$$\tilde{u}(t)=\left[u(0)+\frac{\lambda}{u(0)}-\frac{2h^2u(0)}{4+[u(0)]^2}\right]\cdot e^{-u(0)t}+$$

$$+\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\left[u(0)\cos 2t+2\sin 2t\right]-\frac{\lambda}{u(0)} \tag{23}$$

Искомое решение исходного уравнения (1) получим на основе (3):

$$\tilde{q}=q(0)\exp\int_0^t\tilde{u}(\tau)d\tau=\exp\left\{\left[-\frac{\lambda}{u(0)}t-\left[-1+\frac{\lambda}{(u(\cos))^2}-\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\times e^{-u(0)t}+\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\left[\frac{u(0)}{2}\sin 2t-\cos 2t\right]+1+\frac{\lambda}{[u(0)]^2}\right\} \tag{24}$$

Близость точного решения $q(t)$ и приближенного $\overline{q}(t)$ может быть оценена с помощью неравенств (11) или (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике. Справочник. — Т. 1. — М.: Машиностроение, 1978. 2. Э.Т. Уиттегер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. — Ч. I, II. — М.: Наука, 1963. 3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.

УДК 539.3:531.2.001:621.81

О.Н. Скляр, Т.М. Мартыненко

БЕЗМОМЕНТНЫЕ ФОРМЫ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕНОСА

Белорусский национальный технический университет,
Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь
Минск, Беларусь

С позиции общей теории пологих оболочек проведен анализ постановки задачи определения такой формы тонкостенной пологой оболочки переноса, в которой заданная внешняя нагрузка и температурное поле не вызывает в ней моментное состояние.

Безмоментное напряженно-деформированное состояние (НДС) является одним из основных в теории оболочек. Его достоинством является равномерное (по толщине) распределение напряжений и, следовательно, участие всего материала оболочки сопротивлению внешнему деформированию. Ниже приводится анализ разрешимости задачи выбора геометрии срединной поверхности переноса из условий, что внешняя нагрузка и температурное поле создает в оболочке чисто безмоментное НДС. Это значит, что в оболочке отсутствуют изгибающие и крутящие моменты, отсутствуют изменение кривизн, т.е.[1].

$$M_1 = M_2 = H = 0; \ \chi_1 = \chi_2 = \chi_{12} = 0$$

В рамках классической теории оболочек Кирхгофа — Лява и предположения пологости оболочки это эквивалентно следующим системам уравнений.

Геометрические характеристики пологой оболочки переноса:

$$z = \varphi(x) + \psi(y), \ x \in [0;a], y \in [0;b]; \ |\varphi'(x)| << 1, \ |\psi'(y)| << 1; \ A = B = 1;$$

$$\frac{1}{R_1} \approx -\varphi''(x), \ \frac{1}{R_2} \approx -\psi''(y), \ \frac{1}{R_{12}} = 0. \qquad (1)$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + q_1 = 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + q_2 = 0; \ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q_n \qquad (2)$$

Условия совместности деформаций:

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y}; \ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x}; \ \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (3)$$

Закон Гука с учетом влияния температурного поля $\theta = \theta(x, y)$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2) + \alpha\theta; \ \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1) + \alpha\theta; \ \gamma_{12} = \frac{2 \cdot (1+\mu)}{Eh} S \qquad (4)$$

Предположим, что E, μ, h, α — *const* (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина, коэффициент термоупругости).

Вносся (4) в (3) получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(T_2-\mu T_1)+\alpha_1\theta]=2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}[(T_1-\mu T_2)+\alpha_1\theta]=2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=0 \tag{5}$$

где $\alpha_1=\alpha Eh$

Из (5) следует:

$$S(x;y)=S(x,0)+S(y,0)-S(0,0) \tag{6}$$

Формула (6) позволяет сделать вывод, что $S(x;y)$ определяется своими значениями при $x=0$ и при $y=0$. Поэтому будем считать ее известной величиной, и займемся определением T_1 и T_2.

Из уравнения равновесия имеем:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=-\frac{\partial S}{\partial y}-q_1,\quad \frac{\partial T_2}{\partial y}=-\frac{\partial S}{\partial x}-q_2 \tag{7}$$

Из (5) следует:

$$\frac{\partial T_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\mu T_2-\alpha_1\theta)+2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial x},\quad \frac{\partial T_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mu T_1-\alpha_1\theta)+2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial y} \tag{8}$$

Внося (7) в (8):

$$\frac{\partial T_1}{\partial y}=-\mu(q_2+\frac{\partial S}{\partial x})-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial y}+2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial x}=-\mu q_2-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial y}+(2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}=-\mu(q_1+\frac{\partial S}{\partial y})-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial x}+2(1+\mu)\frac{\partial S}{\partial y}=-\mu q_1-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial x}+(2+\mu)\frac{\partial S}{\partial y} \tag{9}$$

Система уравнений (7) и (9) служит для определения T_1 и T_2. Предположим, что выполнены следующие условия совместности входящих в эту систему уравнений:

$$-\frac{\partial}{\partial y}(q_1+\frac{\partial S}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(-\mu q_2-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial y}+(2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x}),$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(q_2+\frac{\partial S}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(-\mu q_1-\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial x}+(2+\mu)\frac{\partial S}{\partial y}) \tag{10}$$

Тогда:

$$T_1 = \int\limits_{M_0M} (\frac{\partial T_1}{\partial x}dx + \frac{\partial T_1}{\partial y}dy) = \int\limits_{M_0M} [-(\frac{\partial S}{\partial y} + q_1)dx - ((\mu q_2 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial y}) - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x})dy],$$

$$T_2 = \int\limits_{M_0M} (\frac{\partial T_2}{\partial x}dx + \frac{\partial T_2}{\partial y}dy) = \int\limits_{M_0M} [-(\mu q_1 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}) - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial y})dx - (\frac{\partial S}{\partial x} + q_2)dy] \quad (11)$$

Фигурирующие в (11) криволинейные интегралы не зависят от пути интегрирования, так как стоящие под знаком интеграла выражения представляют собой в силу (10) полные дифференциалы. Поэтому путь интегрирования M_0M может быть выбран исходя из удобства вычисления этих интегралов.

Например, мы можем проинтегрировать по x при $y=0$ а затем по y при $x = const$. В первом случае $dy=0$, $dx \neq 0$, $dy \neq 0$, $dx = 0$, и мы имеем:

$$T_1 = -\int\limits_0^x (\frac{\partial S}{\partial y} + q_1)dx - \int\limits_0^y (\mu q_2 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x})dy,$$

$$T_2 = -\int\limits_0^x (\mu q_1 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x})dx - \int\limits_0^y (\frac{\partial S}{\partial x} + q_2)dy \quad (12)$$

Подставляя (12) в (2), тогда с учетом (1) будем иметь такое уравнение для определения $\varphi(x)$ и $\psi(y)$:

$$-\varphi''(x)(-\int\limits_0^x (\frac{\partial S}{\partial y} + q_1)dx - \int\limits_0^y (\mu q_2 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial y} - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x})dy) -$$

$$-\psi''(y)(-\int\limits_0^x (\mu q_1 + \alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} - (2+\mu)\frac{\partial S}{\partial x})dx - \int\limits_0^y (\frac{\partial S}{\partial x} + q_2)dy) = q_n$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л., Механика тонкостенных конструкций, — М., Машиностроение.— 1977г. 2. Огибалов М.П., Колтунов М.А., Оболочки и пластины, — М., Издательство МГУ, 1969 г., 3. Гольденвейзер А.Л., Теория упругих тонких оболочек, — М., ГИТТЛ, 1953 г. 4. Гольденвейзер А.Л., Теория упругих тонких оболочек, издание 2 , — М., Наука, 1976 г.