

УДК 534.222.

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛУЧЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев

Рассмотрена задача об устойчивости волноводного распространения лучей в неоднородных средах. Устойчивость в линейном приближении обеспечивается условием минимума скорости на оси, а в нелинейном случае при определенном характере неоднородности вдоль оси возможно возникновение стохастической неустойчивости луча. Исследование устойчивости проводится в вероятностном смысле на основе приближенного стохастического уравнения. Рассмотрена задача синтеза волновода с оптимальными свойствами, обеспечивающими устойчивость луча.

Координаты точек звукового луча в неоднородной среде удовлетворяют нелинейным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами [1-5]. При этом волноводный характер лучевого распространения звука и устойчивость лучей определяются конкретной моделью неоднородности. Вопрос об устойчивости луча в линеаризованной постановке рассматривался в работе [2], диффузия лучей в стохастических средах в том же приближении исследована в работах [4, 5].

В нелинейных детерминированных системах для некоторых видов возмущений поведение системы становится стохастическим [6] и оказывается необходимым переход к вероятностному его описанию. Критерий стохастичности для неоднородной среды определяется характером продольной неоднородности волновода.

При выполнении условия стохастичности, для исследования устойчивости луча с учетом нелинейности можно использовать уравнение ФПК (Фоккера - Планка - Колмогорова) и его решения.

Рассмотрим в плоскости xOy луч, заданный в виде $y=y(x)$. Трехмерная задача принципиальных трудностей не содержит. Неоднородность среды характеризуется зависимостью скорости $G(x, y)$ от пространственных декартовых координат или коэффициента преломления $n(x, y) =$

$$=G_0/G(x, y). \text{ Функционал Ферма } \tau(x, y) = \int_{M_0}^M \frac{ds}{G(x, y)} = \int_{M_0}^M n(x, y) ds \text{ прини-}$$

мает минимальное значение вдоль лучей, удовлетворяющих уравнениям Эйлера [1, 2], которые могут быть преобразованы к виду

$$(1) \quad \ddot{y} + \dot{y}(1 + \dot{y}^2)f_1(x, y) - \dot{y}^2(2 - \dot{y}^2)f_2(x, y) - f_2(x, y) = 0,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}, \quad f_1 = \frac{\partial \ln n}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \ln n}{\partial y}.$$

Пусть в однородной среде ось $x(y=0)$ является лучом. В общем случае можно выбрать в качестве оси волновода любую заданную кривую. Рассмотрим распространение волны в неоднородной среде в направлении оси x , тогда луч $y(x)$ представляет отклонение луча от оси волновода $y=0$ вследствие неоднородности.

Разложим функции f_1, f_2 в окрестности оси x :

$$(2) \quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= f_1^0(x, 0) + f_{1,y}^0(x, 0)y + \frac{1}{2!} f_{1,y^2}^0(x, 0)y^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} f_{1,y^3}^0(x, 0)y^3 + \varepsilon F_1(x, y), \\ f_2(x, y) &= f_2^0(x, 0) + f_{2,y}^0(x, 0)y + \frac{1}{2!} f_{2,y^2}^0(x, 0)y^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} f_{2,y^3}^0(x, 0)y^3 + \varepsilon F_2(x, y). \end{aligned}$$

Подставим второе выражение (2) в уравнение (1) и пренебрежем членами с y^2 ; тогда мы получим

$$(3) \quad \ddot{y} + \dot{y}f_1 - f_2^0 - f_{2,y}^0 y - \frac{1}{2!} f_{2,y^2}^0 y^2 - \frac{1}{3!} f_{2,y^3}^0 y^3 = \varepsilon F(x, y),$$

где ε — малый параметр.

Если ось x является экстремалью, то $y=0$ удовлетворяет уравнению (3) и, следовательно,

$$(4) \quad f_2^0 = 0, \quad f_{2,y}^0 > 0 \quad \text{при} \quad y=0.$$

Таким образом, флуктуационные отклонения луча от оси удовлетворяют уравнению

$$(5) \quad \ddot{y} - \dot{y}f_1 - f_{2,y}^0 y - \frac{1}{2!} f_{2,y^2}^0 y^2 - \frac{1}{3!} f_{2,y^3}^0 y^3 = \varepsilon F(x, y).$$

Заменой $y = z/n^{1/2}$ уравнение (5) преобразуем к виду

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{z} + N(x)z + M(x)z^2 + L(x)z^3 &= \varepsilon F(x, z), \\ N &= \frac{1}{4} [(\ln n)']^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{n}}{n} - f_{2,y}^0, \\ M &= -\frac{1}{2} f_{2,y^2}^0 + \frac{1}{2n^{1/2}} f_1^0 f_{1,y}^0 + \frac{1}{n^{1/2}} f_{1,xy}^0, \\ L &= -\frac{1}{6n} f_{2,y^3}^0 + \frac{1}{n} (f_{1,y}^0 + f_1^0 f_{1,y^2}^0) + \frac{1}{2n} f_{1,xy^2}^0. \end{aligned}$$

Здесь $n = n(x)$, так как рассмотрение ведем в окрестности $y=0$.

Аналогично работе [2] рассмотрим линеаризованное уравнение (6) $\ddot{z} + N(x)z = 0$, исследование которого дает следующие результаты: 1) при $N \leq 0$ $z \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ 2) $N \geq m > 0$ луч флуктуирует около оси x и при $x \rightarrow \infty$ пересекает $y=0$ бесконечное число раз. При начальных условиях $z(0) = 0, \dot{z}(0) = c$ и достаточно малом c функция $z(x)$ на $(0, \infty)$ по абсолютной величине не превосходит заданного значения. Луч устойчив в линейном приближении. Условие минимума скорости (4) на оси волновода обеспечивает устойчивость в большом. При учете нелинейности в уравнении (6), когда N, M, L близки к постоянным и ε достаточно мало, колебания луча имеют условно-периодический характер [7, 8].

Пусть нелинейность не очень мала. Функцию $F(x, z)$ будем рассматривать как величину, определяющую внешние воздействия на луч вследствие неоднородности. Рассмотрим случай детерминированной неоднородной среды, позволяющий сравнительно просто получить для данной задачи критерий перехода от динамического описания к статистическому, исполь-

зую результаты работы [6]. Положим

$$(7) \quad F(x, z) = zF(x), \quad F(x) = \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX),$$

$$X = 2\pi/\Omega, \quad \Omega \ll \omega, \quad \omega^2 = N, \quad M = 0, \quad L = \omega^2 \alpha.$$

Здесь δ -функция характеризует наличие тонких неоднородностей вдоль оси волновода. Тогда уравнение (6) примет вид

$$(8) \quad \dot{z} + z\omega^2(1 + \alpha z^2) - \varepsilon \omega z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX) = 0.$$

Уравнение вида (8) рассматривали в работе [6] в связи с другими физическими задачами; был получен критерий стохастизации для систем вида (8).

Условие стохастизации мы определим на основе понятия перемешивающегося движения, когда происходит расщепление корреляций фазовых переменных луча, взятых в разных точках волновода. Беря решение уравнения (8) в виде [6] $z = A \cos[(\omega + \Delta\omega)x + \varphi]$ с точностью до членов порядка α , частоты порядка α^2 и $\varepsilon \ll 1$ можем написать приближенно в конечных разностях уравнения для фазы φ и амплитуды A :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n + \omega_n X + \varepsilon \cos^2 \varphi_n\}, \\ A_{n+1} &= A_n \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \sin 2\varphi_n \right), \quad K_n = \varepsilon \Delta \omega_n X = \\ &= \frac{3}{8} \alpha A_n^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}. \end{aligned}$$

Фигурные скобки обозначают дробную часть аргумента, величина ε определяет относительную величину изменения амплитуды отклонения луча при прохождении тонкого слоя неоднородности в точке $x_n(n)$. Условие некоррелированности фаз в соседних точках имеет вид $R_1 = 1/K_1 = 1/K = 0$, что эквивалентно $K = \varepsilon \frac{\Delta \omega}{\Omega} \gg 1$, т. е. расстояние $X = 2\pi/\Omega$ между

включениями слоев неоднородности вдоль волновода должно быть достаточно велико. Следуя работе [6], находим оценку длины трассы, начиная с которой поведение луча становится стохастическим:

$$x_* = \frac{X}{2 \ln K} = \frac{1}{2\Omega \ln K}.$$

Для исследования устойчивости луча необходимо переходить к статистическому описанию на основе исследования вероятностных характеристик: плотности распределения, моментов, удовлетворяющих соответствующим уравнениям типа ФПК, или моментным уравнениям.

Для достаточно больших K [6] вероятность попадания траектории процесса в фазовой плоскости в область устойчивости мала, а в случае попадания время пребывания фазовой точки в ней уменьшается. При $K < 1$ ($\varepsilon \ll 1$) движение устойчиво, при $K \gg 1$ движение имеет стохастический характер, $K \sim 1$ — переходная область.

Роль тонких включений неоднородности в виде δ -функций состоит в том, что в этом случае частотный спектр $F(x)$ имеет бесконечную ширину. Можно рассматривать $F(x)$ с ограниченным спектром, если ширина его достаточно велика, что соответствует случаю, когда эффективная толщина включения много меньше периода колебания луча. При $K \gg 1$ происходит перекрытие резонансов системы, движение стохастизи-

руется, а фаза φ изменяется случайным образом в зависимости от x . Для выполнения условия $K \gg 1$ необходимы [6]: а) δ -образность какой-либо производной, что означает присутствие большого числа гармоник в спектре $F(x)$, б) периодичность (почти периодичность) $F(\omega)$ с частотой $\Omega \ll \omega$, в) достаточно большая нелинейность. Зависимость $F(x, z)$ от z может быть отличной от формулы (7), и, в частности, может иметь место независимость от z .

Таким образом, предположения (7) относительно характера неоднородности могут быть значительно расширены, рассматриваемый случай позволяет получить простые оценки возникновения стохастичности в движении луча. Вероятностное исследование устойчивости луча мы будем проводить с помощью функции плотности вероятности, удовлетворяющей уравнению ФПК.

В переменных действие — фаза I, θ уравнение (8) напомним в виде

$$(9) \quad I = \varepsilon \Psi(I, \theta, x), \quad \dot{\theta} = \omega(I),$$

$$\Psi = I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX) \sin 2\theta.$$

Вводя функцию плотности состояний $p(x, I, \theta)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, и представляя

$$p(x, I, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, I) e^{in\theta} + p_{-n}(x, I) e^{-in\theta},$$

$$\Psi(x, I, \theta) = I \sum_k \delta(x - kX) \sin 2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x, I) e^{in\theta} + \\ + \Psi_{-n}(x, I) e^{-in\theta}, \quad p_{-n} = p_n^*, \quad \Psi_{-n} = \Psi_n^*,$$

получим [6] при граничном условии $p_n(0, I, \theta) = p_0(0, I) \delta_{n0}$ уравнение типа ФПК для $p_0(x, I)$:

$$(10) \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial I} (\alpha_1 I p_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} (2\alpha_1 I^2 p_0), \\ \alpha_1 = \varepsilon^2 8\lambda\Omega.$$

Уравнению (10) поставим в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение, которое определим однозначным образом.

Обозначим коэффициент сноса в уравнении (10) K_1 , коэффициент диффузии K_2 тогда, поскольку $K_1 = \alpha_1 I$, $K_2 = 2\alpha_1 I^2$, получим

$$(11) \quad \dot{I} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_1}{N}} I(x) v(x).$$

Здесь $v(x)$ — чисто случайный процесс, $\langle v(x)v(x') \rangle = N\delta(x-x')$. Рассматриваемое приближение соответствует приближению хаотических фаз (ПХФ) [6]. Переходя к переменной y , получим приближенное уравнение для y

$$(12) \quad \dot{y} = y \left[- \frac{1}{2} (\ln n)' + \sqrt{\frac{\alpha_1}{N}} v \right].$$

Соответствующее уравнение ФПК имеет вид

$$(13) \quad \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\alpha_1}{4} - \frac{1}{2} (\ln n)' y f \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\alpha_1}{2} y^2 f \right].$$

Решение уравнения (13) представим в виде

$$(14) \quad f(y, x) = \frac{1}{y\sqrt{\pi\alpha_1 x}} \exp\left\{-\frac{\ln^2 yn^{1/2}}{\alpha_1 x}\right\}.$$

Стационарное решение уравнения (13) имеет вид

$$(15) \quad f_*(y) = \frac{2c}{\alpha_1 y^2} \exp 2 \left[2 \frac{|y| - |y_*|}{|yy_*|} - \frac{(\ln n)'}{\alpha_1} \ln \left| \frac{y}{y_*} \right| \right],$$

$$c^{-1} = \frac{4}{\alpha_1} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \exp 2 \left[2 \frac{y - y_*}{yy_*} - \ln \frac{y}{y_*} \frac{(\ln n)'}{\alpha_1} \right] dy.$$

Здесь $y_* = y(x_*)$, где x_* — координата x , начиная с которой луч ведет себя стохастическим образом.

Среднее значение y определяется выражением

$$(16) \quad \langle y \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x_0}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\ln^2 (yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\} dy.$$

Средний квадрат отклонения y^2 вычисляется по формуле

$$(17) \quad \langle y^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x_0}} \int_0^\infty y \exp\left\{-\frac{\ln^2 (yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\} dy.$$

Вероятность события $P(|y| < d)$ для положительных y имеет вид

$$(18) \quad P(y < d) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x_0}} \int_0^d \frac{1}{y} \exp\left\{-\frac{\ln^2 (yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\} dy.$$

Во всех приведенных формулах $n(x)$ есть детерминированная функция, от конкретного вида которой существенно зависит поведение луча. Характеристики процесса $v(x)$, эквивалентного включениям неоднородности, в конечные формулы нигде не входят.

Выражения (16)–(18) представляют собой в общем случае функционалы $n(x, y)$, если учитывать зависимость от x и y . Это дает возможность сформулировать вариационные задачи, интересные с точки зрения синтеза сред с заданными волноводными свойствами. Например, на основе соотношения (16) ищем $n(x, y)$, дающий минимум среднего отклонения луча от оси волновода. Минимизируя выражение (17), получим соотношения для $n(x, y)$, обеспечивающие минимум среднему квадрату отклонения. Для функционала (18) требуется найти $n(x, y)$, минимизирующий вероятность выхода из области d . Минимизация соотношений (16)–(18) осуществляется при условии, что y удовлетворяет уравнению (1) или приближенному уравнению (5). Условный экстремум можно искать, используя функционал Ферма. При учете свойств среды в окрестности $y=0$ и использовании разложений (2) функция $n(x)$ зависит только от x . С точки зрения оптимального синтеза $n(x)$, входящий в уравнение (12), имеет смысл управляющего воздействия, $y(x)$ — смысл состояния системы, $v(x)$ — смысл случайной помехи. Если $y(x)$ наблюдается с ошибкой, необходимо получить алгоритм оптимальной оценки $y(x)$, а $n(x)$ находить, применяя стохастический вариант динамического программирования [9]. Перепишем уравнение (12) в виде

$$(19) \quad \dot{Y} = -\frac{1}{2} u + \sqrt{\frac{\alpha_1}{N}} v, \quad Y = \ln y, \quad u = (\ln n)'.$$

Пусть Y измеряется со случайной ошибкой ξ , которую считаем чистой случайной функцией: $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi(x)\xi(x') \rangle = R\delta(x-x')$, тогда измеряемая величина Z будет

$$(20) \quad Z = Y + \xi.$$

Причем мы считаем $\langle v(x)\xi(x') \rangle = 0$ для всех $x, x' > x_*$.

Алгоритм оптимального выбора функции u , минимизирующей критерий качества

$$(21) \quad \left\langle \Lambda Y^2(x_1) + \int_{x_*}^{x_1} \left[\frac{A}{4} Y^2(x) + Bu^2(x) \right] dx \right\rangle,$$

где x_1 — конечная точка интервала (x_*, x_1) , на котором осуществляется оптимальный синтез, определяется соотношением

$$(22) \quad u(x) = \frac{1}{2B} W(x) \hat{Y}(x|x).$$

Здесь $\hat{Y}(x|x) = M[Y(x)|Z(x)]$ — оценка $Y(x)$, минимизирующая ошибку оценки, Λ, A, B — размерные коэффициенты.

$$(23) \quad W = \frac{1}{4B} W^2 - \frac{A}{4},$$

$$(24) \quad \dot{\hat{Y}} = K(x)[Z - \hat{Y}] - \frac{1}{2} u, \quad K(x) = P(x|x)R^{-1}(x),$$

$$(25) \quad \dot{P} = -R^{-1}P^2 + \alpha_1, \quad P(x|x) = \langle Y(x) - \hat{Y}(x|x) \rangle^2.$$

Граничные условия для уравнений (23)–(25) имеют вид

$$(26) \quad \hat{Y}(x_*|x_*) = 0, \quad P(x_*|x_*) = P(x_*) = \langle Y^2(x_*) \rangle, \\ W(x_*) = \Lambda.$$

Критерий качества (21) определяет совместный минимум по логарифму квадрата отклонения в заданной конечной точке и интегрально на всем интервале (x_*, x_1) . Определяя из (22) $u(x)$ и учитывая формулу (19), находим $n(x)$, оптимальное в смысле критерия (21). Если измерение Y осуществляется точно, то $Y=Z$, $\hat{Y}(x|x) = \langle Y(x) \rangle$, соответствующие изменения в уравнениях (22)–(26) очевидны. Решения уравнений (23)–(26) получаются в эллиптических интегралах [10], решаемых численно.

Таким образом, при выполнении критерия стохастичности $K \gg 1$ для $x > x_*$ можно переходить к вероятностному описанию, что эквивалентно использованию стохастического уравнения (12). Устойчивость или неустойчивость луча существенно определяются конкретным видом функции $n(x)$, которая может рассматриваться как функция управления лучом по заданному критерию качества. Синтез волновода с оптимальными свойствами осуществляется на основе алгоритма (22)–(25).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернов Л. А. Волны в случайно неоднородных средах. М., «Наука», 1975, 170.
2. Булдырев В. С. Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде. В сб.: Проблемы математической физики. Изд-во ЛГУ, 1968, 5–30.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, 573.
4. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967, 548.

5. *Клячкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975, 239.
6. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., «Наука», 1970, 143.
7. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, 98, 4, 527–530.
8. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи мат. наук, 1963, 18, 6, 91–192.
9. *Медич Д.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М., «Энергия», 1973, 374.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971, 576.

Воронежский технологический институт

Поступила
18 января 1978 г.