

В. С. ПОЛЕНОВ, А. В. ЧИГАРЕВ

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Задачи о распространении упругих волн при неразрушающих испытаниях и излучении звука развивающимися трещинами в однородных средах рассмотрены в [1, 2]. Работа [3] посвящена влиянию неоднородности материала и случайного нагружения на механику роста усталостных трещин. Обзор методов решения динамических задач теории упругости дан в [4].

На основе линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями [5] и теории разрывов [6, 7] рассматривается распространение поверхностей разрывов в результате образования трещин.

Из принципа минимума функционала Ферма получена система дифференциальных уравнений для геометрических характеристик фронта волны в неограниченной среде с начальными напряжениями и на свободной поверхности, позволяющая замкнуть уравнения для изменения интенсивностей волн.

Показано влияние неоднородности среды и начальных напряжений на скорость распространения волн, изменение интенсивности и геометрические характеристики фронта волны.

§ 1. Рассмотрим упругую неоднородную среду, находящуюся в начальном напряженном состоянии с нагрузкой  $\sigma_{il}^0$ , приложенной на бесконечности. При  $t=0$  на некоторой поверхности  $\Sigma_0$  возник скачок напряжений от  $\sigma^0$  до 0, который для  $t>0$  распространяется в виде волны (ВОЛНА РАЗГРУЗКИ). Поверхность  $\Sigma_0$  есть результат возникновения трещины.

Под волной скачка напряжений понимаем изолированную однопараметрическую поверхность  $\Sigma(t)$ , распространяющуюся в среде, на которой перемещения непрерывны, а напряжения, скорости перемещений и начальные напряжения терпят разрыв. Параметры  $\lambda(\mathbf{x})$ ,  $\mu(\mathbf{x})$  и их градиенты непрерывны, плотность  $\rho(\mathbf{x})$  может терпеть разрыв.

Распространение волн описывается соотношениями:

$$\sigma_{im,i} - u_{m,ni}\sigma_{in}^0 - u_{m,n}\sigma_{in,i}^0 = \rho \frac{dv}{dt} \quad (m \neq n), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(\mathbf{x}) u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(\mathbf{x}) (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

где  $\sigma_{in}$  — компоненты тензора напряжений;  $U_i$  — перемещения;  $\sigma_{in}^0$  — компоненты тензора начальных напряжений.

На волновой поверхности  $\Sigma(t)$  с учетом начальных напряжений должны выполняться динамические соотношения, которые определяют непрерывность количества движения

$$\rho G = \rho^+ (G - v_n^+), \quad (3)$$

$$[\sigma_{im}] v_i = -\rho G [v_m] - G^{-1} [v_m \sigma_{in}^0] v^i v^n = -\rho^+ G v_m^+ - G^{-1} v_m^+ [\sigma_{in}^0] v^i v^n. \quad (4)$$

Здесь  $v^i$  — компоненты единичной нормали к поверхности  $\Sigma(t)$ ;  $G$  — нормальная скорость движения поверхности;  $\rho^+$ ,  $v^+$  — значение плотности и компонент скорости на передней стороне поверхности  $\Sigma(t)$ ; Скобки [...] обозначают разность значений величины на разных сторонах поверхности  $\Sigma(t)$ .

Продифференцировав (1) по времени и записав его в разрывах с

учетом динамических соотношений (3), (4) и условий совместности первого порядка на поверхности  $\Sigma(t)$ , получим

$$(\lambda + \mu) [v_k] v_k v_m + \mu [v_m] - [v_m \sigma_{in}^0] v_i v_n = \rho G^2 [v_m]. \quad (5)$$

Предполагая  $[v_k] v_k \neq 0$  на поверхности  $\Sigma(t)$ , умножим (5) на  $v_m$  и просуммируем по повторяющемуся индексу, получим

$$\rho G_i^2 = \lambda + 2\mu - [\sigma_{in}^0] v_i v_n. \quad (6)$$

С другой стороны, если  $[v_k] v_k = 0$  на  $\Sigma(t)$ , то из соотношений (5) следует

$$\rho G_i^2 = \mu - [\sigma_{in}^0] v_i v_n. \quad (7)$$

Таким образом, в рассматриваемой неоднородной упругой среде с начальными напряжениями существует два типа волн: безвихревые (6) и эквиволлюминальные (7), которые в каждой точке среды имеют скорости продольных и поперечных волн.

Записывая закон Гука (2) и уравнения движения (1) в разрывах с учетом условий совместности первого и второго порядков [6, 7], получим дифференциальное уравнение для изменения интенсивности распространения волн

$$\frac{d \ln \omega^p}{ds} = \Omega_p - \frac{1}{2} \frac{d \ln G_p}{ds} + (\rho G_p^2)^{-1} [\sigma_{in}^0] v_i v_n \Omega_p \quad (p = l, t), \quad (8)$$

$s$  — расстояние вдоль траектории луча;  $\Omega_p$  — средняя кривизна волновой поверхности;  $[v_i] v_i = \omega$ .

Уравнения (8) содержат среднюю кривизну  $\Omega_p(\mathbf{x})$ , которая изменяется в процессе распространения поверхности  $\Sigma(t)$ , поэтому они не замкнуты. Для замыкания уравнений (8) необходимо получить уравнение для средней кривизны  $\Omega_p$ .

Средняя кривизна  $\Omega$  связана с первой  $g^{\alpha\beta}$  и второй  $b_{\alpha\beta}$  квадратичными формами поверхности  $\Sigma(t)$  соотношением [6]

$$2\Omega = b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Проведя  $\delta$ -дифференцирование по времени в соотношении (9) и учитывая, что параметры внутренней геометрии волновых поверхностей удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds} = -2b_{\alpha\beta}; \quad \frac{dg^{\alpha\beta}}{ds} = 2b^{\alpha\beta}; \quad (10)$$

$$\frac{db_{\alpha\beta}}{ds} = (c_p \gamma_p)_{,\alpha\beta} + (\ln c_p \gamma_p)_{,\alpha} (\ln c_p \gamma_p)_{,\beta} - g^{\eta\delta} b_{\alpha\eta} b_{\beta\delta};$$

$$\frac{db^{\alpha\beta}}{ds} = g^{\alpha\eta} g^{\beta\delta} [(\ln c_p \gamma_p)_{,\eta\delta} + (\ln c_p \gamma_p)_{,\eta} (\ln c_p \gamma_p)_{,\delta}] +$$

$$+ 3g_{\eta\delta} b^{\alpha\eta} b^{\beta\delta}; \quad \gamma_p = (1 - \lambda_p)^{1/2},$$

получим уравнение для средней кривизны в виде

$$\frac{d\Omega}{ds} = 2\Omega^2 - K + \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2 - R_1), \quad (11)$$

где  $K$  — гауссова кривизна поверхности, которая находится из формулы

$$\frac{dK}{ds} = 2\Omega K + 2\Omega (Q_1 - Q_2 - R_1) - P_1 + P_2 + R_2. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$Q_1 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} g^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta}; \quad Q_2 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} g^{\alpha\beta} \lambda_p^{1/2} (\lambda_p^{1/2} c_p)_{,\alpha\beta};$$

$$R_1 = \gamma_p^{-4} g^{\alpha\beta} \lambda_p (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\alpha} (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\beta}; \quad P_1 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} b^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta};$$

$$P_2 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} b^{\alpha\beta} \lambda_p^{1/2} (\lambda_p^{1/2} c_p)_{,\alpha\beta}; \quad c_p^2 = \Lambda_p \sigma^{-1};$$

$$R_2 = \gamma_p^{-4} b^{\alpha\beta} \lambda_p (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\alpha} (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\beta};$$

$$\Lambda_l = \lambda + 2\mu; \quad \Lambda_t = \mu; \quad \lambda_p = [\sigma_{in}^0] \mathbf{v}_i \mathbf{v}_n \Lambda_p^{-1}.$$

В уравнения (11), (12), определяющие изменение средней и гауссовой кривизн волновой поверхности  $\Sigma(t)$  в упругой среде с начальными напряжениями с переменной скоростью  $G_p = c_p (1 - \lambda_p)^{1/2}$  вдоль луча, входят члены  $c_{p,\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ ;  $c_{p,\alpha\beta} b^{\alpha\beta}$ , являющиеся инвариантами поверхности  $\Sigma(t)$ . Первый называется дифференциальным параметром Бельтрами и связан с кривизной луча, а второй зависит еще и от кручения луча.

Уравнения лучей определяются из принципа минимума функционала Ферма [6, 7] и имеют вид

$$\frac{dv^i}{ds} = - (\ln G)_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x_\beta^i; \quad \frac{dx^i}{ds} = v^i \quad (13)$$

Вектор  $\{x_\beta^i\} = \tau_\beta$ , касательный к поверхности  $\Sigma(t)$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau_\alpha}{ds} = (\ln c_p \gamma_p)_{,\alpha} v - g^{\delta\gamma} b_{\delta\alpha} \tau_\gamma. \quad (14)$$

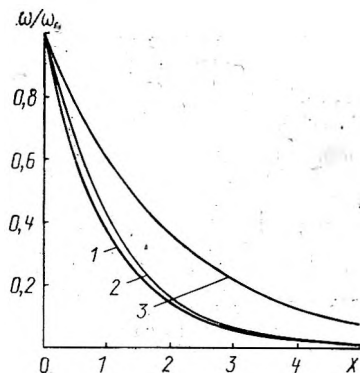
Система уравнений (8), (10) — (14) определяет изменение интенсивности волны (безвихревой и эквиволуминальной) в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями, параметров внутренней геометрии фронта волны и луч, вдоль которого оно происходит.

Если в уравнениях (8), (10) — (14) начальные напряжения отсутствуют ( $\sigma_{ij}^0 = 0$ ), то данная система полностью совпадает с системой уравнений (16) и (17) работы [6].

§ 2. Рассмотрим слоистую среду, характеризующуюся упругими модулями  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ , плотностью  $\rho(x)$  и начальными напряжениями  $\sigma_{ij}^0(x, t)$ . В момент времени  $t=0$  в плоскости  $x_2 0 x_3$  происходит расслоение среды. Волна разгрузки распространяется вдоль оси  $0x_1$ .

Тогда скорость распространения волны имеет вид

$$G_l = c_l \gamma_l; \quad \lambda_l = [\sigma_{x_1 x_1}^0] (\lambda + 2\mu)^{-1}. \quad (15)$$



Зависимость интенсивности волны  $\omega/\omega_0$  от переменной  $x = x_1 d^{-1}$  при  $\lambda_{0l} = 0$  (1), 0,3 (2), 0,5 (3)

Так как  $g_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} = 0$  и при  $X_1 = 0$   $\Omega_0 = K_0 = 0$ , то из уравнений (10) получаем, что  $\Omega = K = 0$ , а из уравнения (8) следует

$$\frac{d\omega^l}{dx_1} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} \ln(c_l \gamma_l) \omega^l. \quad (16)$$

Из уравнения (16) находим зависимость интенсивности волны от скорости и начальных напряжений:

$$\omega^l = \omega_0^l \left( \frac{c_l \gamma_l}{c_{0l} \gamma_{0l}} \right)^{-1/2}; \quad \gamma_{0l} = (1 - \lambda_{0l})^{1/2}, \quad (17)$$

где  $\omega_0^l$ ,  $c_{0l}$ ,  $\lambda_{0l}$  — значения функций  $\omega^l$ ,  $c_l$ ,  $\lambda_l$  при  $x_1 = 0$ .

Для конкретного случая неоднородности имеем

$$c_l(x) = c_{0l} \exp x; \quad \lambda_{0l} = 2 - \exp(-2x); \quad x = x_1 d^{-1},$$

$d$  — характерный масштаб изменения поля неоднородности и начальных напряжений.

На рисунке приведена зависимость интенсивности волны от переменной  $x$  при  $\lambda_{0l} = 0; 0,3; 0,5$ .

### Выводы

1. Получена замкнутая система уравнений, описывающая изменение интенсивности, геометрии фронтов и лучей упругих волн в неоднородной среде с начальными напряжениями.

2. Из уравнений следует, что, меняя напряженное состояние, можно управлять направлением распространения лучей и параметрами внутренней геометрии фронта волны. Это позволяет формировать оптимальное расположение точек наблюдения скачков акустической эмиссии.

3. В задаче о распространении скачка напряжений от расслоения среды получена зависимость интенсивности волны от неоднородности (через скорость) и начальных напряжений, которая позволяет оценивать величину совместного и раздельного влияния неоднородности и начальных напряжений на интенсивность.

4. Основное влияние на изменение интенсивности для большинства известных материалов оказывает неоднородность, так как  $\lambda_{0l} < 1$ .

### Summary

The nonstationary wave propagation problem in heterogeneous continua has been considered within the scope of linearized spatial elastic theory. The initial stresses were taken into account. The closed system of differential equations for intensity and geometrical wave parameters has been obtained.

As an example, wave propagation in layered continua is considered. There is a relation between wave intensity and velocity, and the initial stresses.

### Литература

1. Ахенбах Дж. // Механика деформируемого твердого тела. М., 1983. С. 324—345.
2. Крылов В. В. // Акуст. журн. 1983. Т. 29, вып. 6. С. 790—798.
3. Шериватских, Самбандхан, Бхарухе-Рейд. Влияние неоднородности материалов и случайного нагружения на механику роста усталости трещин // Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. 1986. № 3. С. 89—103.
4. Добрушкин В. А. Краевые задачи динамики теории упругости для клиновидных областей. Минск, 1988.
5. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев, 1986. Т. 1.
6. Чигарев А. В. // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 6. С. 37—41.
7. Чигарев А. В. // Акустическая эмиссия в материалах и конструкциях. Ростов, 1989. С. 46—51.