ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 4 2009
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.977

А. В. МЕТЕЛЬСКИЙ, О. А. ПАНАСИК

ИДЕАЛЬНАЯ И УСЛОВНАЯ ИДЕАЛЬНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

(*Поступила в редакцию 18.12.2008*)

Введение. Рассмотрим систему

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t),\ t \in T = [0,t_1], \tag{1}$$

$$x(0) = q, q \in R^n \tag{2}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t). \tag{3}$$

Здесь A_0, A – постоянные $(n \times n)$-матрицы, образующие регулярную пару (можно указать такое комплексное число λ, что $\det[\lambda A_0 - A] \neq 0$); G – постоянная $(r \times n)$-матрица; $x(t), t \in T$, – непрерывная функция, а $A_0x(t), t \in T$, – непрерывно дифференцируемая функция; t_1 – заданный положительный момент времени.

Начальный вектор q будем называть допустимым для системы (1) тогда и только тогда, когда выполняется

$$[E - C_0A_0]q = 0, \tag{4}$$

где C_0 – первый элемент системы базовых матриц $C_i, i = \overline{0,k}$, $k = \mathrm{index}(A_0, A)$ [1, с. 26–28].

В случае $A_0 = E$ (единичная матрица) различные подходы для исследования задач наблюдения предложены в монографиях [2–4]. Задача полной наблюдаемости регулярной алгебро-дифференциальной системы (1) – (3), т. е. возможности определения допустимого начального состояния (2) системы (1) по данным $\{y(t): t \geq 0\}$ о поведении выходных величин в «будущем», изучалась в работах [5–8]. В статье [5] свойство наблюдаемости системы (1) – (3) рассмотрено в случае $A = E$. Спектральный критерий полной наблюдаемости регулярной системы (1) – (3) доказан в [6, 7]. Параметрический критерий типа Калмана разрешимости указанной задачи, записанный в терминах исследуемой системы и базовых матриц $C_i, i = \overline{0,k}$, приведен в [8]. Там же указано, что для любого начального вектора q полностью наблюдаемой системы (1) – (3), определяемого (4), найдется $(r \times n)$-матричная функция $\overline{V}(\tau) = [V_1(\tau); V_2(\tau); \ldots; V_n(\tau)]$ с элементами ограниченной вариации на T такая, что $x'(0) = q' = \int_0^{t_1} y'(\tau)d\overline{V}(\tau)$, т. е. система является полностью наблюдаемой по Н. Н. Красовскому. В статье [9] исследованы задачи идентификации для объекта (1) – (3).

Впервые задача идеальной наблюдаемости в случае $A_0 = E$ была рассмотрена в [10]. Общий подход исследования задачи идеальной наблюдаемости обыкновенных дифференциальных систем предложен в [11]. Там же решена задача условной идеальной наблюдаемости.

В настоящей статье исследуются свойства идеальной наблюдаемости и условной идеальной наблюдаемости регулярных алгебро-дифференциальных систем.

1. Идеальная наблюдаемость алгебро-дифференциальных систем. Пусть объект наблюдения описывается системой

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), t \in T, \tag{5}$$

$$x(0) = q, q \in R^n \tag{6}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t), \tag{7}$$

где B $(B \neq 0)$ – постоянная матрица размером $n \times m$; $u(t), t \in T$, – m-вектор управления, выбираемый из множества допустимых управлений U_{A_0}, которое состоит из согласованных с начальным условием (6) достаточно гладких функций $u(t), t \in T$, таких, что

$$[E - C_0A_0]q = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} [C_iBu(t)]\Bigg|_{t=0}. \tag{8}$$

Отметим, что если $\det A_0 \neq 0$, то множество U_{A_0} состоит из всех кусочно-непрерывных функций $u(t), t \in T$.

Задача идеальной наблюдаемости для объекта (5) – (7) состоит в однозначном восстановлении по выходу $y(t)$, $t \in T$, любого начального состояния $q \in R^n$, удовлетворяющего системе (5) – (7) независимо от произвольного допустимого управляющего воздействия $u(\cdot) \in U_{A_0}$.

Определение 1. Систему (5) – (7) назовем *идеально наблюдаемой*, если нулевому выходу $y(t) \equiv 0$, $t \in T$, независимо от любого допустимого управляющего воздействия $u(\cdot) \in U_{A_0}$, соответствует только нулевое решение $x(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Дальше будем считать, что матрица B обратима слева ($Bu = 0 \Leftrightarrow u = 0$) и $r \geq m$.

Определение 1, с учетом обратимости слева матрицы B, равносильно следующему утверждению: однородная алгебро-дифференциальная система

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} - Ax(t) - Bu(t) = 0, \ Gx(t) = 0 \tag{9}$$

имеет только тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Теорема 1. *Система* (5) – (7) *идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} K(\lambda) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda A_0 - A & -B \\ G & 0 \end{bmatrix} = n + m \tag{10}$$

при любом комплексном λ.

Доказательство. Обозначим $z'(t) = [x'(t); u'(t)]$, $t \in T$, и запишем систему (9) в виде

$$K(p)z(t) = 0, \ t \in T, \tag{11}$$

где p – оператор дифференцирования.

Необходимость. Предположим, что условие (10) при некотором $\lambda = \lambda_0$ нарушается. В этом случае система (11) имеет комплексное решение $z^0(t) = g_0e^{\lambda_0 t}$, где g_0 – ненулевое решение системы линейных алгебраических уравнений

$$K(\lambda_0)g_0 = 0.$$

Значит, $z^1(t) = \operatorname{Re} z^0(t)$ или $z^2(t) = \operatorname{Im} z^0(t)$ являются ненулевым действительным решением системы (11). Отсюда вытекает, что для системы (9) можно указать решение $z'(t) = [x'(t); u'(t)]$, $t \in T$, в котором хотя бы одна из координат отлична от тождественного нуля.

Достаточность. Согласно [12], каждая компонента $z_i(t)$, $i=\overline{1,n+m}$, решения $z(t)$ системы (11) удовлетворяет алгебро-дифференциальной системе

$$l(p)z_i(t)=0,\ i=\overline{1,n+m},\ t\in T, \tag{12}$$

где $l(\lambda)$ – наибольший общий делитель всех миноров порядка $n+m$ матрицы $K(\lambda)$.

В силу условия (10) $l(p)\equiv \text{const}\neq 0$, поэтому уравнение (12) имеет лишь тривиальное решение $z(t)\equiv 0, t\in T$. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=2x_2(t)-u(t),\\ \dot{x}_2(t)=2x_1(t)+x_3(t),\\ 2\dot{x}_2(t)=4x_1(t)+x_2(t) \end{cases}$$

с функцией выхода $y(t)=x_3(t)$.

Для заданной системы условие (10) выполняется, поскольку

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 & 1\\ -2 & \lambda & -1 & 0\\ -4 & 2\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\equiv -2.$$

Отсюда заключаем, что заданная система является идеально наблюдаемой.

Пусть d – степень полинома $\det[\lambda A_0-A]$. Отметим, что d совпадает с рангом матрицы C_0.

Замечание 1. В [8] указано, что спектральный критерий полной наблюдаемости системы (1) – (3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda A_0-A\\ G\end{bmatrix}=n$ при всех комплексных λ эквивалентен выполнению требования

$$\operatorname{rank}[(E-C_0A_0)';\ G';\ (GC_0A)';\ldots;\ (G(C_0A)^{d-1})']=n,$$

которое, как легко показать с помощью канонической формы пары матриц (A_0,A), равносильно условию

$$\operatorname{rank}[(GC_0A_0)';\ (GC_0A)';\ldots;\ (G(C_0A)^{d-1})']=d.$$

При $m=r=1$ имеет место

Следствие 1. *Если* $d\geq 2$, *то система* (5) – (7) *идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда одновременно:*

1) $GC_iB=0, i=\overline{1,k}$,

2) $\operatorname{rank}[(GC_0A_0)';\ (GC_0A)';\ldots;\ (G(C_0A)^{d-1})']=d$,

3) $GC_0(AC_0)^iB=0, i=\overline{0,d-2}$,

4) $C_0B\neq 0$.

Если $d=1$, *то система* (5) – (7) *идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняются условия* 1), 2), 4).

Если $d=0$, *то система* (5) – (7) *идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$GB\neq 0, GC_iB=0, i=\overline{2,k}. \tag{13}$$

Доказательство. Предварительно запишем условие (10) идеальной наблюдаемости системы (5) – (7) и условия 1) – 4) в терминах канонической формы

$$\tilde{A}_0=\begin{bmatrix} M & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & S\end{bmatrix},\ \tilde{A}=\begin{bmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & R & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix} \tag{14}$$

регулярной пары матриц (A_0, A), к которой эта пара приводится с помощью невырожденных матриц P и Q по формулам: $\tilde{A}_0 = P^{-1}A_0Q^{-1}, \tilde{A} = P^{-1}AQ^{-1}$. В (14) блоки M и R – нильпотентные матрицы порядков l_M и l_R соответственно, $M^k = 0$, $k = \text{index}(A_0, A)$ (по соглашению $M^0 = E$), блок S – невырожденная матрица порядка l_S $(l_M + l_R + l_S = n)$, блоки E и 0 – единичный и нулевой блоки соответственно подходящих размеров. Для конкретной пары матриц (A_0, A) некоторые из пар блоков в (14) могут отсутствовать. Отметим, что для любой регулярной пары матриц справедливо соотношение $l_R + l_S = d$.

Система базовых матриц пары (A_0, A) с помощью невырожденных матриц P и Q также приводится к канонической форме

$$C_j = Q^{-1}\tilde{C}_jP^{-1},\ j = \overline{0,k},$$

$$\tilde{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1} \end{bmatrix},\ \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} -M^{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ i = \overline{1,k}. \tag{15}$$

Определим $\tilde{G} = [\tilde{G}_1; \tilde{G}_2] = GQ^{-1}$, $\tilde{B} = \text{col}[\tilde{B}_1; \tilde{B}_2] = P^{-1}B$, $D = \tilde{A}_{02}^{-1}\tilde{A}_2$, где $(d \times d)$-матрицы $\tilde{A}_{02}$ и $\tilde{A}_2$ имеют вид

$$\tilde{A}_{02} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

В этом случае условие (10) идеальной наблюдаемости системы (5) – (7) запишется так:

$$\text{rank}\,\tilde{K}(\lambda) = \text{rank}\begin{bmatrix} \lambda M - E & 0 & -\tilde{B}_1 \\ 0 & \lambda\tilde{A}_{02} - \tilde{A}_2 & -\tilde{B}_2 \\ \tilde{G}_1 & \tilde{G}_2 & 0 \end{bmatrix} = n + 1 \tag{16}$$

при любом комплексном λ.

Из (15) следует, что первое условие следствия 1 равносильно выполнению равенств

$$\tilde{G}_1M^i\tilde{B}_1 = 0,\ \ i = \overline{0,k-1}.$$

При этом отметим [10, с. 110], что

$$\tilde{G}_1[\lambda M - E]^{-1}\tilde{B}_1 = -\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i\tilde{G}_1M^i\tilde{B}_1. \tag{17}$$

Рассмотрим условие 2). В терминах канонической формы пары матриц (A_0, A), учитывая (15), оно принимает вид

$$\text{rank}[\tilde{G}_2';\ (\tilde{G}_2D)';\ldots;\ (\tilde{G}_2D^{d-1})'] = d. \tag{18}$$

Условия 3) с учетом (15) и $(AC_0)^i = P\bar{D}^iP^{-1}$, где $\bar{D} = \text{diag}\{0; D\}$, равносильны системе равенств

$$\tilde{G}_2\tilde{A}_{02}^{-1}D^i\tilde{B}_2 = 0,\ \ i = \overline{0,d-2}. \tag{19}$$

Условие 4) означает, что $\tilde{B}_2 \neq 0$.

Докажем первую часть следствия. Пусть $d \geq 2$.

Необходимость. Пусть система (5) – (7) идеально наблюдаема, т. е. выполняется (16).

Поскольку [1, с. 37] $\det[E - \lambda M] \equiv 1$, то, учитывая (17), с помощью элементарных преобразований можно показать, что выполнение условия (16) эквивалентно выполнению соотношения

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \lambda E - D & -\tilde{B}_2 \\ \tilde{G}_2\tilde{A}_{02}^{-1} & -\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i\tilde{G}_1M^i\tilde{B}_1 \end{bmatrix} = d + 1 \tag{20}$$

при любом комплексном λ.

Если условие 4) не выполняется, то равенство (20) нарушается для всех λ, равных собственным значениям матриц R и S^{-1}: $\det[\lambda E - D] = \det[\lambda E - R]\cdot\det[\lambda E - S^{-1}] = 0$. В этом случае система не является идеально наблюдаемой.

В силу (20) и необходимого для него условия (18) (см. замечание 1), существует [2, с. 55] невырожденное преобразование T, приводящее пару матриц $(D, \tilde{G}_2\tilde{A}_{02}^{-1})$ к каноническому виду

$$D^c = TDT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \gamma_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \gamma_d \end{bmatrix}, \quad \left[\tilde{G}_2 A_{02}^{-1}\right]^c = \tilde{G}_2\tilde{A}_{02}^{-1}T^{-1} = [0;0;\ldots;0;1].$$

Пусть $T\tilde{B}_2 = \mathrm{col}[b_1; b_2; \ldots; b_{d-1}; b_d]$, тогда, если условия 1), 3) не выполняются, то (20) нарушается для всех λ, являющихся корнями уравнения

$$(\lambda^{d-1}b_d + \lambda^{d-2}b_{d-1} + \ldots + b_1) - (\lambda^d - \lambda^{d-1}\gamma_d - \ldots - \gamma_1)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i\tilde{G}_1 M^i\tilde{B}_1 = 0. \qquad (21)$$

Таким образом, для идеальной наблюдаемости системы (5) – (7) $(r = m = 1)$ необходимо выполнение условий 1) – 4).

Достаточность. Пусть условия 1) – 4) выполнены. Ввиду условия 2) критерий идеальной наблюдаемости (20) равносилен отсутствию корней уравнения (21).

Поскольку выполнено условие 1), то уравнение (21) принимает вид

$$\lambda^{d-1}b_d + \lambda^{d-2}b_{d-1} + \ldots + b_1 = 0.$$

Из (19) следует, что $b_i = 0, i = \overline{2,d}$, а из условий 2) – 4) вытекает, что $b_1 \neq 0$.

Отсюда заключаем, что при выполнении условий следствия 1 система (5) – (7) $(d \geq 2)$ является идеально наблюдаемой.

Случай $d = 1$ рассматривается аналогично.

В случае $d = 0$ критерий (10) может нарушаться только при λ, являющихся корнями уравнения

$$\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^i\tilde{G}_1 M^i\tilde{B}_1 = 0.$$

Поэтому система (5) – (7) при $m = r = 1$ идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда $\tilde{G}_1\tilde{B}_1 \neq 0, \tilde{G}_1 M^i\tilde{B}_1 = 0, i = \overline{1,k-1}$, что в терминах исходной системы (5) – (7) эквивалентно (13). Следствие доказано.

Замечание 2. Если $d = 0$ и $k = 1$, то условие (13) следует понимать как требование $GB \neq 0$.

2. Условная идеальная наблюдаемость алгебро-дифференциальных систем. Задача условной идеальной наблюдаемости для объекта (5) – (7) заключается в восстановлении траектории системы (5) по выходу (7) независимо от произвольного управляющего воздействия $u(\cdot) \in U_{A0}$ при условии, что известен вектор фазовых переменных в определенный момент времени.

Определение 2. Систему (5) – (7) назовем *условно идеально наблюдаемой*, если по выходу (7) независимо от любого допустимого управляющего воздействия $u(\cdot) \in U_{A0}$ можно однозначно восстановить $x(t), t \in (0, t_1]$ при условии $x(0) = 0$ $(q = 0)$.

Из (8) вытекает, что управляющее воздействие должно удовлетворять условию согласования

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}[C_i Bu(t)]\Big|_{t=0}=0. \tag{22}$$

Из определения 2 следует, что система (5) – (7) условно идеально наблюдаема в том и только том случае, когда система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dA_0x(t)}{dt}-Ax(t)-Bu(t)=0,\\ Gx(t)=0,\ t\in(0,t_1]\end{cases} \tag{23}$$

при начальных условиях $x(0)=0$ и (22) имеет только нулевое решение $x(t)\equiv 0, u(t)\equiv 0, t\in(0,t_1]$.

Теорема 2. *Для условной идеальной наблюдаемости системы* (5) – (7) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}K(\lambda)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda A_0-A & -B\\ G & 0\end{bmatrix}=n+m \tag{24}$$

хотя бы при одном комплексном λ.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $r\ge m$ (m,r – число компонент входа и выхода системы (23) соответственно), так как в противном случае система (23) всегда имеет нетривиальное решение, поскольку число неизвестных в (23) будет больше числа уравнений. Приведем элементарными преобразованиями матрицу $K(p)$ к виду [13, с. 130]:

$$K^*(p)=\begin{bmatrix}k_{11}(p) & k_{12}(p) & \dots & k_{1n}(p) & k_{1n+1}(p) & \dots & k_{1n+m}(p)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1}(p) & k_{n2}(p) & \dots & k_{nn}(p) & k_{nn+1}(p) & \dots & k_{nn+m}(p)\\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n+1n+1}(p) & \dots & k_{n+1n+m}(p)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & k_{n+mn+m}(p)\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix},$$

где в матрице $K^*(p)$ функции $k_{ii}(p), i=\overline{n+1,n+m}$, равны 1, а $k_{ij}(p), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+m}$, – многочлены не выше первой степени.

Запишем систему (23) в эквивалентной форме

$$K^*(p)z(t)=0 \tag{25}$$

с начальными условиями $x(0)=0$ и (22), здесь $z'(t)=[x'(t);u'(t)], t\in T, p$ – оператор дифференцирования.

Если допустить, что условие (24) не выполнено, то общее решение системы (25) будет зависеть хотя бы от одной произвольной функции [13, с. 132], и значит, система (25) с начальными условиями $x(0)=0$ и (22) будет иметь нетривиальное решение.

При выполнении условия (24) система (25) с указанными начальными условиями имеет только тривиальное решение $z(t)\equiv 0, t\in[0,t_1]$.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=2x_2(t)-u(t),\\ \dot{x}_2(t)=4x_1(t)+x_3(t),\\ \dot{x}_1(t)=5x_1(t)+x_2(t)\end{cases}$$

с наблюдаемым выходом $y(t)=x_3(t)$.

В данном случае матрица

$$K(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ -4 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda-5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а ее определитель $\det K(\lambda)=\lambda^2-5\lambda-4$. Поскольку определитель матрицы $K(\lambda)$ есть полином степени выше нулевой, то можно заключить, что исследуемая система не является идеально наблюдаемой, но условно идеально наблюдаема.

Теорема 3. *Система* (5) – (7) *условно идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} G[\lambda A_0-A]^{-1}B=m$$

хотя бы при одном комплексном λ.

Доказательство. По определению свойства регулярности системы (5) найдется такое комплексное λ, что

$$\det[\lambda A_0-A]\neq 0. \tag{26}$$

Поэтому для всех λ, кроме конечного набора значений, где условие (26) нарушается, справедливо равенство

$$\operatorname{rank} K(\lambda)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda A_0-A & -B \\ G & 0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E & -[\lambda A_0 A]^{-1}B \\ 0 & G[\lambda A_0-A]^{-1}B\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Согласно теореме 2, для условной идеальной наблюдаемости системы (5) – (7) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы при одном комплексном λ было справедливо

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda A_0-A & -B \\ G & 0\end{bmatrix}=n+m. \tag{28}$$

Сравнивая (27) и (28), приходим к утверждению теоремы 3.

Отметим, что для обратной матрицы $[\lambda A_0-A]^{-1}$ имеет место [1, с. 41] представление

$$[\lambda A_0-A]^{-1}=\frac{C_0(\lambda^{d-1}+D_1\lambda^{d-2}+\ldots+D_{d-1})}{\lambda^d+p_1\lambda^{d-2}+\ldots+p_d}+\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}C_i, \tag{29}$$

где матрицы $D_i, i=\overline{1,d-1}$, и числа $p_j, j=\overline{1,d}$, определяются при вычислении базовых матриц с помощью алгоритма Фадеева, который осуществляется для матрицы $Y=(A-\alpha A_0)^{-1}A_0$ (здесь α – число, при котором $\det(A-\alpha A_0)\neq 0$).

$$\begin{array}{lll}
Y_0=Y & p_0=1 & D_0=E \\
Y_1=Y_0D_0 & p_1=-\operatorname{sp}Y_1 & D_1=Y_1+p_1E \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
Y_i=Y_0D_{i-1} & p_i=-\operatorname{sp}Y_i & D_i=Y_i+p_iE \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
Y_n=Y_0D_{n-1} & p_n=-\operatorname{sp}Y_n & D_n=Y_n+p_nE
\end{array}$$

При этом можно убедиться, что число $d=\operatorname{rank}C_0$ обладает свойством: $p_d\neq 0$, $D_d=0$, $p_i=0, i>d$. Таким образом, в результате получается два набора: матриц $D_1,D_2,\ldots,D_{d-1}$ и коэффициентов $p_1,p_2,\ldots,p_d$.

Определим $(r\times m)$-полиномиальную матрицу $\Pi(\lambda)$ следующим образом:

$$\Pi(\lambda) = GC_0B\lambda^{d-1} + GC_0D_1B\lambda^{d-2} + \ldots + GC_0D_{d-1}B + (\lambda^d + p_1\lambda^{d-1} + \ldots + p_d)\sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}GC_iB. \quad (30)$$

Тогда, используя (29), критерий условной идеальной наблюдаемости можно сформулировать так: для условной идеальной наблюдаемости системы (5) – (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\Pi(\lambda) = m \quad (31)$$

хотя бы при одном комплексном λ.

Отсюда получаем

Следствие 2. *Пусть* $m = r = 1$. *Если* $d \geq 1$, *то условие* (31) *эквивалентно следующему: хотя бы одно из чисел*

$$GC_iB, i = \overline{1,k}, GC_0(AC_0)^j B, j = \overline{0,d-1}, \quad (32)$$

отлично от нуля.

Если $d = 0$, *то условие* (31) *эквивалентно тому, что среди чисел* $GC_iB, i = \overline{1,k}$, *найдется хотя бы одно, отличное от нуля.*

Доказательство. Пусть $d \geq 1$. Необходимость. Если все числа (32) равны нулю, то из (30) следует, что все коэффициенты скалярного полинома $\Pi(\lambda)$ нулевые, что противоречит условию (31).

Достаточность. Если одно из чисел $GC_jB, 1 \leq j \leq k$, отлично от нуля, то полином $\Pi(\lambda)$ имеет степень $d + j - 1$, а полином $GC_0B\lambda^{d-1} + GC_0D_1B\lambda^{d-2} + \ldots + GC_0D_{d-1}B$ – степень не выше $d - 1$. Поэтому старший коэффициент GC_jB полинома $\Pi(\lambda)$ не равен нулю.

Если все $GC_iB = 0, i = \overline{1,k}$, а одно из чисел $GC_0(AC_0)^j B, 0 \leq j \leq d-1$, отлично от нуля, то полином $\Pi(\lambda)$, очевидно, отличен от тождественного нуля.

Случай $d = 0$ рассматривается аналогично. Следствие 2 установлено.

Литература

1. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2000.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 1971.
3. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн., 1999.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
5. Christoboulou M. A., Paraskevopoulos P. N. // JOTA. 1985. Vol. 45, N 1. P. 53–72.
6. Yip E. L., Sincovec R. F. // IEEE Trans. on Autom. Control. 1981. Vol. AC-26, N 3. P. 702–707.
7. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin, 1989. Vol. 118.
8. Панасик О. А. // Тез. докл. Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», Минск, 29 сент. – 4 окт. 2008 г. Мн., 2008. С. 130–131.
9. Минюк С. А., Метельский А. В. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1524–1531.
10. Никольский М. С. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 4. С. 631–638.
11. Минюк С. А. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 12. С. 2164–2169.
12. Лузин Н. Н. // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 4–66.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.

A. V. METEL'SKII, O. A. PANASIK

**IDEAL AND CONDITIONAL IDEAL OBSERVABILITY
OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS**

Summary

Criteria of ideal observability and conditional ideal observability of linear stationary regular differential-algebraic systems are proved.