,00	34,01	31,06

Таблица 5.

Зависимость критической длины стержня ослабленного двумя отверстиями ($\alpha = 1/9$), от нагрузки.

МАТЕРИАЛ	НАГРУЗКА					
	$F=100$ Н	$F=200$ Н	$F=300$ Н	$F=400$ Н	$F=500$ Н	$F=600$ Н
Иридий	369,65	288,27	242,84	213,34	192,32	176,42
Сталь	261,44	190,52	156,83	136,29	122,13	111,61
Железо	255,41	186,01	153,08	133,02	119,20	108,93
Медь	202,78	147,30	121,14	105,23	94,27	86,15
Алюминий	157,87	112,38	91,92	79,66	71,28	65,08
Железобетон	103,95	73,78	60,30	52,24	46,74	42,67
Кирпич	99,74	70,73	57,79	50,07	44,79	40,89
Бетон	82,16	58,26	47,61	41,24	36,89	33,68
Свинец	74,20	53,16	43,55	37,77	33,80	30,87

Результаты, полученные в данной работе, позволяют прогнозировать устойчивость разнообразных стержневых конструкций, ослабленных отверстиями и находящихся под действием нагрузки и собственного веса. Полученный расчет может быть также применен для определения высоты колонн, шахтных печей и других аналогичных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука. 1967. – 984 с.
2. Кухлинг Х. – Справочник по физике. – М.: Мир, 1985. – 519 с.