МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Интеллектуальные и мехатронные системы»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для студентов специальности 1-55 01 01
«Интеллектуальные приборы, машины и производства»
и специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области машиностроительного оборудования и технологий

Минск
БНТУ
2023

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я7
Д48

С о с т а в и т е л ь
М. Ю. Шпургалова

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра электронной техники и технологии УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (зав. каф., канд. техн. наук, доцент *С. И. Мадвейко*);
ведущий научный сотрудник РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства», канд. техн. наук, доцент *А. А. Жешко*

Д48 **Дискретная** математика : пособие для студентов специальности 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства» и специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / сост. М. Ю. Шпургалова. – Минск : БНТУ, 2023. – 44 с.
ISBN 978-985-583-878-5.

В пособии излагаются четыре раздела, представляющие интерес для студентов инженерных специальностей, изучающих дискретную математику: теория множеств, алгебра логики, теория графов и комбинаторика. Учебный материал иллюстрируется примерами, упражнениями и задачами, к некоторым из которых даны указания разной степени подробности. Пособие будет полезным всем изучающим и преподающим дискретную математику и информатику.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я7

ISBN 978-985-583-878-5

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является относительно молодой наукой, высокий интерес к ней в настоящее время связан с бурно развивающимися информационными технологиями и внедрением автоматизированных методов и средств обработки информации во все сферы человеческой деятельности.

Настоящее пособие знакомит обучающихся с практическими приложениями важнейших разделов дискретной математики и позволяет освоить математические основы формирования, преобразования и использования дискретных сигналов при проектировании современных мехатронных систем. В рассматриваемом пособии представлены семь лабораторных работ по ключевым вопросам дискретной математики.

Так, лабораторная работа по теме «Основные операции над множествами» включает решение задач при помощи кругов Эйлера. Тема «Отношения и их свойства» содержит задачи по проверке основных свойств отношений, а также задания по нахождению области определения и области значений композиций отношений. При изучении темы «Алгебра логики и эквивалентные преобразования в ней» студенты получают навыки построения таблиц истинности функций булевой алгебры и совершенных нормальных форм к ним.

Задания, посвященные упрощению построенных функций булевой алгебры при помощи различных алгоритмов, входят в лабораторную работу «Минимизация булевых функций». В тему «Основные понятия и алгоритмы теории графов» включены задачи по построению графов с помощью матриц смежности и инцидентности. По теме «Нахождение максимального потока в транспортной сети» студентами решаются задачи на применение алгоритма Форда-Фалкерсона. Практически изучаются задачи на применение основных комбинаторных формул по теме «Основы комбинаторики».

Содержание пособия соответствует образовательному стандарту по специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника». Данное учебно-методическое пособие будет способствовать приобретению студентами необходимых знаний, умений и навыков, которые помогут им не только в изучении дисциплин общенаучного и профессионального циклов, но и в решении многих практических задач.

Лабораторная работа № 1

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Задание 1.

Построить множества *A*, *B*, *C*. Для заданных множеств построить множества $A \cup (B \setminus C)$ и $A \setminus (B \cap C)$. Изобразить эти множества на плоскости.

1. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 \le y \right\}$.

2. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 9 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \ge 4 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, y \le -x^2 \right\}$.

3. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \ge 1 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, x \ge y^2 \right\}$.

4. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \ge 1 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, x \le -y^2 \right\}$.

5. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, (x-2)^2 + y^2 \le 1 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 \ge y \right\}$.

6. $A = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + (y-2)^2 \ge 1 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 \le y \right\}$.

7. $A = \left\{ (x, y) \,|\, (x+2)^2 + y^2 \ge 1 \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4 \right\}$,

$C = \left\{ (x, y) \,|\, y \le x^2 \right\}$.

8. $A=\left\{(x,y)\,|\,y\le x^2\right\}$, $B=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$,

$C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+(y+2)^2\le 1\right\}$.

9. $A=\left\{(x,y)\,|\,y\le -x^2\right\}$, $B=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$,

$C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+(y+2)^2\le 4\right\}$.

10. $A=\left\{(x,y)\,|\,1\le x\le 4,\ 1\le y\le 3\right\}$, $B=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$,

$C=\left\{(x,y)\,|\,x\le -y\right\}$.

11. $A=\left\{(x,y)\,|\,-4\le x\le 1,\ 1\le y\le 3\right\}$, $B=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\right\}$,

$C=\left\{(x,y)\,|\,x\le y\right\}$.

12. $A=\left\{(x,y)\,|\,y\le -x\right\}$, $B=\left\{(x,y)\,|\,x\ge -3,\ y\le -1\right\}$,

$C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\right\}$.

Задание 2.

Проверить равенство следующих множеств, приведенных в табл. 1.1:

Таблица 1.1

1. а) $\overline{A}\cap\overline{B}=\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A}$; б) $A\setminus B=\left(A\setminus B\right)\setminus B$; в) $\left(A\cup B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\cup\left(B\setminus C\right)$.	2. а) $\overline{A}\cup B=\left(A\cap B\right)\cup\overline{A}$; б) $\overline{B}\setminus A=\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A}$; в) $\left(A\setminus B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\setminus\left(B\setminus C\right)$.
3. а) $\overline{A}\cup\overline{B}=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\overline{A}$; б) $A\setminus B=\left(A\cup B\right)\setminus B$; в) $\left(A\cap B\right)\setminus C=\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right)$.	4. а) $A\cap\overline{B}=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap A$; б) $\overline{B\setminus\overline{A}}=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\overline{A}$; в) $\left(A\setminus B\right)\setminus C=\left(A\setminus B\right)\cap\left(A\setminus C\right)$.
5. а) $A\setminus\overline{B}=\left(\overline{A}\cup B\right)\cap A$; б) $\overline{A}\cup B=B\cup\left(\overline{A\setminus B}\right)$; в) $\left(A\cap B\right)\setminus C=\left(A\cap B\right)\setminus\left(A\cap C\right)$.	6. а) $A\cap B=A\setminus\left(A\cap\overline{B}\right)$; б) $A\cup B=A\cup\left(B\setminus A\right)$; в) $A\cap\left(B\setminus C\right)=\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right)$.

Окончание табл. 1.1

7. а) $A \setminus B = A(A \cap B)$; б) $A \cap B = (B \setminus \overline{A}) \cap A$; в) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$.	8. а) $A \cap B = (A \cup \overline{B}) \setminus \overline{B}$; б) $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$; в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus (C \setminus B)$.
9. а) $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A$; б) $A \cap B = (\overline{A} \cup B) \cap A$; в) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.	10. а) $A \cap B = B \setminus (B \cap \overline{A})$; б) $A \cup B = A \cup (\overline{A} \setminus \overline{B})$; в) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.
11. а) $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$; б) $A \cup B = (\overline{A} \cap B) \cup A$; в) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$.	12. а) $\overline{A} \cap B = (A \cup B) \cap \overline{A}$; б) $\overline{A \setminus \overline{B}} = (A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}$; в) $A \setminus (C \setminus B) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Задание 3.

Проверить справедливость равенства, приведенного в табл. 1.2, для множеств $A = \{a, b\}$; $B = \{b, c\}$; $C = \{a, c\}$..

Таблица 1.2

1.	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times (C \cap B))$
2.	$A \times C = (A \times (C \cap B)) \cup (A \times C)$
3.	$A \times (B \Delta C) = (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (C \cap B))$
4.	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times C)$
5.	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times (C \setminus B))$
6.	$A \times (C \setminus B) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$
7.	$A \times C = (A \times (C \cup B)) \cap (A \times C)$
8.	$A \times C = (A \times (C \setminus B)) \cup (A \times C)$
9.	$A \times (C \cap (B \Delta C)) = (A \times C) \Delta (A \times (C \cap B))$

Окончание табл. 1.2

10.	$A\times(B\cup C)=(A\times(B\Delta C))\cup(A\times(B\cap C))$
11.	$A\times C=(A\times(C\cup B))\setminus(A\times(B\setminus C))$
12.	$A\times(B\cap C)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times(B\Delta C))$

Задание 4.

Существуют ли множества N, E, P такие, что одновременно выполняется набор условий α, приведенных в табл. 1.3.

Таблица 1.3

№	Набор условий α
1.	$N\setminus E=N\setminus P=\varnothing$; $E\setminus P\neq\varnothing$
2.	$E\setminus P=N\setminus E=\varnothing$; $N\setminus P\neq\varnothing$
3.	$N\cap E=\overline{E\cup N}=\overline{P}=\varnothing$; $N\neq\varnothing$
4.	$P\setminus E=N\setminus E=\varnothing$; $(P\cap E)\setminus N\neq\varnothing$
5.	$P\setminus N=E=N\setminus P=\varnothing$; $N\neq\varnothing$
6.	$P\cap N=(N\setminus P)\setminus E=\varnothing$; $N\setminus E\neq\varnothing$
7.	$N\cup E=E\cap P=\varnothing$; $P\setminus N\neq\varnothing$
8.	$P\cap N=E\setminus P=P\setminus N=\varnothing$; $E\neq\varnothing$
9.	$E\setminus N=N\cap E=N\setminus P=\varnothing$; $N\neq\varnothing$
10.	$P\setminus N=\overline{P\cup E}=\varnothing$; $\overline{N}\cap\overline{E}\neq\varnothing$
11.	$N\setminus E=E\setminus P=P\setminus E=\varnothing$; $E\setminus N\neq\varnothing$
12.	$P\cap N\cap E=N\setminus P=\varnothing$; $N\cap E\neq\varnothing$

Задание 5.

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, приведенных в табл. 1.4, если $A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$, $X=\{2, 3, 5, 6\}$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, U – универсальное множество.

Таблица 1.4

	D	$B\cup\overline{X}$		D	$(A\cap B)\cup(A\setminus X)\cup\overline{B\cup X}$
1.	E	$(B\cap X)\cup(\overline{X}\setminus(A\cap B))$	2.	E	$A\cup\overline{B}\cup X$
	F	$(B\cap X)\cup(B\cap(X\setminus A))$		F	$(\overline{B}\cup\overline{X})\cup(B\cap A)$
	D	$(A\Delta X)\cup(B\cap A)$		D	$(B\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
3.	E	$A\cup X$	4.	E	$((B\cup\overline{X})\setminus A)\cup(X\cap B)$
	F	$(A\setminus X)\cup(B\cap X)\cup(X\setminus A)$		F	$\overline{A\cup X}$
	D	$(X\cap B)\cup(A\setminus B)\cup\overline{A\cup X}$		D	$\overline{A\Delta X}\cup(X\setminus B)$
5.	E	$A\cup B\cup\overline{X}$	6.	E	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\cap A)$
	F	$(A\Delta B)\cup(X\cap A)\cup\overline{X\cup B}$		F	$A\cup\overline{X}\cup\overline{B}$
	D	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap B)$		D	$(A\setminus X)\cup\overline{A\cup B}$
7.	E	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup(X\cap(B\setminus A))$	8.	E	$(\overline{B}\cap\overline{A})\cup((A\setminus B)\setminus X)$
	F	$\overline{A}\cup X$		F	$(A\setminus X)\cup\overline{B}$
	D	$\overline{A\Delta X}\cup(A\cap B)$		D	$(A\Delta B)\cup(X\setminus A)$
9.	E	$(A\cap X)\cup((A\setminus B)\setminus X)$	10.	E	$((A\cup X)\setminus B)\cup((X\cup B)\setminus A)$
	F	$A\cup\overline{X}$		F	$\overline{A}\cup(A\setminus B)$
	D	$(\overline{B\cap X}\setminus A)\cup(X\setminus B)$		D	$(\overline{A\Delta X})\cup(X\cap(B\setminus A))$
11.	E	$\overline{A\cup X}\cup(X\cap\overline{B})$	12.	E	$(A\cap B)\cup(X\setminus B)\setminus A)$
	F	$\overline{A}\cup X$		F	$\overline{A}\cup B$

Задание 6.

Решить задачу с использованием кругов Эйлера:

1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида A, B, C. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию A и B – 18 предприятий, продукцию A и C – 15 предприятий, продукцию B

и С – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию А равно числу предприятий, выпускающих продукцию В и равно числу предприятий, выпускающих продукцию С. Найти число всех предприятий.

2. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимается всеми тремя видами спорта?

3. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку отлично по английскому языку, 8 – по математике, 7 – по физике, 4 – по английскому языку и по математике, 5 – по английскому языку и по физике, 4 – по математике и по физике, 3 – по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок?

4. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной пятерки, 6 учеников получили 5 по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе; 2 – по истории и математике, 2 – по истории и литературе, 1 – по математике и литературе. Сколько учеников получили 5 по всем предметам?

5. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.

6. Группе студентов предложено три спецкурса: по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?

7. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?

8. В группе переводчиков 15 человек владеют английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языком, 7 – английским и немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?

9. Опрос группы студентов показал, что 70 % из них любят ходить в кино, 60 % в театр, 30 % на концерты. В кино и театр ходят 40 % студентов, в кино и на концерты – 20 %, в театр и на концерты – 10 %. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?

10. В группе 20 учеников. После медицинского осмотра 14 учеников были направлены на дополнительное обследование к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 ученика, к терапевту и ортопеду – 3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько учеников были направлены к терапевту, окулисту и ортопеду?

11. На курсы иностранных языков записалось 100 человек. Оказалось, что 70 человек будут изучать английский язык, 60 человек – французский и 30 человек – немецкий. Английский и французский собираются изучать 40 человек, английский и немецкий – 20, французский и немецкий – 10. Сколько студентов будут изучать все три языка?

12. Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро и толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько было участников?

Лабораторная работа № 2

ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Задание 1.

Построить граф бинарного отношения R, заданного на множестве $A=\{1, 2, 3, 4\}$, и выяснить, какими свойствами оно обладает. Найти область определения и область значений R.

1. $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$.
2. $R=\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
3. $R=\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.
4. $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$
5. $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
6. $R=\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$.
7. $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
8. $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.
9. $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}$.
10. $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
11. $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.
12. $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$.

Задание 2.

Пусть M – некоторое множество, S и R – некоторые бинарные отношения, причем $R \subseteq M \times M$.

1. Задать списком отношение R и записать его матрицу.
2. Выяснить, является ли отношение R рефлексивным (антирефлексивным), симметричным (антисимметричным) или транзитивным.
3. Найти пересечение $R \cap S$ и объединение $R \cup S$ отношений. Исходные данные приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№	R	M	S
1	$\{(a, b) \mid a \le b\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{(3, 1), (1, 5), (5, 3), (5, 7)\}$
2	$\{(a, b) \mid a + 2 = b\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{(7, 5), (5, 3), (3, 5), (7, 1)\}$
3	$\{(a, b) \mid \frac{a+b}{2} \in M\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{(1, 3), (1, 7), (3, 5), (5, 5)\}$
4	$\{(a, b) \mid a - 2 = b\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{(1, 3), (3, 1), (1, 5), (1, 7)\}$
5	$\{(a, b) \mid 2a + b \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(8, 6), (6, 8), (2, 6), (6, 4)\}$
6	$\{(a, b) \mid b - a \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(6, 4), (4, 6), (2, 8), (4, 4)\}$
7	$\{(a, b) \mid b - 2 = a\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(8, 8), (2, 4), (4, 4), (8, 2)\}$
8	$\{(a, b) \mid 1 + \frac{a}{b} \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(6, 6), (6, 4), (4, 6), (2, 8)\}$
9	$\{(a, b) \mid 2b - a \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 8)\}$
10	$\{(a, b) \mid b + a \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 8)\}$
11	$\{(a, b) \mid a \cdot b \le 24\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(4, 4), (6, 4), (8, 4), (8, 6)\}$
12	$\{(a, b) \mid a + b - 2 \in M\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{(2, 8), (4, 6), (8, 6), (4, 4)\}$

Задание 3.

Определить свойства бинарного отношения R (рефлексивность, симметричность, транзитивность):

1. X – множество прямых,
$R = \{(x, y) \mid x, y \in X$ и x параллельно $y\}$.

2. X – множество прямых,
$R = \{(x, y) \mid x, y \in X$ и x перпендикулярна $y\}$.

3. X – множество людей,
$R = \{(x, y) \mid x, y \in X$ и x моложе $y\}$.

4. X – множество людей,
$R = \{(x, y) \mid x, y \in X$ и x брат $y\}$.

5. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x похож на $y\}$.

6. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x состоит в браке с $y\}$.

7. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x живет в одном городе с $y\}$.

8. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x отец $y\}$.

9. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x подчиненный $y\}$.

10. X – множество людей,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x знаком с $y\}$.

11. X – система множеств,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x равно $y\}$.

12. X – система множеств,
$R = \{(x,\ y) | x,\ y \in X$ и x пересекается с $y\}$.

Задание 4.

Проверить функциональность отношений f, g на множестве $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и отношения h на множестве $A = R$ (R^+). Если отношения функциональны, то найти область определения и область значений.

1. $f = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,1)\}$; $g = \{(1,1),\ (2,1),\ (3,2),\ (4,2)\}$;
$h = \{(x,\ y) | x^2 + y^2 = -x\}$, $A = R$.

2. $f = \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (3,4)\}$; $g = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,2)\}$;
$h = \{(x,\ y) | y = |\cos x|\}$, $A = R$.

3. $f = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,3),\ (4,4)\}$; $g = \{(1,2),\ (2,4),\ (3,4),\ (4,1)\}$;
$h = \{(x,\ y) | x^2 + 1 = xy\}$, $A = R$.

4. $f=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\}$; $g=\{(1,1),(2,2),(3,1),(4,2)\}$;
$h=\left\{(x,y)|x^2+y^2=2x+3\right\}$, $A=R^+$.

5. $f=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\}$; $g=\{(1,1),(2,3),(3,1),(4,1)\}$;
$h=\left\{(x,y)|y=\mathrm{tg}(2x)\right\}$, $A=R$.

6. $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$; $g=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,3)\}$;
$h=\left\{(x,y)|\sqrt{x-1}=\sqrt{y+1}\right\}$, $A=R$.

7. $f=\{(1,4),(2,1),(2,2),(2,3)\}$; $g=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,1)\}$;
$h=\left\{(x,y)|y=|x+4|\right\}$, $A=R$.

8. $f=\{(1,3),(2,2),(2,3),(3,4)\}$; $g=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$;
$h=\left\{(x,y)|\,y^2+1=2\sin x\right\}$, $A=R^+$.

9. $f=\{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$; $g=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$;
$h=\left\{(x,y)|2x+xy=2y+1\right\}$, $A=R$.

10. $f=\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)\}$; $g=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$;
$h=\left\{(x,y)|x^2-1=xy\right\}$, $A=R$.

11. $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$; $g=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,3)\}$;
$h=\left\{(x,y)|x^2+y^2=1\right\}$, $A=R^+$.

12. $f=\{(1,2),(2,3),(2,4),(4,2)\}$; $g=\{(1,1),(2,1),(3,3),(4,3)\}$;
$h=\left\{(x,y)|y=1+yx^2\right\}$, $A=R$.

Задание 5.

Для заданных функциональных отношений f, g, φ и ω приведенных в табл. 2.2, найти композиции $f\circ g$, $g\circ f$, φ°ω, ω°φ.

Таблица 2.2

1	f	$\{(1,-1),(2,-3),(3,-3),(4,-1)\}$;
	g	$\{(-1,1),(-2,2),(-3,1),(-4,1)\}$;
	φ	$\{(x,y) \mid x^2-y^2=1,\ y\ge 0\}$;
	ω	$\{(x,y) \mid y^2-x^2=1,\ y\le 0\}$.
2	f	$\{(1,-1),(2,-1),(3,-3),(4,-3)\}$;
	g	$\{(-1,2),(-2,2),(-3,4),(-4,4)\}$;
	φ	$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}$;
	ω	$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,\ y\le 0\}$.
3	f	$\{(1,-2),(2,-1),(3,-4),(4,-3)\}$;
	g	$\{(-1,4),(-2,3),(-3,2),(-4,1)\}$;
	φ	$\{(x,y) \mid x^2+y^2=2x,\ y\ge 0\}$;
	ω	$\{(x,y) \mid y=2\cos^2 x\}$.
4	f	$\{(1,-3),(2,-4),(3,-1),(4,-2)\}$;
	g	$\{(-1,4),(-2,1),(-3,2),(-4,3)\}$;
	φ	$\{(x,y) \mid y=x^2\}$;
	ω	$\{(x,y) \mid y^2=x,\ y\ge 0\}$.
5	f	$\{(1,-2),(2,-1),(3,-4),(4,-3)\}$;
	g	$\{(-1,2),(-2,1),(-3,4),(-4,3)\}$;
	φ	$\{(x,y) \mid \ln(y)=x\}$;
	ω	$\{(x,y) \mid \ln\lvert x\rvert=y\}$.

6	f	$\{(1,-2),(2,-3),(3,-4),(4,-1)\}$;
	g	$\{(-1,2),(-2,3),(-3,4),(-4,1)\}$;
	φ	$\{(x,y)\vert x^2-y^2=4,\ y\geq 0\}$;
	ω	$\{(x,y)\vert\ y=2\mathrm{tg}x\}$.
7	f	$\{(1,-4),(2,-1),(3,-2),(4,-3)\}$;
	g	$\{(-1,4),(-2,1),(-3,2),(-4,3)\}$;
	φ	$\{(x,y)\vert x^2-y^2=1,\ y\leq 0\}$;
	ω	$\{(x,y)\vert\ y^2-x^2=1,\ y\geq 0\}$.
8	f	$\{(1,-4),(2,-3),(3,-2),(4,-1)\}$;
	g	$\{(-1,4),(-2,3),(-3,2),(-4,3)\}$;
	φ	$\{(x,y)\vert x^2+y=1\}$;
	ω	$\{(x,y)\vert\ y^2+x=1,\ y\leq 0\}$.
9	f	$\{(1,-2),(2,-3),(3,-4),(4,-1)\}$;
	g	$\{(-1,4),(-2,1),(-3,2),(-4,3)\}$;
	φ	$\{(x,y)\vert x^2+y^2=2x,\ y\leq 0\}$;
	ω	$\{(x,y)\vert\ y=-2\sin^2 x\}$.
10	f	$\{(1,-4),(2,-1),(3,-2),(4,-3)\}$;
	g	$\{(-1,2),(-2,3),(-3,4),(-4,1)\}$;
	φ	$\{(x,y)\vert y=x^2\}$;
	ω	$\{(x,y)\vert\ y^2=x,\ y\leq 0\}$.

11	f	$\{(1, -1), (2, -1), (3, -4), (4, -4)\}$;
	g	$\{(-1, 1), (-2, 1), (-3, 4), (-4, 4)\}$;
	φ	$\{(x, y) \| x = \ln(y-1)\}$;
	ω	$\{(x, y) \| y = \ln\|x-1\|\}$.
12	f	$\{(1, -2), (2, -2), (3, -4), (4, -4)\}$;
	g	$\{(-1, 2), (-2, 2), (-3, 4), (-4, 4)\}$;
	φ	$\{(x, y) \| y^2 - x^2 = 1,\ y \le 0\}$;
	ω	$\{(x, y) \| y = \mathrm{ctg}x\}$.

Задание 6.

Выяснить, имеет ли функция f обратную функцию и на каком множестве? Найти обратное отношение для отношения f в области существования обратной функции.

1. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + x\}$.
2. $f = \{(x, y) \mid y + x^2 = 1\}$.
3. $f = \{(x, y) \mid x = \ln(y-1)\}$.
4. $f = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1, y \ge 0\}$.
5. $f = \{(x, y) \mid y^2 x = 1,\ y \le 0\}$.
6. $f = \{(x, y) \mid y = |\cos x|\}$.
7. $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0\}$.
8. $f = \{(x, y) \mid (y-1)^2 = x,\ y \ge 1\}$.
9. $f = \{(x, y) \mid x = y^2 + 1,\ y \le 0\}$.
10. $f = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1,\ y \le 0\}$.
11. $f = \{(x, y) \mid y^2 x = -1,\ y \ge 0\}$.
12. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x\}$.

Лабораторная работа № 3

АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В НЕЙ

Задание 1.

Проверить равносильность формул алгебры высказываний:
а) при помощи таблиц истинности;
б) при помощи эквивалентных преобразований.
Исходные данные приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

1.	$a \leftrightarrow (a \to b) = b \leftrightarrow (b \to a)$	$(a \leftrightarrow b) \vee c = (a \vee c) \leftrightarrow (b \vee c)$
2.	$(a \leftrightarrow b) \to b = (a \leftrightarrow b) \to a)$	$a \wedge (b \leftrightarrow c) = (a \wedge b) \leftrightarrow (\overline{a} \vee c)$
3.	$a \to (a \leftrightarrow b) = \overline{b} \to (a \leftrightarrow b)$	$a \to (b \leftrightarrow c) = (a \wedge b) \leftrightarrow (a \wedge c)$
4.	$\overline{a} \leftrightarrow (b \to a) = \overline{b} \leftrightarrow (a \to b)$	$(a \leftrightarrow b) \to c = (\overline{a} \to c) \leftrightarrow (b \to c)$
5.	$a \leftrightarrow (b \to a) = b \leftrightarrow (a \to b)$	$c \to (a \leftrightarrow b) = (c \to a) \leftrightarrow (c \to b)$
6.	$b \to (a \leftrightarrow b) = \overline{a} \to (a \leftrightarrow b)$	$(a \wedge b) \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to b)$
7.	$(a \vee b) \leftrightarrow b = a \to (a \leftrightarrow b)$	$(a \leftrightarrow b) \vee c = (a \to c) \leftrightarrow (b \to c)$
8.	$\overline{a} \leftrightarrow (b \to b) = \overline{b} \leftrightarrow (b \to a)$	$(a \leftrightarrow b) \wedge c = (a \vee \overline{c}) \leftrightarrow (b \wedge c)$
9.	$a \leftrightarrow (a \wedge b) = (a \leftrightarrow b) \to \overline{a}$	$c \to (a \leftrightarrow b) = (\overline{a} \wedge c) \leftrightarrow (\overline{b} \wedge c)$
10.	$(a \leftrightarrow b) \to \overline{b} = (a \leftrightarrow b) \to \overline{a}$	$\overline{a} \to (b \leftrightarrow c) = (b \to a) \leftrightarrow (c \to a)$
11.	$(\overline{a} \leftrightarrow b) \to b = a \to (a \leftrightarrow b)$	$a \to (b \leftrightarrow c) = (a \to \overline{b}) \leftrightarrow (a \to \overline{c})$
12.	$(a \wedge b) \leftrightarrow b = a \leftrightarrow (a \vee b)$	$(a \vee b) \to b = a \to (a \leftrightarrow b)$

Задание 2.

Для заданных функций, приведенных в табл. 3.2, построить таблицу истинности. Выяснить для каждой из них, является ли она тавтологией или противоречием. В иных случаях указать, для каких значений функция является выполнимой, а для каких опровержимой.

Таблица 3.2

1.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow a)\vee(a\vee b\leftrightarrow \overline{b})$; $F_2=(a\vee b\leftrightarrow c)\to(\overline{a}\wedge\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow a)\wedge(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$; $F_4=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{b})\wedge(b\wedge c\leftrightarrow\overline{c})$.	2.	$F_1=(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow\overline{a})\vee(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$; $F_2=(a\wedge b\leftrightarrow c)\to(c\to a\vee b)$; $F_3=(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow\overline{a})\wedge(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$; $F_4=(c\wedge b\leftrightarrow\overline{a})\wedge(a\wedge\overline{c}\leftrightarrow c)$.
3.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow b)\vee(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})$; $F_2=(a\wedge b\leftrightarrow c)\to(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow b)\wedge(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})$; $F_4=(c\wedge b\leftrightarrow a)\wedge(b\vee a\leftrightarrow\overline{b})$.	4.	$F_1=(b\leftrightarrow a)\vee(\overline{a}\leftrightarrow b)$; $F_2=(a\wedge b\leftrightarrow c)\to(c\wedge b\to a)$; $F_3=(b\leftrightarrow a)\wedge(\overline{a}\leftrightarrow\overline{b})$; $F_4=(c\vee b\leftrightarrow a)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b)$.
5.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow a)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}\leftrightarrow b)$; $F_2=(\overline{a}\wedge\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})\to(a\vee b\leftrightarrow c)$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow a)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b)$; $F_4=(a\wedge c\leftrightarrow\overline{a})\wedge(b\wedge c\leftrightarrow\overline{c})$.	6.	$F_1=(a\leftrightarrow b)\vee(a\leftrightarrow\overline{b})$; $F_2=(a\wedge b\leftrightarrow c)\to(a\wedge c\to b)$; $F_3=(b\leftrightarrow a)\wedge(\overline{a}\leftrightarrow b)$; $F_4=(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})\wedge(a\wedge c\leftrightarrow\overline{c})$.
7.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow b)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}\leftrightarrow a)$; $F_2=(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})\to(a\wedge b\leftrightarrow c)$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow a)$; $F_4=(c\vee b\leftrightarrow a)\wedge(a\wedge b\leftrightarrow\overline{b})$.	8.	$F_1=(b\leftrightarrow a)\to(\overline{a}\leftrightarrow\overline{b})$; $F_2=(a\vee b\leftrightarrow c)\vee(a\vee b\to\overline{c})$; $F_3=(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})\leftrightarrow(a\to b)$; $F_4=(a\vee b\leftrightarrow c)\wedge(a\vee b\leftrightarrow\overline{c})$.
9.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{a})\vee(a\vee b\leftrightarrow b)$; $F_2=(a\to b\leftrightarrow c)\to(a\wedge\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{a})\wedge(a\vee b\leftrightarrow b)$; $F_4=(c\vee b\leftrightarrow a)\wedge(a\vee c\leftrightarrow\overline{c})$.	10.	$F_1=(\overline{b}\leftrightarrow\overline{a})\to(a\leftrightarrow b)$; $F_2=(a\wedge b\leftrightarrow c)\vee(a\wedge b\leftrightarrow\overline{c})$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{b})\leftrightarrow(b\to a)$; $F_4=(a\wedge b\leftrightarrow c)\wedge(a\wedge b\leftrightarrow\overline{c})$.
11.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{b})\vee(a\vee b\leftrightarrow a)$; $F_2=(a\wedge\overline{b}\leftrightarrow\overline{c})\to(a\to b\leftrightarrow c)$; $F_3=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{b})\wedge(a\vee b\leftrightarrow a)$; $F_4=(a\wedge b\leftrightarrow\overline{a})\wedge(b\wedge c\leftrightarrow\overline{b})$.	12.	$F_1=(a\wedge b\leftrightarrow a)\to(a\vee b\leftrightarrow b)$; $F_2=(c\vee b\leftrightarrow a)\vee(c\vee\overline{b}\to\overline{a})$; $F_3=((b\to a)\leftrightarrow\overline{b})\leftrightarrow(a\wedge b)$; $F_4=(c\vee b\leftrightarrow a)\wedge(c\vee b\leftrightarrow\overline{a})$.

Задание 3.

Построить таблицу истинности, по таблице истинности найти СДНФ, СКНФ. Исходные данные приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

1. $\left(\left(x_1 \vee x_2\right) \leftrightarrow x_3\right) \rightarrow \left(\left(x_1 \wedge x_2\right) \vee x_3\right)$.	2. $\left(\left(x_1 \leftrightarrow x_2\right) \rightarrow x_3\right) \vee \left(\left(x_1 \rightarrow x_2\right) \vee x_3\right)$.
3. $\left(\left(x_1 \vee x_2\right) \wedge x_3\right) \leftrightarrow \left(\left(x_1 \wedge x_2\right) \vee \overline{x_3}\right)$.	4. $\left(x_1 \rightarrow \left(x_1 \vee x_2\right)\right) \leftrightarrow \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)$.
5. $\left(\left(x_1 \wedge x_2\right) \rightarrow x_3\right) \wedge \left(\left(x_1 \vee x_2\right) \rightarrow \left(x_2 \wedge x_3\right)\right)$.	6. $\left(\overline{x_2} \rightarrow x_3\right) \wedge \left(\left(\overline{x_1} \vee x_2\right) \rightarrow \left(x_2 \wedge \overline{x_3}\right)\right)$.
7. $\left(\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\right) \leftrightarrow \left(x_1 \wedge x_3\right)\right) \wedge \left(x_2 \vee x_3\right)$.	8. $\left(x_3 \leftrightarrow \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}\right)\right) \wedge \left(x_2 \rightarrow x_3\right)$.
9. $\left(\overline{x_1} \rightarrow \left(x_2 \leftrightarrow x_3\right)\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2\right)$.	10. $\left(x_1 \vee \left(x_2 \leftrightarrow x_3\right)\right) \rightarrow \left(\overline{x_1} \wedge x_2\right)$.
11. $\left(\left(x_1 \wedge x_3\right) \vee x_2\right) \rightarrow \left(\left(x_1 \leftrightarrow x_2\right) \vee x_3\right)$.	12. $\left(x_1 \vee x_2\right) \leftrightarrow \left(\left(x_1 \rightarrow x_3\right) \vee \overline{x_3}\right)$.

Лабораторная работа № 4

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. ФУНКЦИИ ПРОВОДИМОСТИ

Задание 1.

Для булевой функции, приведенной в табл. 4.1, найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму и минимизировать ее при помощи карт Карно.

Таблица 4.1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0000	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0001	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0010	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0011	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
0100	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0101	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0110	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0111	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1001	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1010	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1011	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1100	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1101	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1110	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1111	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1

Задание 2.

По заданной функции проводимости, приведенной в табл. 4.2, построить наиболее простую схему.

Задание 3.

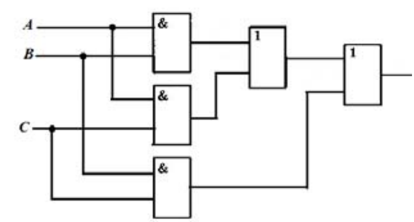
По заданной схеме, приведенной в табл. 4.3, построить функцию проводимости и определить, при каких значениях переменных тока в сети не будет.

Таблица 4.2

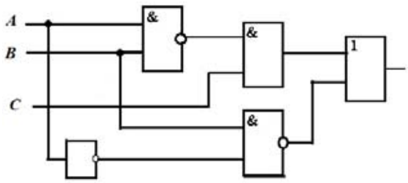
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
000	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
001	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
010	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
011	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
100	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
101	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
110	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
111	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0

Таблица 4.3

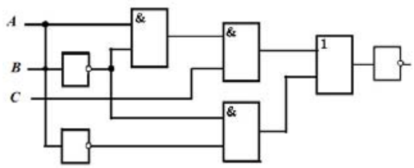
1.



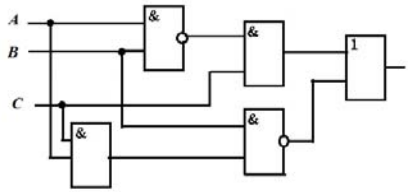
2.



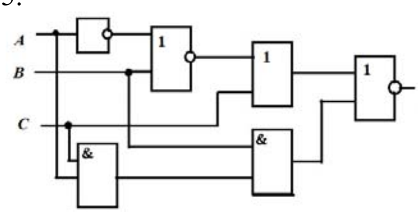
3.



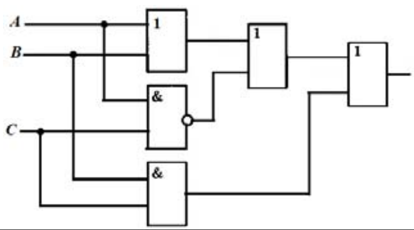
4.

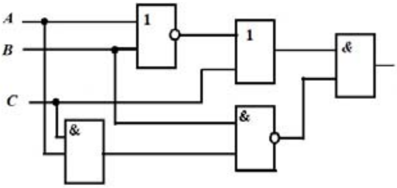
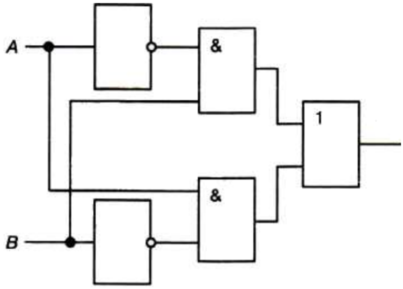
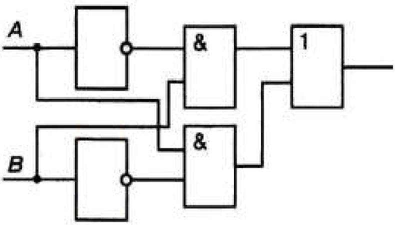
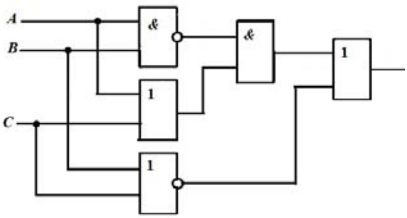
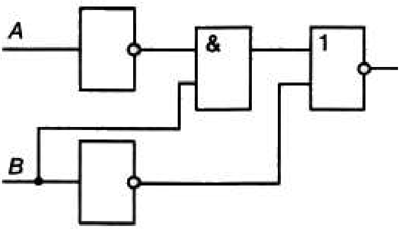
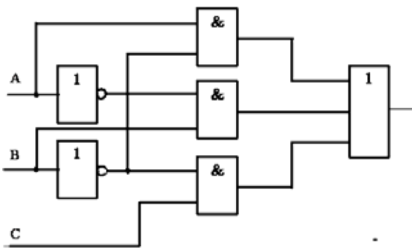


5.



6.



7.  A B C 1 1 & & &	8.  A B & & 1
9.  A B & & 1	10.  A B C & & 1 1 1
11.  A B & 1	12.  A B C 1 1 & & & 1

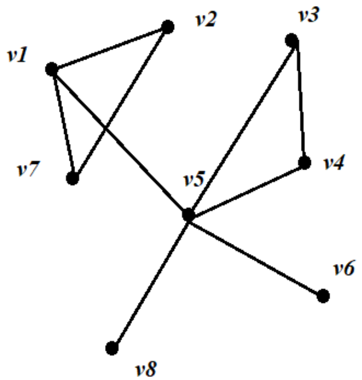
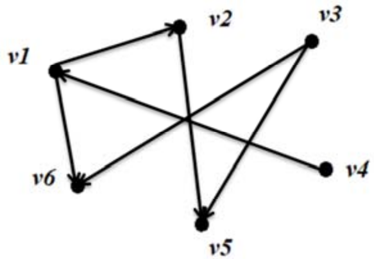
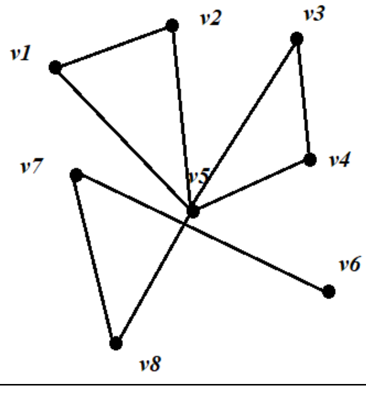
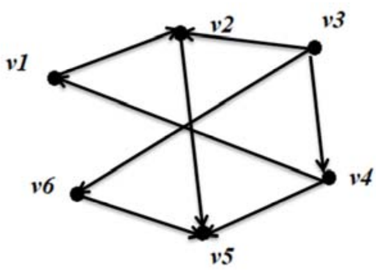
Лабораторная работа № 5

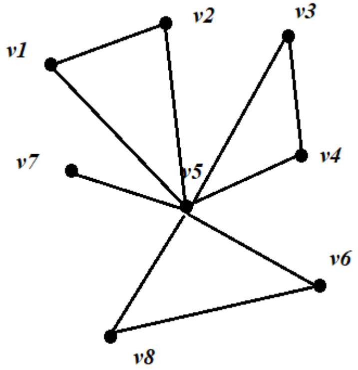
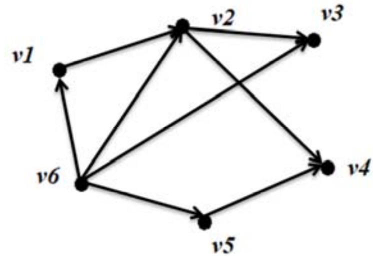
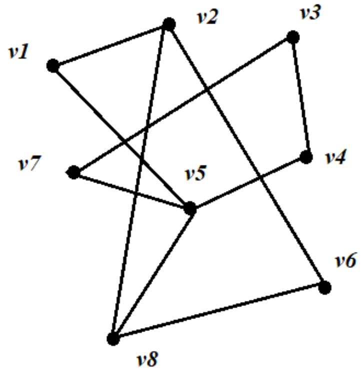
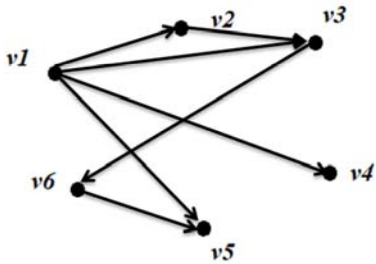
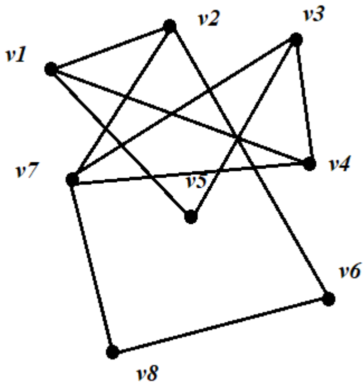
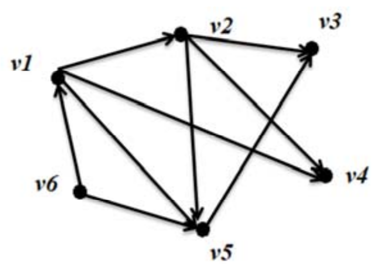
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Задание 1.

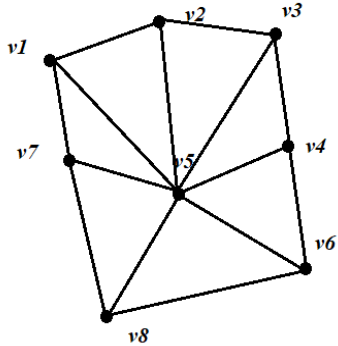
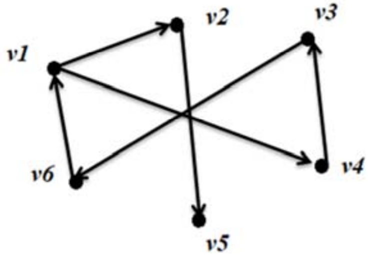
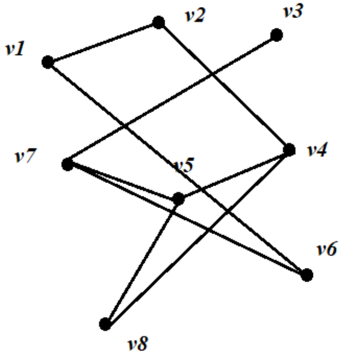
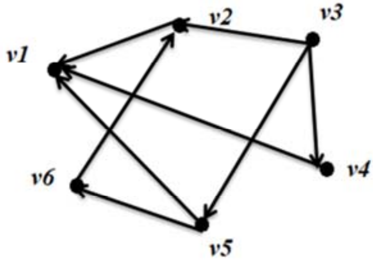
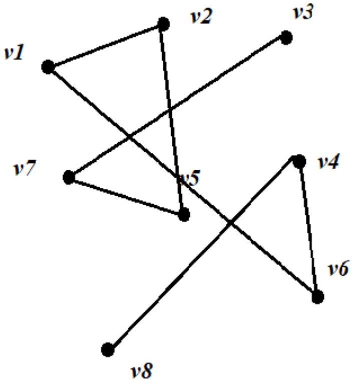
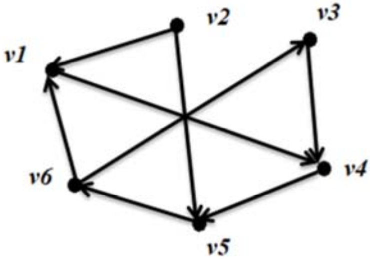
Составить матрицу смежности и матрицу инцидентности для неориентированного (а) и ориентированного (б) графов, приведенных в табл. 5.1.

Таблица 5.1

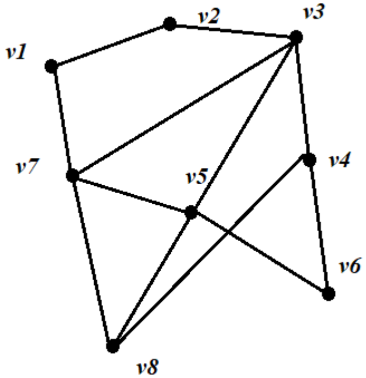
№	(а)	(б)
1.		
2.		

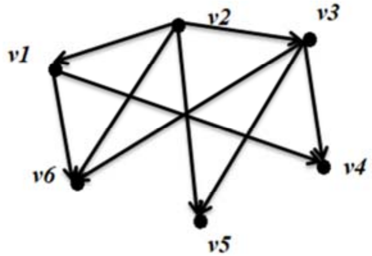
№	(а)	(б)
3.	v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8	v1 v2 v3 v4 v5 v6
4.	v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8	v1 v2 v3 v4 v5 v6
5.	v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8	v1 v2 v3 v4 v5 v6

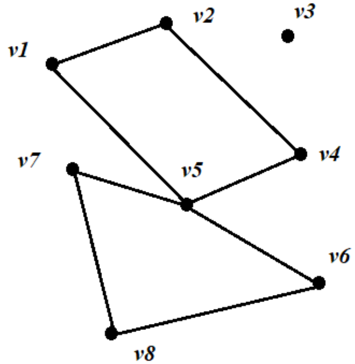
Продолжение табл. 5.1

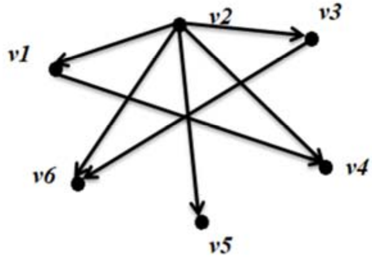
№	(а)	(б)
6.		
7.		
8.		

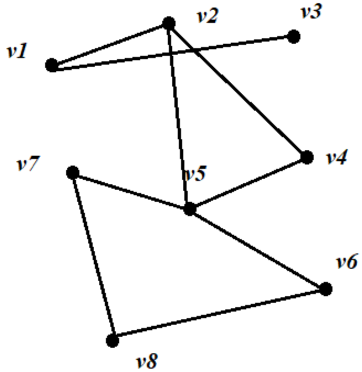
Продолжение табл. 5.1

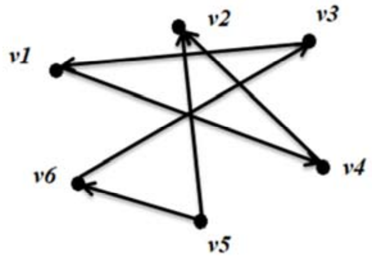
<table>
<tr><th>№</th><th>(а)</th><th>(б)</th></tr>
<tr><td>9.</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>


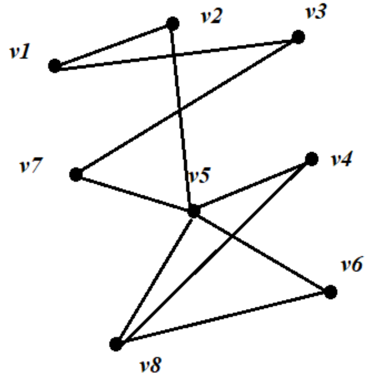
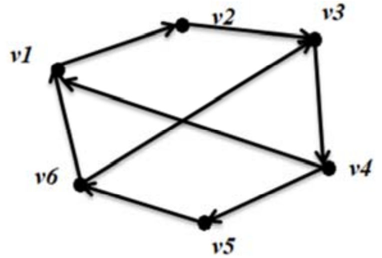
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Окончание табл. 5.1

№	(а)	(б)
12.		

Задание 2.

Построить графы по заданным матрицам смежности (а) и инцидентности (б), приведенных в табл. 5.2.

Таблица 5.2

№	(а)	(б)
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 5.2

№	(а)	(б)
3.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 5.2

№	(а)	(б)
8.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 3.

Граф задан при помощи матрицы весов. Изобразить этот граф при помощи множества вершин и ребер, а также, используя алгоритм Крускала, найти для него минимальное остовное дерево. Исходные данные приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

1.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 5.3

9.	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 4.

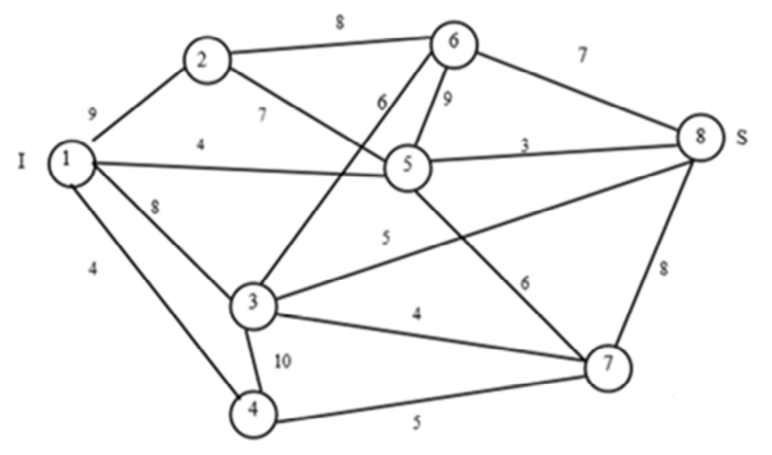
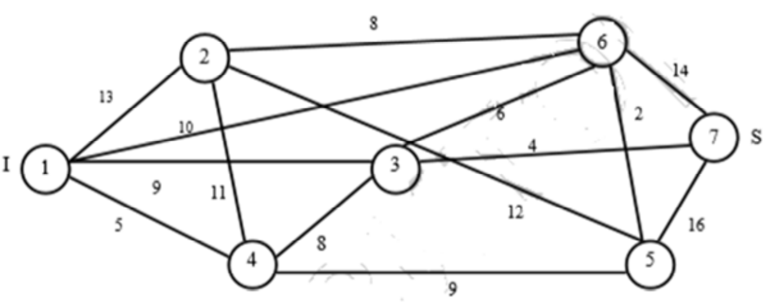
В построенном в задании 3 графе найти кратчайший путь от вершины v_1 к остальным вершинам, используя алгоритм Дейкстры.

Лабораторная работа № 6

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ. АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

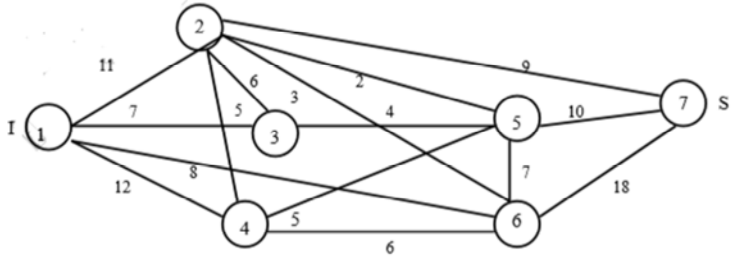
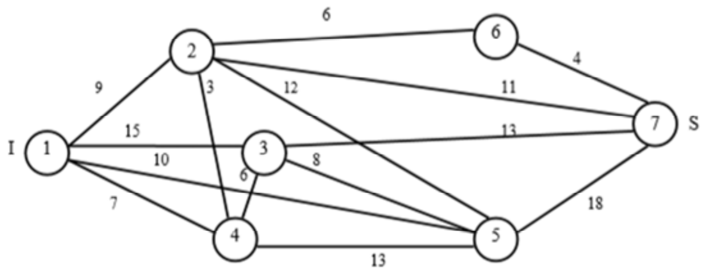
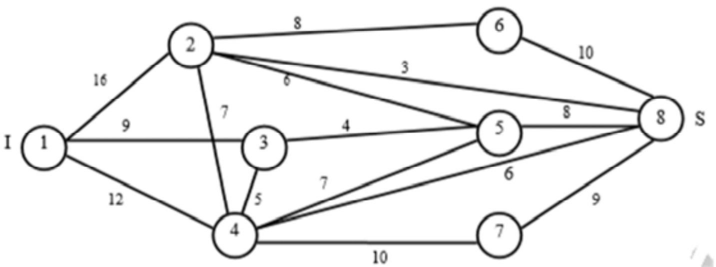
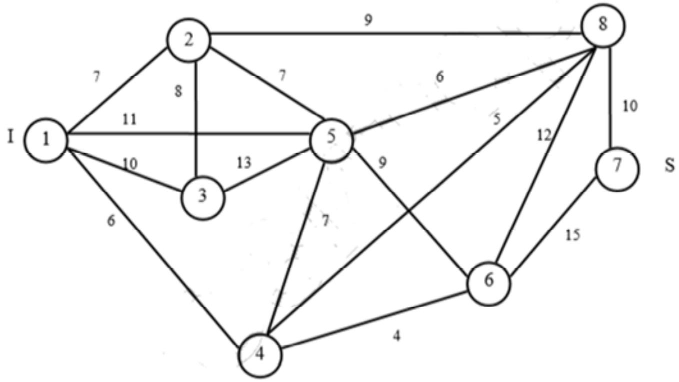
Задана транспортная сеть в виде графа, приведенного в табл. 6.1. Требуется найти максимальный поток из источника I в сток S при помощи алгоритма Форда-Фалкерсона*.

Таблица 6.1

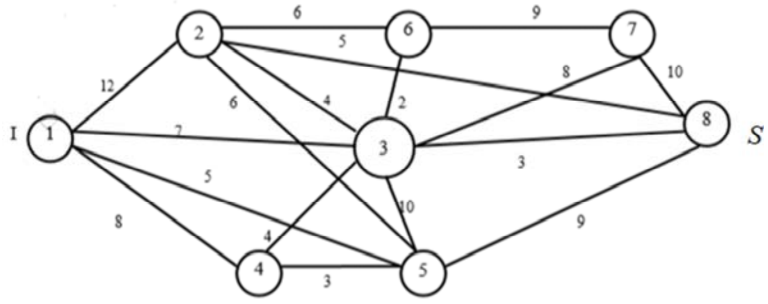
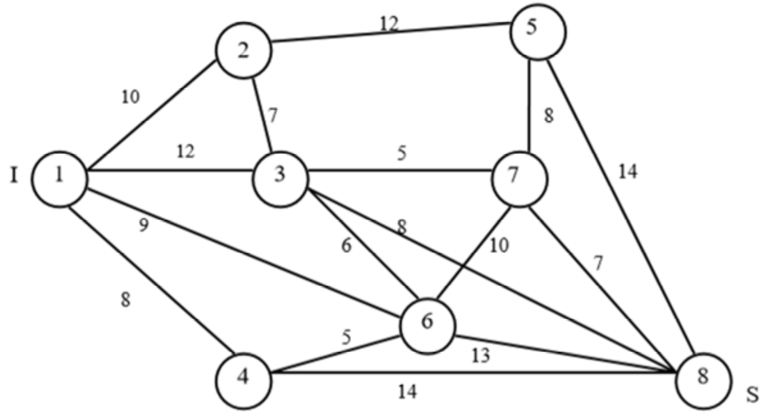
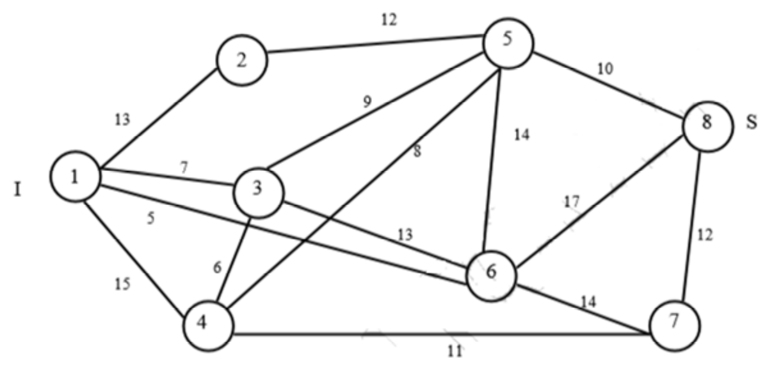
1.	
2.	

---

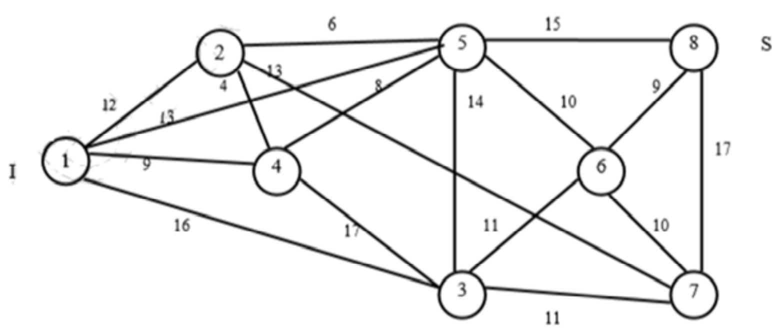
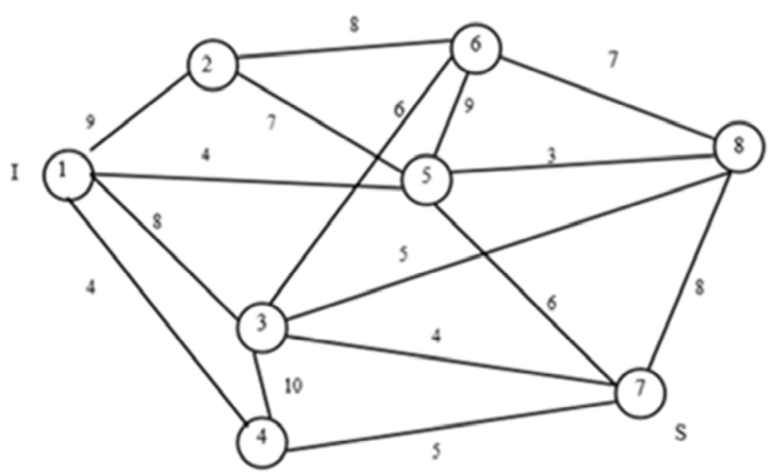
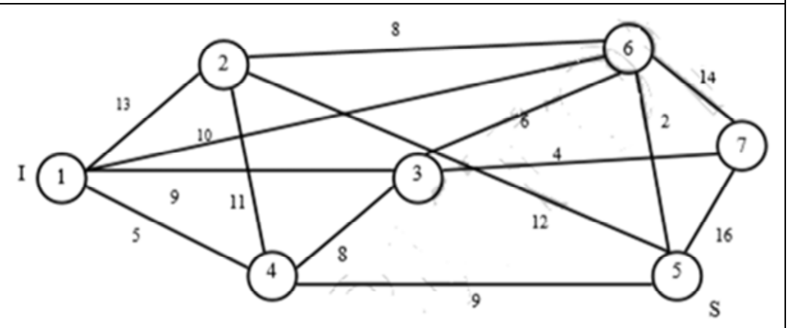
* Указать минимальный разрез.

3.	2 11 6 3 5 2 9 7 S I 1 7 3 4 5 10 12 8 7 18 4 5 6 6
4.	6 6 2 4 9 3 12 11 I 1 15 3 13 7 S 10 8 6 7 18 4 5 13
5.	8 6 2 10 16 3 6 7 8 I 1 9 3 4 5 8 S 7 6 12 5 9 4 7 10
6.	9 2 8 7 8 7 6 10 11 5 12 I 1 5 7 S 10 13 9 3 6 7 15 6 4 4

Продолжение табл. 6.1

7.	
8.	
9.	

Окончание табл. 6.1

10.	
11.	
12.	

Лабораторная работа № 7

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вариант 1

Задание 1.

Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй – 4, а четвертый 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

Задание 2.

Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

Задание 3.

Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, чтобы: 3 дня отправлялись по 2 поезда в день, 2 дня – по 1 поезду в день, 2 дня – по 3 поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний?

Задание 4.

Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Вариант 2

Задание 1.

На 3 курсе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных предметов?

Задание 2.

На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

Задание 3.

Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

Задание 4.

В чемпионате мира по шахматам участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

Вариант 3

Задание 1.

В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них независимо друг от друга и с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

Задание 2.

В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Сколькими способами можно вынуть из ящика 2 шара одного цвета? (Рассмотреть случай, когда шары пронумерованные и не пронумерованные).

Задание 3.

Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

Задание 4.

Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом (шары одного цвета неотличимы друг от друга)?

Вариант 4

Задание 1.

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы набрать нужный номер?

Задание 2.

На пяти одинаковых карточках написаны буквы л, м, о, о, т. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово «молот»?

Задание 3.

В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Сколькими способами можно выбрать из нее по два представителя разного пола?

Задание 4.

На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Вариант 5

Задание 1.

Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Задание 2.

В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

Задание 3.

Четыре игральных кубика подбрасывают 1 раз. Сколько существует различных комбинаций выпадения цифр на их гранях?

Задание 4.

Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из состава конференции, на которой присутствуют 15 человек?

Вариант 6

Задание 1.

Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма?

Задание 2.

На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках л, на остальных трех и. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово «лилии»?

Задание 3.

Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Задание 4.

Каких цифр больше: нечетных пятизначных или четных пятизначных? Ответ обосновать при помощи комбинаторных вычислений.

Вариант 7

Задание 1.

Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами можно это сделать?

Задание 2.

В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Задание 3.

Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Задание 4.

На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова «талант» – по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово «талант»?

Вариант 8

Задание 1.

Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

Задание 2.

В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

Задание 3.

Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Задание 4.

Из букв слова «ротор», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Вариант 9

Задание 1.

Сколькими способами можно попасть из точки А в точку С, если можно двигаться лишь в право и вверх по отрезкам сети?

Задание 2.

Сколько шестизначных номеров можно составить из цифр от 0 до 9, учитывая, что все цифры в номере различны?

Задание 3.

На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «Минск»?

Задание 4.

В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

Вариант 10

Задание 1.

Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Задание 2.

Сколько различных перестановок букв можно сделать в слове «Колокол»?

Задание 3.

На одной из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Задание 4.

Сколькими способами можно положить 28 различных открыток в 4 одинаковых конверта так, чтобы в каждом конверте лежало по 7 открыток?

Вариант 11

Задание 1.

Сколько различных наборов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Задание 2.

Машинный алфавит может содержать 10 различных символов. Сколькими способами можно составить из него различные слова, если слово может содержать 1, 2 или 3 символа?

Задание 3.

Научное собрание состоит из 20 человек. Сколькими способами можно выбрать из них одного председателя и двух его заместителей?

Задание 4.

Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 команд, если известно, что никакие две команды не набрали поровну очков?

Вариант 12

Задание 1.

В шахматном турнире принимало участие 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего партий было сыграно?

Задание 2.

Сколько различных пятизначных номеров можно составить из 5 цифр и 3 букв?

Задание 3.

Взломщик должен подобрать шестизначный код, состоящий из трех цифр от 0 до 9 и трех букв. Он помнит лишь то, что первые два символа – цифры. Сколько способов подбора кода нужно произвести взломщику?

Задание 4.

Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани девяти цветов и все стулья должны быть разного цвета?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончарова, Г. А. Элементы дискретной математики : учебное пособие / Г. А. Гончарова, А. А. Мочалин. – М. : Форум: ИНФРА-М, 2017.
2. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс / Б. Н. Иванов. – М. : Известия, 2011. – 512 с.
3. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 2016. – 319 с.
4. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М. : Издательство МАИ, 2018. – 264 с.
5. Спирина, М. С. Дискретная математика : учебник / М. С. Спирина. – М. : Академия, 2009.
6. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 2006. – 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для студентов специальности 1-55 01 01
«Интеллектуальные приборы, машины и производства»
и специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Составитель
ШПУРГАЛОВА Марина Юрьевна

Редактор *А. В. Кочемарова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 21.02.2023. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,57. Уч.-изд. л. 1,88. Тираж 100. Заказ 18.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.