УДК 531.1:621.01]:681.3 (075.8)

В. М. Носов

КОМПЛЕКСНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НА ПК АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Бурное развитие вычислительной математики и ее программной реализации на персональных компьютерах (ПК) привели к созданию принципиально новых систем аналитических вычислений (САВ) и интегрированных пакетов программ, лучшими из которых стали REDUCE, DERIVE, MathCad, Maple, MatLab и Mathematica. Они снимают с инженера весьма трудоемкие задачи составления или поиска алгоритмов и программ расчетов, их отладку и тестирование.

Система REDUCE предоставляет удобные возможности для автоматического и контролируемого упрощения выражений, преобразования символьных матричных выражений, определения новых функций и расширения синтаксиса программ. Следует отметить ее удивительную простоту и фантастические возможности работы с матрицами, что удобно использовать как в кинематике, так и при решении систем линейных алгебраических уравнений задач статики, что будет рассмотрено ниже. Для перехода от обычного численного определения реакций связей к получению аналитических зависимостей влияния на них различных факторов (вариации нагрузки, геометрических параметров задачи и т.п.) нужно просто не задавать их значения, записав величины нагрузок и тригонометрические функции углов в символьном виде (силы P, F, cosφ и т.п.).

Эта особенность REDUCE *позволяет проводить исследование, достойное курсовой работы, над любой задачей, причем его трудоемкость для студента при этом практически не возрастает.* Легкость получения нужных функциональных зависимостей в аналитической форме просто поражает. Ведь для их определения ранее нужно было выполнить исследование с трудоемкой подготовкой варьируемых данных в численном виде для каждого рассматриваемого положения, а затем мучиться над обработкой большого массива численных результатов [1].

DERIVE также является универсальной математической системой, ориентированной на решение весьма широкого круга математических и научно-технических задач. В то же время она более интегрированна, обладает более дружелюбным интерфейсом и большими графическими возможностями.

Системы REDUCE и DERIVE отличаются тем, что удачно сочетают возможности проведения численных и символьных вычислений с простотой и не слишком высокими требованиями к используемой технике. Это делает их незаменимыми для использования в вузах, компьютерный парк которых в основном морально устарел.

В курсе теоретической механики используются практически все основные разделы вычислительной математики: решение систем линейных алгебраических уравнений при определении реакций, интегрирование при нахождении центра тяжести или замены распределенных сил в статике, численное дифференцирование в задачах кинематики, интегрирование дифференциальных уравнений в задачах динамики. Поэтому применение САВ позволяет значительно повысить эффективность учебного процесса.

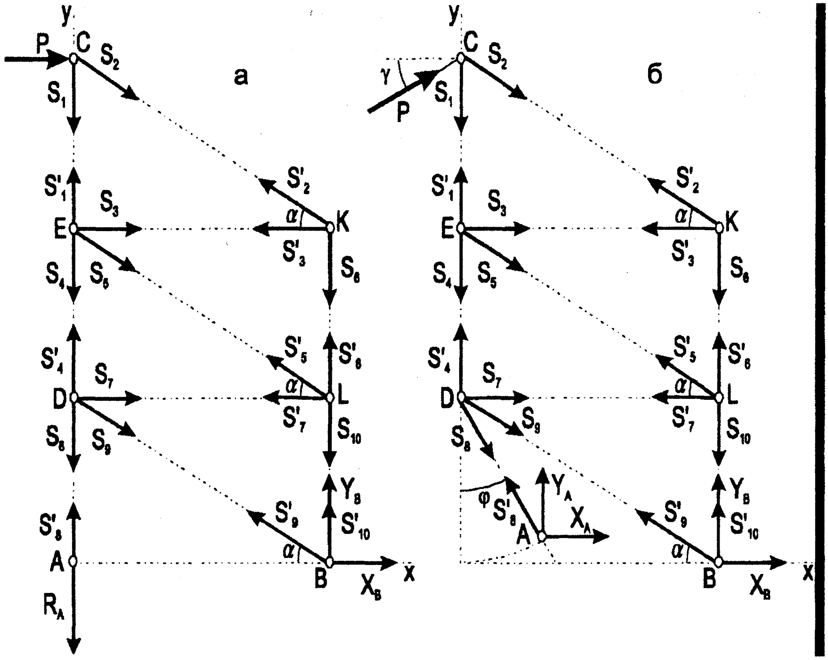

Рис. 1. Расчетная схема плоской фермы: а – исходное положение; б – вариации направления силы P и положения шарнирно-неподвижной опоры в точке A.

Покажем комплексное использование САВ на типовом примере задачи статики (С–1, [2, с. 5–12]). Исходная расчетная схема для определения усилий в стержнях плоской шарнирно-стержневой конструкции [2, с. 5–12] приведена на рис. 1, а. Для удобства исследования вариации силовых и геометрических факторов представим ее сразу в общей постановке (рис. 1, б), для чего:

• силу P покажем в произвольном положении, повернув от горизонтального положения на рис. 1а, которое будем считать начальным, против часовой стрелки на небольшой угол γ;

• изменим положение ее левой шарнирно-неподвижной опоры в точке А, с которой связан промежуточный элемент в виде 8-го стержня, повернув его против часовой стрелки на небольшой угол φ, отсчитываемый от вертикальной оси (начального положения) против часовой стрелки (рис. 1б). Точка А при этом вместе с 8-м стержнем будет как бы совершать вращение вокруг точки D, а угол φ изменяться от 0 до 2π радиан.

Для произвольного положения плоской фермы (рис. 1б) составим по два уравнения равновесия для сил, сходящихся соответственно в узлах C, K, E, L, D, A и B, что в результате будет иметь следующий вид:

Узел C:	$\sum X_i = 0;$	1. $P*\cos\gamma + S_2*\cos\alpha = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	2. $P*\sin\gamma - S_1 - S_2*\sin\alpha = 0;$	
Узел K:	$\sum X_i = 0;$	3. $-S_2'*\cos\alpha - S_3' = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	4. $S_2'*\sin\alpha - S_6 = 0;$	
Узел E:	$\sum X_i = 0;$	5. $S_3 + S_5*\cos\alpha = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	6. $S_1' - S_4 - S_5*\sin\alpha = 0;$	(1)
Узел L:	$\sum X_i = 0;$	7. $-S_5'*\cos\alpha - S_7' = 0;$ (1)	
	$\sum Y_i = 0;$	8. $S_5'*\sin\alpha + S_6' - S_{10} = 0;$	
Узел D:	$\sum X_i = 0;$	9. $S_7 + S_9*\cos\alpha + S_8*\sin\varphi = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	10. $S_4' - S_8*\cos\varphi - S_9*\sin\alpha = 0;$	
Узел A:	$\sum X_i = 0;$	11. $Xa - S_8'*\sin\varphi = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	12. $Ya + S_8'*\cos\varphi = 0;$	
Узел B:	$\sum X_i = 0;$	13. $-S_9'*\cos\alpha + Xb = 0;$	
	$\sum Y_i = 0;$	14. $S_9'*\sin\alpha + S_{10}' + Yb = 0.$	

На рис. 1 уже учтена разность направлений штрихованных и нештрихованных реакций связей для каждого стержня. Поэтому им можно присвоить один идентификатор: Si = Si' = Xi, вследствие чего соответствие идентификаторов для формализации системы уравнений (1) будет иметь вид:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$S_1=S_1'$	$S_2=S_2'$	$S_3=S_3'$	$S_4=S_4'$	$S_5=S_5'$	$S_6=S_6'$

(2)

X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
$S_7=S_7'$	$S_8=S_8'$	$S_9=S_9'$	$S_{10}=S_{10}'$	Xa	Xb	Yb	Ya

Для удобства составления программ заменим также используемые греческие буквы для обозначения углов α, γ и φ их идентификаторами, записанными в латинской транскрипции: α = ALFA, γ = GAMMA, φ = FI.

Перенесем свободные члены, не содержащие неизвестных, в правые части уравнений (1), которые с учетом соответствия идентификаторов (2) теперь примут следующий формализованный вид (3):

1. X_2*cos(ALFA) = -P*COS(GAMMA)
2. -X_1 – X_2*sin(ALFA) = -P*SIN(GAMMA)
3. -X_2*cos(ALFA) – X_3 = 0
4. X_2*sin(ALFA) – X_6 = 0
5. X_3 + X_5*cos(ALFA) = 0
6. X_1 – X_4 – X_5*sin(ALFA) = 0
7. -X_5*cos(ALFA) – X_7 = 0 (3)
8. X_5*sin(ALFA) + X_6 – X_{10} = 0
9. X_7 + X_9*cosα + X_8*sinφ = 0;
10. X_4 – X_8*cosφ – X_9*sinα = 0;
11. X_{11} – X_8*sinφ = 0;
12. X_{14} + X_8*cosφ = 0;
13. -X_9*cos(ALFA) + X_{12} = 0
14. X_9*sin(ALFA) + X_{10} + X_{13}=0

Для удобства пользования уравнения пронумерованы сверху вниз, начиная с 1, где номером без скобок обозначается порядковый номер строки. Теперь система уравнений (3) приобрела явный вид системы линейных алгебраических уравнений A X = B. В ней выписаны в символьной форме только отличные от нуля элементы, которые и вводятся в программе 1:

```
COMMENT Программа 1;
OUT "\C1\PR1.LIS";                                                10
ON NERO;                                                          15
N:=13;                                                            20
SA:=SIN(ALFA):=1/2;                                               22
CA:=COS(ALFA):= SQRT(3)/2;                                        24
SIN(GAMMA):=0; COS(GAMMA):=1;                                     25
SIN(FI):=0; COS(FI):=1;                                           27
P:=11;                                                            29
MATRIX A(N,N), B(N,1), X(N,1);                                    30
A(1,2):=CA; A(2,1):=-1; A(2,2):=-SA; A(3,2):=-CA;                 35
A(3,3):=-1; A(4,2):=SA; A(4,6):=-1;  A(5,3):=1;                   37
A(5,5):=CA; A(6,1):=1;  A(6,4):=-1;  A(6,5):=-SA;                 40
A(7,5):=-CA; A(7,7):=-1; A(8,5):=SA; A(8,6):=1;                   42
A(8,10):=-1; A(9,7):=1; A(9,9):=CA;  A(10,4):=1;                  45
A(10,8):=-COS(FI); A(10,9):=-SA; A(11,8):=-SIN(FI);               47
A(11,11):=1; A(13,9):=-CA; A(13,12):=1;                           48
A(14,9):=SA; A(14,10):= 1; A(14,13):=1;                           50
A(9,8):=SIN(FI); A(12,8):=COS(FI); A(12,14):=1;                   52
B(1,1):=-P*COS(GAMMA); B(2,1):=-P*SIN(GAMMA);                     55
OFF NERO;                                                         80
X:=A**(-1)*B;                                                     85
```

```
SHUT "\C1\PR1.LIS";                                    95
END;                                                   99
```

Результаты работы программы 1 совпадают с приведенным в [2, с. 12] численным решением типового примера задания С-1 и для экономии места не приводятся. Студент должен сравнить результаты работы своей программы с измененными операторами 20–55 с обычным аналитическим решением своей задачи. Проверив таким образом правильность работы программы, легко перейдем к получению символьных решений.

Для исследования влияния вариации угла поворота силы на значения реакций опор и усилий нужно в программе 1 только изменить предложение 25, очистив имена со скобками SIN(GAMMA) и COS(GAMMA), идентифицирующие тригонометрические функции, командой CLEAR:

```
CLEAR SIN(GAMMA),COS(GAMMA);                           25
```

Теперь они будут рассматриваться в качестве свободных переменных, в функциях от которых будет получено решение. В результате работы такой измененной программы 1 мы получим значения реакций опор и усилий в стержнях плоской конструкции в зависимости от вариации направления постоянной по модулю силы P, определяемого изменением угла γ (рис. 1, б):

$$
\begin{aligned}
&X(1,1):=\frac{11*(\cos(gamma)+sqrt(3)*\sin(gamma))}{sqrt(3)}\\
&X(2,1):=-\frac{22*\cos(gamma)}{sqrt(3)} \quad X(3,1):=11*\cos(gamma)\\
&X(4,1):=\frac{11*(2*\cos(gamma)+sqrt(3)*\sin(gamma))}{sqrt(3)}\\
&X(5,1):=-\frac{22*\cos(gamma)}{sqrt(3)} \quad X(6,1):=-\frac{11*\cos(gamma)}{sqrt(3)}\\
&X(7,1):=11*\cos(gamma)\\
&X(8,1):=\frac{11*(3*\cos(gamma)+sqrt(3)*\sin(gamma))}{sqrt(3)}\\
&X(9,1):=\frac{22*\cos(gamma)}{sqrt(3)} - X(10,1):=-\frac{22*\cos(gamma)}{sqrt(3)}\\
&X(11,1):=\frac{11*(3*\cos(gamma)+sqrt(3)*\sin(gamma))}{sqrt(3)}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$X(12,1):=-11*\cos(gamma) \qquad X(13,1):=\frac{33*\cos(gamma)}{sqrt(3)}$$

Нижеследующие графики, полученные путем передачи результатов через буфер обмена в DERIVE, наглядно показывают эти зависимости. Как видно из их сравнения, значения реакций опор и усилий в стержнях плоской конструкции при вращении постоянной по модулю силы P в той же плоскости изменяются по синусоидальному закону:

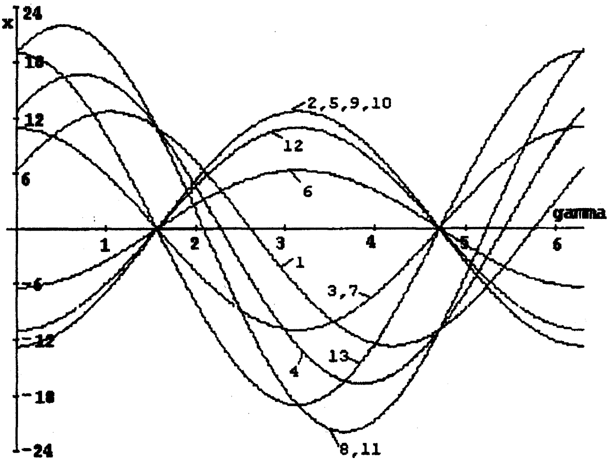

Рис. 2. Зависимости усилий в стержнях и реакций опор (X, кН) плоской конструкции (рис. 1, б) от изменения угла GAMMA (рад) при вращении силы P: 1 – S1, 2 – S2, 3 – S3, 4 – S4, 5 – S5, 6 – S6, 7 – S7, 8 – S8, 9 – S9, 10 – S10, 11 – Ra, 12 – Xb, 13 – Yb.

Изучим влияние вариации <u>геометрических факторов</u> рассматриваемой плоской фермы на примере изменения положения ее левой шарнирно-неподвижной опоры в точке A, определяемого углом φ (рис. 1б). Для этого в программе 1 нужно только изменить предложение 27, очистив имена со скобками SIN(FI) и COS(FI), идентифицирующие тригонометрические функции, командой CLEAR:

CLEAR SIN(FI),COS(FI); 27

В результате работы такой измененной программы 1 мы получим значения усилий в стержнях плоской конструкции в зависимости от вариации положения ее левой шарнирно-неподвижной опоры (рис. 1, б):

$$X(1,1):=\frac{11*(sqrt(3)*\cos(fi)-\sin(fi))}{3*\cos(fi)-sqrt(3)*\sin(fi)} \qquad X(2,1):=-\frac{22*(sqrt(3)*\cos(fi)-\sin(fi))}{3*\cos(fi)-sqrt(3)*\sin(fi)}$$

$$X(3,1) := 11 \qquad X(4,1) := \frac{22*(sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi))}{3*cos(fi) - sqrt(3)*sin(fi)}$$

$$X(5,1) := -\frac{22*(sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi))}{3*cos(fi) - sqrt(3)*sin(fi)} \qquad X(6,1) := -\frac{11*(sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi))}{3*cos(fi) - sqrt(3)*sin(fi)}$$

$$X(7,1) := 11 \qquad X(8,1) := \frac{33}{sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi)} \qquad (5)$$

$$X(9,1) := -\frac{22*(sqrt(3)*cos(fi) + 2*sin(fi))}{3*cos(fi) - sqrt(3)*sin(fi)} \qquad X(10,1) := -\frac{22*(sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi))}{3*cos(fi) - sqrt(3)*sin(fi)}$$

$$X(11,1) := -\frac{33*sin(fi)}{sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi)} \qquad X(12,1) := -\frac{11*(sqrt(3)*cos(fi) + 2*sin(fi))}{sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi)}$$

$$X(13,1) := \frac{33*cos(fi)}{sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi)} \qquad X(14,1) := -\frac{33*cos(fi)}{sqrt(3)*cos(fi) - sin(fi)}$$

Нижеследующие графики на рис. 3, построенные системой DERIVE после получения через буфер обмена результатов (5), наглядно показывают эти зависимости. Как видно из их сравнения, значения усилий в стержнях плоской конструкции при изменении положения опоры в той же плоскости изменяются немонотонным образом. При значениях $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = 4\pi/3$ конструкция находится в неустойчивом положении. При этих значениях угла φ происходит потеря равновесия и устойчивости конструкции, что математически находит свое отражение в стремлении к бесконечности соответствующих реакций, в выражениях для которых при $\varphi = \pi/3$ или $\varphi = 4\pi/3$ происходит деление на 0. Это очень хорошо видно на графиках зависимости значений реакций стержней 1–10 и опор 11–14 от величины угла φ, построенных по соотношениям (5).

Смущающим здесь является то обстоятельство, что постоянных значений в ответах (5) только два ($S_3=S_7$), а прямых линий на рис. 3 – восемь (еще для S_1, $S_2=S_5=S_{10}$, S_4 и S_6). REDUCE обладает широкими возможностями преобразования выражений, но использование самых разнообразных флагов и различное представление выражений не дает ответа на возникший вопрос.

Параллельное решение этой задачи в системе DERIVE, обладающей удивительной способностью максимального упрощения выражений, сразу дает для указанных значений реакций постоянные величины:

$$S_1 = \frac{11\sqrt{3}}{3}\Bigg|, S_2=S_5=S_{10} = -\frac{22\sqrt{3}}{3}\Bigg|, S_4 = \frac{22\sqrt{3}}{3}\Bigg|, S_6 = -\frac{11\sqrt{3}}{3}\Bigg|. \qquad (6)$$

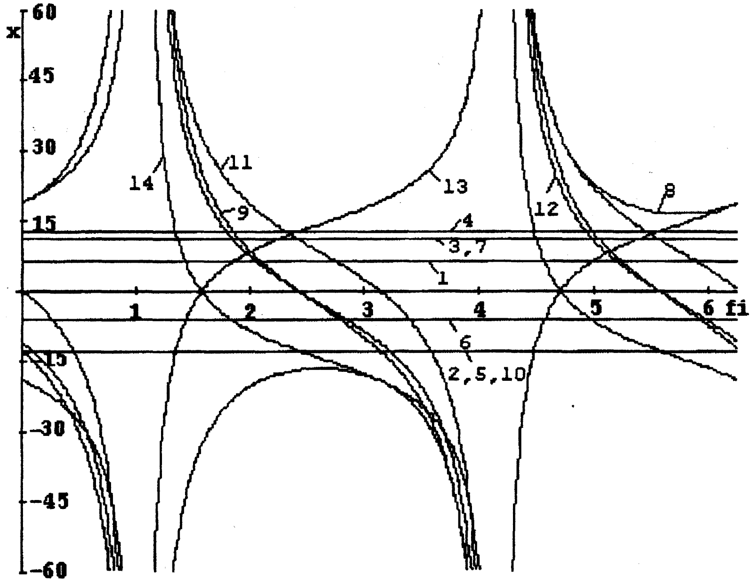

Рис. 3. Зависимости усилий в стержнях и реакций опор (X, кН) плоской конструкции (рис. 1, б) от вариации положения шарнирно-неподвижной опоры в точке A, определяемом углом FI (рад): 1 – S1, 2 – S2, 3 – S3, 4 – S4, 5 – S5, 6 – S6, 7 – S7, 8 – S8, 9 – S9, 10 – S10, 11 – Xa, 12 – Xb, 13 – Yb, 14 – Ya.

Эти же постоянные значения получаются при упрощении соответствующих выражений для S_1, S_2=S_5=S_{10}, S_4 и S_6 из (5), переданных в DERIVE через буфер обмена.

Так совместное использование систем REDUCE и DERIVE существенно повышает их достоинства. Дополнение их текстовым процессором типа Word организует рабочее место исследователя для студента и инженера, сравнимое с самыми сложными современными интегрированными пакетами, весьма дорогостоящими и требовательными к аппаратным возможностям ПК.

Отметим, что рассмотренные типовые примеры были использованы ранее в работе [3] при описании специализированных и универсальных программ, реализующих численные методы. Последнее обстоятельство организует комплексное обучение практическому применению численно-аналитических методов при изучении курса теоретической механики.

Разработанные современные САВ отражают достижения информационной революции, на несколько порядков увеличивая интеллектуальные возможности любого человека. При их освоении возникает ощущение, что ваши способности к точным наукам многократно возрастают. Поэтому использование САВ способно совершить революцию в высшем образовании, для чего нужна соответствующая методическая проработка различных аспектов их использования в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гецевич Э.Г., Ершов Г.Ф., Носов В.М., Тавгень И.А. Расчет элементов статически определимых конструкций с применением ЭВМ: Учебно-метод. пособие к курсовой работе по теоретической механике для студентов спец. Т.19.01 – "Промышленное и гражданское строительство" / Под ред. А.В.Чигарева. – Мн.: БГПА, 1996. – 175 с. 2.Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / [Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А. Яблонского]. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1978. 3. Носов В.М. Программирование на персональных ЭВМ задач теоретической механики. – Мн.: Технопринт, 1997. – 386 с.

УДК 621.762.4:539

В. А. Сидоров, А. А. Хмелев

ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УПЛОТНЕНИЯ АМОРФНЫХ И МЕЛКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Белорусская Государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

В последние годы ведутся интенсивные исследования в области получения быстрозакаленных материалов из жидкого состояния, включая аморфные металлические материалы (АММ).

Особенностью получения аморфных и мелкокристаллических сплавов из жидкого состояния является высокая скорость охлаждения для фиксации метастабильных состояний, что требует малых геометрических размеров частиц хотя бы в одном направлении. Вследствие этого аморфные сплавы могут быть получены только в форме пленок, тонких фольг, лент и в виде порошка.

В связи с этим большое значение придается развитию методов получения аморфных и мелкокристаллических сплавов в виде массивных образцов. Для получения массивных аморфных образцов перспективными являются методы порошковой металургии, такие как теплое изостатическое пресование [1], экструдирование [2], холодное и теплое прессование в прессформах [3] и ряд других.