УДК 539.3

И. В. Авдошка

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Белорусская государственная политехническая академия
Минск, Беларусь

Рассматривается задача о движении тонкой некруговой вязкоупругой цилиндрической оболочки с косыми краями после сообщения ей начальных перемещений и скоростей, локализованных в окрестности некоторой образующей.

1°. В качестве исходной используем систему уравнений движения пологих оболочек, записанную в безразмерном виде, учитывающую влияние вязкости [1]:

$$\mu^3\Delta^2W-\mu k(\varphi)\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2W}{\partial t^2}+\frac{\partial W}{\partial t}=0,\quad \mu^2\Delta^2F+k(\varphi)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

где

$$\mu^4=\frac{h^2}{12\left(1-\nu^2\right)R^2},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad x=\frac{x'}{R},\quad y=\frac{y'}{R},\quad k=\frac{R}{R_2},$$

$$W=\mu^2\frac{W_*}{R},\quad F=\frac{\mu^{-2}F_*}{hE},\quad t=t_*/t_c,\quad t_c^2=\frac{R^2\rho}{Eh\mu^2}.$$

Здесь $0<\mu$ – малый параметр, $W(x,\varphi)$, $F(x,\varphi)$ – искомые безразмерные нормальный прогиб и функция напряжений, x', φ' – длины дуг образующей и направляющей соответственно, R – характерный размер срединной поверхности, $R_2(\varphi)$ – радиус кривизны направляющей, t_* – время, t_c – характерное время, h, E, ν, ρ – толщина оболочки, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно, γ – коэффициент вязкого трения.

Решение системы (1) ищем в области $x_1(\varphi)\le x\le x_2(\varphi)$ при $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$.

Предположим, что функции $x_1(\varphi)$, $x_2(\varphi)$, $k(\varphi)$ достаточное число раз дифференцируемы и вместе со своими производными являются величинами порядка $\sim O(1)$ при $\mu\to0$.

При $x = x_1(\varphi), x = x_2(\varphi)$ рассмотрим условия шарнирного опирания

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \qquad (2)$$

Зададим начальные условия [2]

$$W\big|_{t=0} = W_0^*(x,\varphi,\mu)\Phi_0, \quad \dot{W}\big|_{t=0} = \mathrm{i}\mu^{-1}V_0^*(x,\varphi,\mu)\Phi_0, \qquad (3)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0(\varphi,\mu) = \exp\left\{\mathrm{i}\mu^{-1}\left(a_0\varphi + \frac{1}{2}b_0\varphi^2\right)\right\}, \quad \operatorname{Im} b_0 > 0,$$

где a_0 – вещественное число, а W_0^*, V_0^* – комплекснозначные функции, такие что

$$\frac{\partial^m W_0^*}{\partial x^m}, \ \frac{\partial^m V_0^*}{\partial x^m} \sim \mu^{-m} \quad \text{при} \quad \mu \to 0, \quad m = 0, 1, \ldots, \qquad (4)$$

и имеющие в направлении φ конечное число осцилляций с изменяемостью $\mu^{-1/2}$.

Вещественные и мнимые части функций в условиях (3) задают пару начальных волновых пакетов, локализованных в окрестности образующей $\varphi = 0$ и экспоненциально убывающие при удалении от нее. В настоящей работе исследуется реакция оболочки на начальные возмущения (3) при учете вязкости материала.

2°. Учитывая большую изменяемость решения в направлении оси, введем новую осевую координату по формуле

$$x = \mu s. \qquad (5)$$

Тогда края оболочки будут описываться функциями $s = s_i(\varphi) = \mu^{-1}x_i(\varphi)$, $i = 1,2$.

Ввиду линейности уравнения (1) и однородности граничных условий (2) будем искать решение в виде суперпозиции

$$W = \sum_{n=1}^{N} W_n, \quad F = \sum_{n=1}^{N} F_n, \qquad (6)$$

где W_n, F_n – пара функций, называемая в дальнейшем n-м волновым пакетом. Следуя [2], полагаем, что n-ый волновой пакет в момент времени t локализован в окрестности образующей $\varphi = q_n(t)$, называемой центром n-го волнового пакета. Функция предполагается дважды дифференцируемой, такой, что $q_n(0) = 0$.

Введем локальную систему координат, связанную с центром n-го волнового пакета, по формуле

$$\varphi = q_n(t) + \mu^{1/2}\xi_n. \tag{7}$$

Новая окружная координата ξ_n характеризует удаленность образующей φ от центра n-го волнового пакета $q_n(t)$.

Так как функции W_0^*, V_0^* из (3) удовлетворяют граничным условиям (2), их можно разложить [3] по системе функций $\{z_n\}$

$$z_n(s,\varphi) = \sin\{\lambda_n(\varphi)[s - s_1(\varphi)]\}, \quad \lambda_n(\varphi) = \frac{\pi n}{s_2(\varphi) - s_1(\varphi)} \qquad n = 1,2,... \tag{8}$$

в ряды равномерно сходящиеся по s на $[s_1(\varphi), s_2(\varphi)]$ для любого $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Используя это разложение, получим начальные условия для n-го волнового пакета, которые здесь не приводятся. Функции $z_n(s, \varphi)$ – система собственных функций краевой задачи $\frac{d^4 z}{ds^4} - \lambda^4 z = 0$ с граничными условиями $z = \frac{d^2 z}{ds^2} = 0$ при $s = s_i(\varphi)$, i = 1,2, а $\lambda_n^4(\varphi)$ – соответствующие собственные числа.

Следуя [2], решение задачи (1)–(3) с учетом замен (5), (7) и суперпозиции (6) будем искать в виде

$$\{W_n, F_n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2}\{w_{nm}(s,\xi_n,t), f_{nm}(s,\xi_n,t)\}\Phi_n, \tag{9}$$

$$\Phi_n = \exp\left\{i\left[\mu^{-1}\int_0^t \omega_n(\tau)d\tau + \mu^{-1/2}p_n(t)\xi_n + \frac{1}{2}b_n(t)\xi_n^2\right]\right\}.$$

Здесь $\omega_n(t)$, $p_n(t)$, $b_n(t)$ – дважды дифференцируемые функции порядка $O(1)$, $\operatorname{Im} b_n(t) > 0$ для любого $t \in [0,T]$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n. Механический смысл параметров ω_n, p_n, b_n обсуждался в [2].

Разложим функцию k(φ) в ряд Тейлора по степеням $\mu^{1/2}\xi_n$ в окрестности центра n-го волнового пакета $\varphi = q_n(t)$. Учитывая это разложение и подставляя анзатц (9) в (1) с учетом (6), приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$. В результате придем к последовательности уравнений

$$\sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{L}_{nj}\boldsymbol{X}_{nm-j}=0\,,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{L}_{n0}=\begin{pmatrix} l_{n11} & l_{n12} \\ \mathrm{l}_{n21} & l_{n22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_{nk}=\left(w_{nk},f_{nk}\right)^{T},$$

$$l_{n11}=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-p_n^2\right)^2-\left(\omega_n-\dot{q}_n p_n\right)^2+i\gamma\left(\omega_n-\dot{q}_n p_n\right),$$

$$l_{n12}=-l_{n21}=-k\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,,\quad l_{n22}=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-p_n^2\right)^2.$$

Здесь значок Т означает транспонирование. Выражения для $\mathbf{L}_{n1}$, $\mathbf{L}_{n2}$, представляющие собой линейные комбинации производных матрицы-оператора $\mathbf{L}_{n0}$ по параметрам ω_n, p_n, b_n, здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Подставляя анзатц (9) в граничные условия (2) с учетом (5) и раскладывая функции $s_1(\varphi)$, $s_2(\varphi)$ в ряды Тейлора по степеням $\mu^{1/2}\xi_n$ в окрестности образую-щей $\varphi=q_n(t)$, приходим к последовательности граничных условий для векторов $\mathbf{X}_{ni}$, $\mathrm{i}=1,2,\ldots$, совпадающие по виду с (2.11)–(2.13) из [2] после замены w_{ni} на $\mathbf{X}_{ni}$. В нулевом приближении граничные условия имеют вид (2) с заменой функций W, F на w_{n0}, f_{n0} соответственно.

3°. Однородная краевая задача в нулевом приближении ($m=0$) имеет решение

$$\mathbf{X}_{n0}=P_{n0}\left(\xi_n,t\right)\mathbf{Y}_n\left(q_n(t)\right)z_n\left(s,q_n(t)\right), \tag{11}$$

если

$$\omega_n=\dot{q}_n p_n+\frac{\mathrm{i}\gamma}{2}-H_n\left(p_n,q_n\right), \tag{12}$$

$$H_n=\pm\sqrt{\left(\lambda_n^2+p_n^2\right)^2+\frac{k^2\left(q_n(t)\right)\lambda_n^4}{\left(\lambda_n^2+p_n^2\right)^2}-\frac{\gamma^2}{4}}\,, \tag{13}$$

$$Y_n = (1, \Lambda_n)^T, \ \Lambda_n = k\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + p_n^2)^{-2},$$

где H_n – функция Гамильтона, соответствующая n-му волновому пакету. Учитывая (9), мнимая составляющая в (12) способствует затуханию колебаний с течением времени в случае наличия вязкого трения ($\gamma > 0$).

Решения неоднородных краевых задач, получаемых в первом и втором приближениях (m = 1, 2), ищем в виде

$$\mathbf{X}_{ni} = P_{ni}(\xi_n, t)\mathbf{Y}_n(q_n(t))z_n(s, q_n(t)) + \mathbf{X}_{ni}^{(p)}(s, \xi_n, t), \ \mathrm{i} = 1, 2, \tag{14}$$

где P_{ni} – полином по ξ_n, а $X_{ni}^{(p)}$ – какое-либо частное решение соответствующей краевой задачи. Условия разрешимости задачи в первом приближении приводят к системе Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p(p_n, q_n), \ \ \dot{p}_n = -H_q(p_n, q_n) \tag{15}$$

с начальными условиями $q_n(0)=0$, $p_n(0)=a_0$. Здесь и ниже индексы p, q означают дифференцирование по соответствующему параметру.

Во втором приближении получаем уравнение Риккати [2]

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0, \tag{16}$$

где $b_n(0)=b_0$, и амплитудное уравнение для определения P_{n0} вида

$$h_{n0}(t)\frac{\partial^2 P_{n0}}{\partial \xi_n^2} + h_{n1}(t)\xi_n \frac{\partial P_{n0}}{\partial \xi_n} + h_{n2}(t)\frac{\partial P_{n0}}{\partial t} + h_{n3}(t)P_{n0} = 0, \tag{17}$$

4°. Рассмотрим пример. Пусть направляющая шарнирно опертой цилиндрической оболочки представляет собой эллипс с полуосями a, b ($a > b$), края оболочки – прямые. Расположим начальный волновой пакет на образующей, которой соответствует наименьшая кривизна (наиболее «слабая» образующая). Вычисления проводим для

$$a = 1, 2, \ b = 1, \ a_0 = 0{,}5, \ b_0 = \mathrm{i}, \ h = 0{,}02, \ R = 50, \ \mathrm{n} = 0{,}3,$$

$$\lambda_n = 0{,}6, \ \ \gamma = 0{,}02, \ \ W_0^* = V_0^* = z_n.$$

На рис.1 приведены результаты вычислений. Как видим, в данном случае имеют место многократные отражения волнового пакета от некоторых образующих $\pm\varphi^{(r)}$, ограничивающих области с большой кривизной.

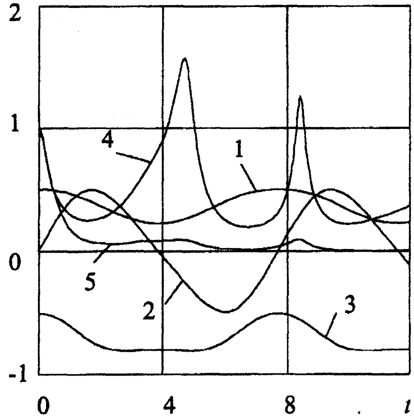

Рис. 1. Графики функций $p_n(t)$, $q_n(t)$, $\mathrm{Re}\,\omega_n(t)$, $\mathrm{Im}\,b_n(t)$, $\mathrm{Re}\,w_{n\max}(t)$ (кривые 1–5 соответственно) для оболочки с эллиптическим поперечным сечением

При этом отражения сопровождаются фокусировкой волнового пакета (рост $\mathrm{Im}\,b_n(t)$) и всплесками $\mathrm{Re}\,w_{n\max}(t)$. График $\mathrm{Re}\,w_{n\max}(t)$ указывает на то, что наличие вязкого трения приводит к затуханию колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1.Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с. 2. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60. № 4. – С. 635–643. 3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.