УДК 536.21+621.01

О.Н. Скляр, И. М. Мартыненко

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЕЛИНЕАРИЗАЦИИ

Белорусский национальный технический университет,
Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Рассмотрим колебания механической системы с одной степенью свободы, описываемые следующим дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами (1):

$$\begin{aligned} &\frac{d^2q}{dt^2}+\varphi(t)\frac{dq}{dt}+\psi(t)q=0 \\ &q(0)=q_0; \quad \dot{q}(0)=q_1 \end{aligned} \tag{1}$$

Будем предполагать $q(t)\neq 0$, $q_0\neq 0$, q_0, q_1 — постоянные. Введем в (1) замену

$$u(t)=\frac{\dot{q}}{q}=\frac{d}{dt}\ln q \tag{3}$$

или

$$\dot{q}=u\cdot q, \quad (\dot{\cdot})=\frac{d}{dt} \tag{3'}$$

Тогда (1) примет такой вид:

$$\frac{d\dot{u}}{dt}+u^2+\varphi(t)u+\psi(t)=0 \tag{4}$$

Это уравнение Риккати, которые будем решать приближенно с помощью такой линеаризации:

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{u}}{dt}+\left(u(0)+\varphi(t)\right)\tilde{u}(t)=0 \\ &u(0)=\frac{q_1}{q_0} \end{aligned} \tag{5}$$

Откуда

$$\tilde{u} = e^{-\left[u(0)t + \int_0^t \varphi(t)dt\right]}\left[u(0) - \int_0^t \psi(t) e^{u(0)t + \int_0^t \psi(\tau)d\tau dt}\right] \tag{6}$$

Для оценки близости точного $u(t)$ и приближенного $\tilde{u}(t)$ решений уравнения (4) обозначим

$$z(t) = u(t) \cdot \tilde{u}(t) \tag{7}$$

Тогда из (4) — (5)

$$\frac{dz}{dt} + u^2 + \varphi(t)(u - \tilde{u}) - u(0)\tilde{u} = 0$$

Откуда

$$|z(t)| = \left|\int_0^t \left\{\left(u^2 - \tilde{u}^2\right) + \left(\tilde{u}^2 - u^2(0)\right) + \left(u^2(0) - u(0)\tilde{u}\right) + \varphi(t)(u - \tilde{u})\right\} dt\right| \leq$$

$$\leq c\left|\int_0^t |z(t)|dt\right| + F(t) \tag{8}$$

где

$$F(t) = \left|\int_0^t \left[\tilde{u}^2 - u^2(0) + \left|u^2(0) - u(0)\tilde{u}\right|\right] \; dt\right|, \qquad c = \mathrm{const} \tag{9}$$

Обозначим

$$R(t) = \int_0^t |z(t)|dt \tag{9}$$

Тогда (8) можно записать в таком виде:

$$\frac{dR}{dt} - cR(t) \leq F(t) \tag{10}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(R(t)e^{-ct}\right) \leq F(t)e^{-ct}$$

или после однократного интегрирования

$$R(t) \leq \int_0^t F(t) e^{c(t-\tau)} d\tau \tag{11}$$

Подставим (11) в (8). Тогда получим окончательно

$$\left|z(t)\right| \le F(t)+c\int_0^t F(\tau)e^{c(t-\tau)}d\tau \tag{12}$$

Формулы (12) и (11) с учетом (9) представляют поточечную и интегральную оценку близости точного $u(t)$ и приближенного $\tilde{u}(t)$ решений уравнения (4) в зависимости от $\tilde{u}(t)-u(0)$ на промежутке $[0,T]$, где T — мало.

Если T — велико, тогда разобьем интервал $[0,T]$ на m интервалов $[t_i,t_i+h]$, где $h=\dfrac{T}{m}$, $i=\overline{0,m-1}$ и на каждом таком интервале будем решать такую задачу Коши:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}+n^2+\varphi(t)u+\psi(t)=0,\quad t\in\left[t_i,t_i+\frac{T}{m}\right]\\ u(t_i)=u\left(t_{i-1}+\frac{T}{m}\right)\end{gathered} \tag{13}$$

Линеаризуем уравнение (13), следуя (5):

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}+\left[\tilde{u}(t_i)+\varphi(t)\right]\tilde{u}+\psi(t)=0,\quad t\in\left[t_1,t_2+\frac{T}{m}\right]\\ \tilde{u}(t_i)=\tilde{u}\left(t_{i-1}+\frac{T}{m}\right)\end{gathered} \tag{14}$$

Решение задачи (14) легко выписывается в явном виде по аналогии с (6)

$$\tilde{u}=\exp\left(-\int_{t_i}^{t}\left[\tilde{u}(t_i)+\varphi(t)\right]dt\right)\left\{\tilde{u}(t_i)-\int_{t_i}^{t}\psi(t)\exp\left[\int_{t_i}^{t}\left(\tilde{u}(t_i)+\varphi(t)\right)dt\right]dt\right\} \tag{15}$$

$t\in[t_i,t_{i+1}]$

Формула (14) представляет пошаговую процедуру для построения приближенного решения уравнения (4) на конечном интервале $[0,T]$. Поскольку при переходе с одного интервала $[t_i,t_{i+1}]$ на другой $[t_{i+1},t_{i+2}]$ происходит накопление ошибок, то итоговая погрешность будет определяться суммой погрешностей на каждом интервале $[t_i,t_{i+h}]$. Это вытекает из (9), т.к.

$$R(t)=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_i+h}\left|z(t)\right|dt,\quad t_0=0,\quad h=\frac{T}{m} \tag{16}$$

При известном $\tilde{u}(t)$ приближенное решение исходной задачи (1) дается формулой

$$\overline{q}(t)=q(0)e^{\int_0^t \tilde{u}(t)dt} \tag{17}$$

В качестве примера реализации вышеразвитого метода рассмотрим уравнение Матье [1,2]:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\left(\lambda-2h^2\cos 2t\right)q(t)=0 \tag{18}$$

Замена $\dot{q}=uq$ дает

$$\frac{du}{dt}+u^2+\left(\lambda-2h^2\cos 2t\right)=0 \tag{19}$$

Линеаризованное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}+u(0)\tilde{u}+\left(\lambda-2h^2\cos 2t\right)=0, \qquad u(0)=\frac{\dot{q}(0)}{q(0)} \tag{20}$$

Поэтому

$$\tilde{u}(t)=e^{-u(0)t}\left[c-\frac{\lambda e^{u_0 t}}{u(0)}+\frac{2h^2e^{u(0)t}}{4+\left(u(0)\right)^2}\left(u(0)\cos 2t+2\sin 2t\right)\right], \tag{21}$$

где c — определяемая из условия

$$u(0)=c-\frac{\lambda}{u(0)}+\frac{2h^2u(0)}{4+\left(u(0)\right)^2}$$

откуда

$$c=\frac{\lambda}{u(0)}+\frac{2h^2u(0)}{4+\left(u(0)\right)^2}+u(0) \tag{22}$$

Поэтому

$$\tilde{u}(t)=\left[u(0)+\frac{\lambda}{u(0)}-\frac{2h^2u(0)}{4+[u(0)]^2}\right]\cdot e^{-u(0)t}+$$

$$+\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\left[u(0)\cos 2t+2\sin 2t\right]-\frac{\lambda}{u(0)} \tag{23}$$

Искомое решение исходного уравнения (1) получим на основе (3):

$$\tilde{q}=q(0)\exp\int_0^t\tilde{u}(\tau)d\tau=\exp\left\{\left[-\frac{\lambda}{u(0)}t-\left[-1+\frac{\lambda}{(u(\cos))^2}-\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\times e^{-u(0)t}+\frac{2h^2}{4+[u(0)]^2}\left[\frac{u(0)}{2}\sin 2t-\cos 2t\right]+1+\frac{\lambda}{[u(0)]^2}\right\} \tag{24}$$

Близость точного решения $q(t)$ и приближенного $\overline{q}(t)$ может быть оценена с помощью неравенств (11) или (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике. Справочник. — Т. 1. — М.: Машиностроение, 1978. 2. Э.Т. Уиттегер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. — Ч. I, II. — М.: Наука, 1963. 3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.

УДК 539.3:531.2.001:621.81

О.Н. Скляр, Т.М. Мартыненко

БЕЗМОМЕНТНЫЕ ФОРМЫ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕНОСА

Белорусский национальный технический университет,
Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь
Минск, Беларусь

С позиции общей теории пологих оболочек проведен анализ постановки задачи определения такой формы тонкостенной пологой оболочки переноса, в которой заданная внешняя нагрузка и температурное поле не вызывает в ней моментное состояние.