

Так как взаимодействие двух тел будет зависеть от силы нормального сжатия этих тел, т.е. от силы  $N = \text{const}$ , то с учетом этого уравнение (4) запишем в виде;

$$F_{\text{разр}} = F - (m_1 \cdot a + N \cdot k), \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент трения скольжения данных двух материалов.

Все это говорит о том, что для вновь собранного узла подшипника скольжения необходимо прикладывать большее усилие в начальный момент движения. Величина превышения начальной силы расходуется на разрушение поверхностей трения и образование отдельных частиц трущихся материалов, реально появляющихся в смазывающей жидкости. Для устранения этого явления необходимо снижать шероховатость поверхности детали с более высокой твердостью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Proceedings III International Conference on High Voltag Electron Microscopy, Oxford, 1973. L: Acad, press, 1974.– 532 p.
2. Губкин С.Н. Пластическая деформация металлов. Т. 2. – М.: Машиностроение, 1961.–422 с.
3. Владимиров В.И. Физическая природа разрушения металлов. – М.: Металлургия, 1984.–280 с.
4. Бондаренко А.Н. Лазерные методы возбуждения и регистрации акустических сигналов. – М.: Наука, 1989. – 112 с.
5. Микельсон А.Э., Черный З.Д. Электродинамическое возбуждение и измерение колебаний в металлах. – Рига: Зинатие, 1979. – 67 с.
6. Келли А. Высокопрочные материалы. – М.: Мир, 1976. – 261 с.
7. Новиков И.И., Ермишкин В.А. Микромеханизмы разрушения металлов. – М.: Наука, 1991. – 368 с.

УДК 593.3

Ю. В. Василевич, А. В. Курбачев

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕГО ЭКРАНА В СРЕДЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

*Белорусская государственная политехническая академия  
Минск, Беларусь*

При проектировании виброизолирующих конструкций в средах распространения упругих волн необходимо учитывать условия, при которых данные конструкции работают эффективно. Особый интерес представляет решение задачи по оценке оптимальных виброзащитных свойств тонкой бесконечной по протяженности плиты

толщины  $h$ , расположенной вертикально в упругом изотропном полупространстве. Рассмотрим случаи падения на плиту продольной и поперечной волн. Начало ортогональной системы координат  $OZY$  расположим на правой границе плиты. Ось  $Y$  направим вверх, а ось  $Z$  – вправо. Фронт волны проходит параллельно оси  $X$ .

Пусть из левого полупространства I ( $z < -h$ ) падает под произвольным углом  $\theta$  на плиту плоская гармоническая продольная волна или под углом  $\gamma$  – поперечная волна. В обоих случаях в полупространстве I образуются отраженные продольная и поперечная волны. В полупространстве II ( $z > 0$ ) будут только уходящие от границы плиты продольная и поперечная волны. Потенциалы всех упомянутых волн, опуская фактор  $\exp j(\omega t - \xi y)$ , представим в виде:

$$\begin{aligned} & \varphi_1 \exp[-j\alpha(z+h)], \quad \varphi_1' \exp[j\alpha(z+h)], \quad \varphi_2 \exp[-j\alpha z], \\ & \psi_1 \exp[-j\beta(z+h)], \quad \psi_1' \exp[j\beta(z+h)], \quad \psi_2 \exp[-j\beta z], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $j = (-1)^{1/2}$ ;

$\omega$  – частота колебаний;

$t$  – время;

$\xi = k_1 \sin\theta = k_2 \sin\gamma$ ,  $k_1 = \omega/c_1$ ,  $c_1$  – скорость распространения продольной волны в упругой среде,  $\theta$  – угол, образованный нормалью к фронту продольной волны с осью  $z$ ,  $k_2 = \omega/c_2$ ,  $c_2$  – скорость распространения поперечной волны в упругой среде,  $\gamma$  – угол, образованный нормалью к фронту поперечной волны с осью  $z$ ;

$\varphi_1, \varphi_1', \varphi_2$  – соответственно амплитуды падающей, отраженной и прошедшей продольных волн;

$\psi_1, \psi_1', \psi_2$  – соответственно амплитуды падающей, отраженной и прошедшей поперечных волн;

$\alpha = k_1 \cos\theta$ ,  $\beta = k_2 \cos\gamma$ .

Нагрузку, действующую на плиту, разобьем на симметричную  $\sigma_c, \tau_c$  и асимметричную  $\sigma_a, \tau_a$  части. Величины  $\sigma_c, \tau_c, \sigma_a, \tau_a$  представим в виде полусуммы и полуразности соответствующих напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 0,5(\sigma_{z1} + \sigma_{z2}), \quad \sigma_a = 0,5(\sigma_{z2} - \sigma_{z1}), \\ \tau_c &= 0,5(\tau_{yz1} - \tau_{yz2}), \quad \tau_a = 0,5(\tau_{yz1} + \tau_{yz2}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{z1}, \sigma_{z2}$  – нормальные напряжения в левом и правом полупространствах на границах с плитой;

$\tau_{yz1}, \tau_{yz2}$  – касательные напряжения (на тех же границах);

При этом компоненты напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{yz}$  определяются по формулам:

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные упругости Ляме;

$$W = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4)$$

где –  $W$  и  $V$  – горизонтальная и вертикальная составляющие смещения точек полупространств;

$\varphi$  и  $\psi$  – потенциалы продольной и поперечной волн.

Продольные перемещения  $V_0$  срединной плоскости плиты, вызванные симметричной нагрузкой, описываются уравнением

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + \left( \frac{\omega}{c_n} \right)^2 \right] V_0 = \frac{2\tau_c}{m_n c_n^2}, \quad (5)$$

где  $c_n$  – скорость продольной волны в конструкции;

$m_n$  – масса единицы площади плиты.

Частное решение уравнения (5) запишем в виде

$$V_0 = 2\tau_c \left[ m_n \omega^2 (1-d) \right]^{-1}, \quad (6)$$

где  $d = (\sin \theta c_n / c_1)^2$ .

Под действием асимметричной нагрузки плита совершает изгибные колебания, которые опишем уравнением

$$\frac{Dd^4 W_n}{dy^4} - m_n \omega^2 W_n = -2\sigma_a + \frac{hd\tau_a}{dy}, \quad (7)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость плиты;

$W_n$  – поперечные перемещения ее срединной плоскости.

Поскольку рассматриваются вынужденные гармонические колебания, то частное решение уравнения (7) представим в виде

$$W_n = (2\sigma_a - j\xi h\tau_a) \left[ m_n \omega^2 (v-1) \right]^{-1}, \quad (8)$$

$$\text{где } v = \frac{D\xi^4}{m_n \omega^2} = \frac{C_u^4 \sin^4 \theta}{c_1^4},$$

$c_n$  – фазовая скорость изгибной волны в плите.

В рамках принятых уравнений, описывающих колебания плиты, поперечными перемещениями, вызванными нагрузкой  $\sigma_c$ , пренебрегаем в силу их малости.

Полные продольные смещения поверхностей плиты  $V_{n1}$  и  $V_{n2}$  состоят из двух слагаемых, первое из которых – смещение точек срединной плоскости, а второе – смещение поверхности плиты с учетом ее деформации от изгиба, т.е.

$$V_{n1} = V_0 + 0,5h \frac{dW_n}{dy}, V_{n2} = V_0 - 0,5h \frac{dW_n}{dy}. \quad (9)$$

При жесткой связи частиц среды с плитой необходимо, чтобы кроме равенства одноименных компонент тензора напряжений на поверхностях плиты выполнялись соотношения:

$$W = W_n, V = V_{n1} \text{ при } z = -h, W = W_n, V = V_{n2} \text{ при } z = 0. \quad (10)$$

Подстановкой в граничные условия (10) формул (6), (8), (9), с учетом (1), (2), (3), (4) получим следующие выражения искомых амплитуд для случая падения продольной волны:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= [a_1 W_n - j\xi V_0 + j_1 (\xi^2 - \alpha\beta)] a_2^{-1}, \quad \psi_1' = [a_3 \xi W_n + j\alpha V_0 - 2j_1 \alpha \xi] a_2^{-1}, \\ \varphi_2 &= (a_1 W_n + j\xi V_0) a_2^{-1}, \quad \psi_2 = (a_3 \xi W_n - j\alpha V_0) a_2^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

а для случая падения поперечной волны

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= (-W_n a_1 + j\xi V_0 + 2\beta \xi \psi_1) a_2^{-1}, \quad \psi_1' = [W_n \xi a_3 + j\alpha V_0 - \psi_1 (\xi^2 - \alpha\beta)] a_2^{-1}, \\ \varphi_2 &= (W_n a_1 + j\xi V_0) a_2^{-1}, \quad \psi_2 = (W_n \xi a_3 - j\alpha V_0) a_2^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a_1 = -0,5h\xi^2 + j\beta$ ,  $a_2 = \xi^2 + \alpha\beta$ ,  $a_3 = 0,5h\alpha + j$ .

Выражения для поперечных и продольных смещений плиты от воздействия продольной волны, исходя из (2), (6), (8), (11), запишем в виде

$$W_n = \frac{\varphi_1 \alpha (2t_0 + jt_1)}{l_1 + j l_2}, V_0 = -\frac{2\varphi_1 g_2 \cos \theta}{l_4 - j l_3}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} t_0 &= (1 - g_2^2 \sin^2 \theta)^{0,5}, \quad t_1 = g_1 g_2 \sin^2 \theta, \quad t_2 = t_0 \cos \theta + g_2 \sin^2 \theta, \\ t_3 &= g_1 t_2 \rho_n / \rho, \quad l_1 = t_3 (v - 1) - 2t_1 (1 - 2g_2 t_2), \\ l_2 &= 2t_0 + 0,5g_1 t_1 \cos \theta + t_3 v \eta, \quad l_3 = 2g_2 \cos \theta + t_3 d \eta, \\ l_4 &= t_3 (1 - d), \quad g_1 = h\omega / c_1; \quad g_2 = c_2 / c_1; \quad v = (g_1 c_n / c_1)^2 \sin^4 \theta / 12, \end{aligned}$$

$\rho_n$  и  $\rho$  – плотности материала плиты и среды;

$\eta$  – коэффициент потерь в материале плиты.

Аналогичные выражения для случая падения поперечной волны, исходя из (2), (6), (8), (12) представим в следующем виде:

$$W_n = \frac{\psi_1 \xi \cos \gamma (2 - j q_1 a_0)}{r_1 + j r_2}, \quad V_0 = \frac{2 \psi_1 \beta a_0}{r_3 - 2 j a_0}, \quad (14)$$

где  $a_0 = \left( g_2^2 - \sin^2 \gamma \right)^{0.5}$ ,  $r_1 = \frac{\rho_n}{\rho} (v_1 - 1) q_1 r_0 + 2 q_1 \sin^2 \gamma (2 r_0 - 1)$ ,

$$r_0 = a_0 \cos \gamma + \sin^2 \gamma, \quad r_2 = 2 \left[ \cos \gamma + a_0 \left( 0,5 q_1 \sin \gamma \right)^2 \right],$$

$$r_3 = \frac{\rho_n}{\rho} q_1 (1 - d_1) r_0, \quad q_1 = h \omega / c_2,$$

$$d_1 = (c_n \sin \gamma / c_2)^2, \quad v_1 = (q_1 c_n / c_2)^2 \sin^4 \gamma / 12.$$

Амплитуды отраженных и прошедших волн получим на основании формул (11), (12), (13), (14).

Анализ формул для амплитуд смещений  $W_2$  и  $V_2$  в полупространстве за плитой показал, что при  $g_1 \ll 1$  изгибными колебаниями можно пренебречь для всех углов падения продольной волны. С ростом  $g_1$  роль изгибных колебаний возрастает.

Если

$$d > \frac{8 g_2 \left| 2 t_0 (1_2 + \eta 1_1) - t_1 (1_1 - \eta 1_2) \right|}{g_2 t_1 (4 t_0^2 + t_1^2)} + 1,$$

то сопротивление плиты симметричным колебаниям становится значительно больше сопротивления асимметричным колебаниям, и продольными колебаниями по сравнению с изгибными можно пренебречь. При  $g_1 = \left( \sqrt{12} c_1 / c_n \right)$

$\theta_1 = \arcsin \left( \sqrt{12} / \sqrt{g_1 c_n / c_1} \right)$  и угле падения  $\theta_2 = \arcsin (c_1 / c_n)$ . возникает явление волнового совпадения для изгибных волн, при котором след падающей на плиту волны равен длине волны изгиба, что приводит к интенсивным изгибным колебаниям плиты. Аналогичное явление наблюдается и при  $d \rightarrow 1$ . Но  $d$  не зависит от  $g_1$ , поэтому волновое совпадение для продольных волн возникает только при определенном угле падения  $\theta_2 = \arcsin (c_1 / c_n)$ . В этом случае ограждающая конструкция не снижает вертикальные перемещения среды. При  $g_1 > 1$  наибольших значений амплитуда вертикальных перемещений достигает в окрестности угла  $\theta_1$ .

Исследование формул для амплитуд перемещений  $W_2$  и  $V_2$  при падении поперечной волны показало, что для  $q_1 < 2$  амплитуда вертикальных смещений достигает

ет наибольших значений при критическом угле падения поперечной волны  $\gamma = \gamma_0 = \arcsin \gamma_2$ . Если  $q_1 \leq 1$  и  $\gamma = \gamma_0$ , продольная волна вызывает такое же вертикальное перемещение как и поперечная.

При  $q_1 > \sqrt{12} c_2 / c_n$  и угле падения  $\gamma_1 = \arcsin (\sqrt[3]{12} / \sqrt{q_1 c_n / c_2})$  возникает явление волнового совпадения для изгибных волн, что приводит к резкому возрастанию как изгибных, так и продольных колебаний плиты. Волновое совпадение для продольных волн возникает всегда при угле падения  $\gamma_2 = \arcsin (c_2 / c_n)$ .

На рисунке 1 изображены увеличенные в  $h/\psi_1$  раз амплитуды горизонтальных I, II, вертикальных III, IV и изгибных V смещений при  $g_1=2,0$ ,  $g_2=0,5$ ,  $\rho_n/\rho=1,25$ ,  $c_n/c_1=10$  для случая падения продольной волны (а), и увеличенные в  $h/\psi_1$  раз амплитуды вертикальных I, II и горизонтальных III, IV смещений при  $q_1=1,0$ ,  $g_2=0,5$ ,  $\rho_n/\rho=1,25$ ,  $c_n/c_2=20$  для случая падения поперечной волны (б) во втором упругом полупространстве.

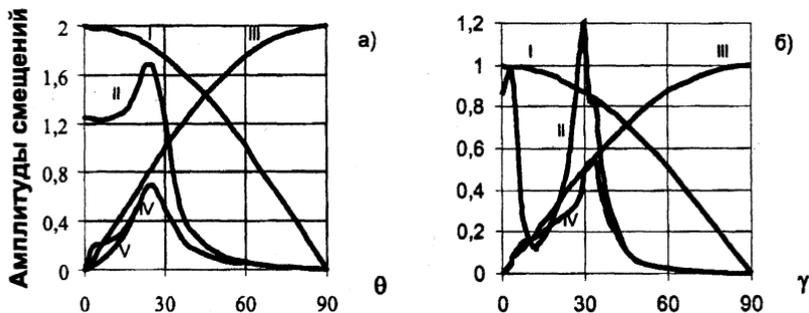


Рис. 1. Зависимость амплитуд смещений от угла падения волны: а) I, III – при отсутствии плиты, II, IV, V – после установки плиты; б) I, III – при отсутствии плиты, II, IV – после установки плиты.

Из рисунка (а) видно, что для угла падения  $\theta = 15^\circ$  с учетом установки экрана амплитуды горизонтальных и вертикальных смещений снижаются в 1,5 раза, а для  $\theta = 45^\circ$  – почти в 8 раз. При этом явление волнового совпадения для падающей волны наблюдается в окрестности угла  $\theta_1 = 25^\circ$ .

Рисунок (б) отражает снижение амплитуды вертикальных смещений для  $\gamma = 11^\circ$  почти в 7 раз. Амплитуда горизонтальных смещений в этом случае изменяется незначительно. При  $\gamma = 45^\circ$  снижение амплитуд вертикальных и горизонтальных смещений достигается почти в 5 раз. Явление волнового совпадения для падающей волны наступает в окрестности угла  $\gamma_1 = 30^\circ$ , а для прошедшей продольной волны – в окрестности  $\gamma_2 = 3^\circ$ .

Из анализа результатов полученных исследований следует, что при  $g_1 > 1$ ,  $\theta \geq 1,5\theta_1$  (падение продольной волны) и при  $q_1 \geq 2$ ,  $\gamma \geq 1,5\gamma_1$  (падение поперечной волны) плита является эффективной виброизолирующей конструкцией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
2. Заборов В.И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций – М.: Стройиздат, 1969. – 185с.

УДК 539.3

А. Е. Крушевский, Т. А. Лудеманн

## УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИКИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

*Белорусская государственная политехническая академия  
Минск, Беларусь*

Как известно, при выводе уравнений технической теории тонких пластин приняты априорные гипотезы Кирхгофа–Лява, а также допущены некоторые противоречия с законом Гука и с условиями выполнения краевых условий на торцах пластинки. Кроме того, пренебрегается инерцией поворота элементарного столбика, что не позволяет получить достоверные решения ряда динамических задач, таких как определение спектра частот собственных колебаний, определение вынужденных колебаний пластин и др. А это обстоятельство, в свою очередь, сказывается на применении модели упругой пластинки к изучению различных физических явлений, например, при моделировании голосообразования в случае представления голосовых связок в виде тонких упругих пластин, подверженных действию динамических нагрузок [5].

Указанные недостатки технической теории пластин заставили ученых построить различные уточненные теории [1, 2, 3]. По мнению авторов данной статьи, наиболее совершенную теорию пластин можно построить, если заранее выполнить все краевые условия на торцах:

$z = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\sigma_z = \pm \frac{q}{2}$ ,  $\tau_{xz} = \pm \frac{x}{2}$ ,  $\tau_{yz} = \pm \frac{y}{2}$ . Это можно осу-

ществить на базе любых полных рядов с использованием вариационного уравнения равновесия элементарного столбика [4]. В частности, удобно применить ряды по полиномам Лежандра благодаря их ортогональности [2].