

ИЗУЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Студент гр. 10309122 Богданов Д. В.

Кандидат физ.-мат. наук, доцент Бобученко Д. С.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

В данной работе исследованы продольные колебания струны, длиной L , натянутой с силой T , жестко закрепленной с обоих концов. При выведении из положения равновесия в струне происходят деформации сдвига и растяжения, в следствии чего возникают поперечно-продольные колебания. Детали поперечных колебаний подробно описаны [1]. В частности, набор разрешенных частот поперечных колебаний:

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

где ρ [кг/м] – масса единицы длины струны, $n = 1, 2, 3$ и т. д. Если для описания движения струны использовать прямоугольную систему координат, и ось X направить вдоль положения равновесия струны, продольные колебания в струне будут описываться волновым уравнением:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где u – смещение из положения равновесия координаты частицы струны на ось X , E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения струны. Граничные и начальные условия:

$$u(x=0, t \geq 0) = 0, \quad u(x=L, t \geq 0) = 0, \quad u(x, t=0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = g(x).$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющие начальным и граничным условиям, полученное методом разделения переменных (метод Фурье) [1] имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{L} \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n} \sqrt{\frac{\rho}{ES}} \int_0^L g(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}.$$

Частота и циклическая частота продольных колебаний:

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{ES}{\rho}}, \quad \omega_n = 2\pi \nu_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Амплитуда продольных колебаний $A_n \sin \frac{\pi n x}{L}$ зависит от номера гармоники n и координаты x , то есть разные точки струны каждой гармоники совершают колебания с разными амплитудами, одновременно достигая своего минимального и максимального значения. Это стоячие волны. В реальном случае колебания частиц струны представляют собой сложение трех взаимно перпендикулярных колебаний, двух поперечных с одинаковыми частотами ν_n , зависящей от силы натяжения струны, и продольной с частотой ν_n . Представляет интерес сравнить их, отношение частот продольных и поперечных колебаний равно:

$$\frac{\nu_n}{\nu_n'} = \sqrt{\frac{ES}{T}}.$$

Для стальной струны диаметра 0,5 мм, модуль Юнга $200 \cdot 10^9$ Па, при натяжении струны 50 Н, частота продольных колебаний ~ 30 раз больше частоты поперечных колебаний струны.

Литература

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: МГУ, 1999. – 792 с.