

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ РАСЧЕТА ОРТОТРОПНЫХ ДОРОЖНЫХ ПЛИТ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА ПЛИТ

С.В. Босаков, О.В. Козунова
Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, г. Минск, Беларусь,
e-mail: kozunova@gmail.com

В предлагаемой работе получила дальнейшее развитие теория нелинейных расчетов конструкций несущего дорожного покрытия на произвольном упругом основании, таких, как железобетонная ортотропная плита, лежащая без трения и скольжения на упругом изотропном слое, жестко соединенным с недеформируемым основанием. Выполнены упругий и нелинейный расчеты плиты под действием внешней статической нагрузки с учетом их собственного веса. В нелинейном расчете исследуемой конструкции учитывается изменение ее жесткости в момент трещинообразования и дальнейшего активного раскрытия трещин.

Расчет ортотропной плиты на упругом основании в нелинейной постановке выполняется итерационным путем метода Б.Н. Жемочкина. Для определения коэффициентов канонических уравнений и свободных членов использован смешанный метод строительной механики. На первой итерации плита рассчитывается как линейно-упругая, однородная и ортотропная, на последующих - как линейно-упругая, ортотропная и неоднородная на каждом участке Жемочкина. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определяются методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое предлагает автор впервые в проводимых ниже исследованиях. Это выражение удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению.

В нелинейных расчетах плиты при нахождении переменной (секущей) жесткости для участка Жемочкина на каждой итерации используется зависимость "жесткость - кривизна" для каждого из направлений X и Y , аппроксимированная нелинейной функцией, характер зависимости которой графически свидетельствует о нелинейно-упругой работе ортотропной плиты и ее деформировании с учетом трещинообразования и раскрытия трещин.

Приводятся примеры нелинейных расчетов железобетонных ортотропных плит на упругом изотропном слое. Алгоритмы приводимых выше решений реализованы при помощи компьютерной программы Wolfram Mathematica 11.3.

Ключевые слова: упругое основание, метод Жемочкина, упругий слой, нелинейный расчет, зависимость «жесткость-кривизна», гибкая ортотропная плита, метод Ритца, трещинообразование, дорожная железобетонная плита, осадки, контактные напряжения, изгибающие моменты.

Учет нелинейного деформирования железобетона и грунта. Обзор публикаций. Полученные ранее В.И. Мурашевым [1], А.А. Гвоздевым [2, 3] физические уравнения железобетонных балок и плит учитывают трещинообразование и другие нелинейные деформации, возникающие в этих конструкциях, и нашедшие свое описание в монографии Н.И. Карпенко [4]. Моделирование грунтов в фундаментных конструкциях на упругом основании также неоднозначно и разнообразно, что достаточно полно отразили в своих монографиях отечественные ученые, такие как М.И. Горбунов-Посадов [5], С.Д. Семенюк [6], С.В. Босаков [7] и другие. В настоящее время ученые продолжают разрабатывать

модели, учитывающие остаточные деформации, зоны пластического течения и другие нелинейные проявления упругого основания под эксплуатационной нагрузкой [8, 9].

Следует отметить, что в фазе уплотнения осадку *жесткого* фундамента и реактивные давления следует считать *линейно-зависящими от нагрузки на фундамент*, поэтому нормы проектирования фундаментов и оснований [10] допускают рассчитывать основания по деформациям, используя линейные модели, если среднее давление на основание не превышает некоторой величины, называемой расчётным сопротивлением основания. Гораздо сложнее взаимодействие с основанием *гибких* железобетонных фундаментов. В этом случае изменение эпюры реактивных давлений с ростом нагрузки происходит не только за счет особенностей деформирования грунта, но также за счет *уменьшения жесткости фундамента*, которое начинается с образования и раскрытия в нем трещин.

Первые задачи о расчете фундаментных конструкций с учетом физической нелинейности были решены Б.Г. Корневым [11]. Деформирование элемента балки (в координатах «момент-кривизна») он описывал диаграммой Прандтля. При расчете осесимметрично-деформируемых плит эта предпосылка принималась для радиального направления. Рассматривая балки и плиты большой протяженности, Б.Г. Корнев использовал для оснований линейные модели, полагая что в таких конструкциях значительные напряжения возникают при малых давлениях на основание, вызывающих в грунтах преимущественно линейные деформации.

Аналогичные гипотезы были приняты Р.В. Серебрянным [12] для определения несущей способности бесконечных плит на упругом полупространстве, нагруженных по кругу малого радиуса. Теоретическая разрушающая нагрузка хорошо совпала с полученной в опытах В.Д. Попова и И.Н. Толмачева. В тоже время по линейному расчету разрушающая нагрузка оказалась почти с пять раз меньше.

Уже эти первые попытки учета нелинейности деформаций железобетона при расчете фундаментных конструкций показали перспективность такого направления. Усилия в конструкциях получались не только более близкими к действительным, но и существенно меньшими, чем при расчете в линейной постановке. Это открывало возможность уменьшить расход бетона и арматуры при проектировании фундаментов.

Методы расчета фундаментов, учитывающие нелинейные деформации, возникающие в железобетоне до образования пластических шарниров, разрабатывались несколькими авторами, обзор которых освещается в работе В.И. Соломина, С.Б. Шматкова [13].

С механической точки зрения *расчет плитных конструкций на упругом основании* есть решение контактной задачи соприкасающихся тел [14]. Данные задачи сводятся к решению интегральных уравнений, решение которых зависит от ядра интегрального уравнения и формы соприкасающихся тел [15]. В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения в связи с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому на практике успешно используют метод Б.Н. Жемочкина [16], который сводит контактную задачу к задаче строительной механики.

Вопросы расчета фундаментных и дорожных плит на упругом основании *с учетом анизотропии (в частности ортотропии) плит и их трещинообразования* в силу неоднозначности и неопределенности исходных данных неоднородных и композиционных упругих тел (железобетона и грунтов), и в связи с этим большого математической сложности реализации постановок и алгоритмов решаемых задач до настоящего времени не исследованы в полной мере.

О новой модели трехслойного упругого основания. Конструкцию неоднородного (слоистого) основания предполагается моделировать в виде поверхностного слоя щебня, расположенного на слое песка, который, в свою очередь, находится на естественном грунтовом полупространстве (рисунок 1). Модель трехслойного (слоистого) основания представим в виде основания Винклера (слой щебня), расположенного на двухслойном основании Когана (песок + естественный грунт) [17].

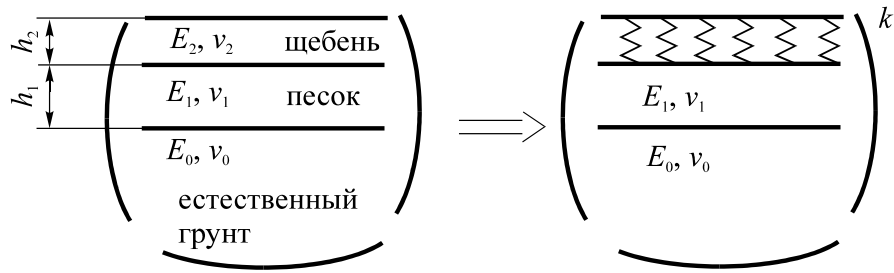


Рис. 1. Модель трехслойного (слоистого) упругого основания

Авторами в работе [8] приведено выражение для определения перемещений точки $M(x_i, y_i)$ поверхности трехслойного основания от действия равномерно распределенной по прямоугольному участку размером $\left(x_k \pm \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_k \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$ поверхности трехслойного основания от действия единичной нагрузки в следующем виде

$$W(x_i, y_i) = \frac{P(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1 h_1} F_{i,k}, \quad (1)$$

где $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которая определяется по формулам, полученным авторами [8] с учетом соотношений [7],[17], а именно

$$F_{i,i} = \frac{1}{k \Delta x \Delta y} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\ln \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \ln \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) \right] + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right); \quad (2)$$

$$F_{i,k} = \frac{h_1}{R} + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right), \quad (3)$$

$$R = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

В приведенных выше формулах: $\Gamma(n+1)$ – Гамма-функция [18]; $P_n(z)$ – полином Лежандра [18]; k – коэффициент постели верхнего слоя трехслойного основания, который определяется по формуле [5]

$$k = \frac{E_2(1 - \nu_2)}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)h_2}, \quad (4)$$

где E_2, ν_2 – модуль упругости и коэффициент Пуассона верхнего слоя трехслойного основания (щебня, см. рис. 1). Хотелось бы отметить, что формула (4) справедлива в практическом применении при рекомендуемой толщине упругого слоя $h_2 < \frac{b}{2}$.

Учет нелинейного деформирования железобетона в гибких пластинах. Следует отметить, что в фазе уплотнения осадку жесткого фундамента и реактивные давления следует считать *линейно-зависящими от нагрузки на фундамент*, поэтому нормы проектирования фундаментов и оснований [19] допускают рассчитывать основания по деформациям, используя линейные модели, если среднее давление на основание не превышает некоторой величины, называемой расчётным сопротивлением основания. Гораздо сложнее взаимодействие с основанием *гибких* железобетонных фундаментов. В этом случае изменение эпюры реактивных давлений с ростом нагрузки происходит не только за счет особенностей деформирования грунта, но также за счет *уменьшения жесткости фундамента*, которое начинается с образования и раскрытия в нем трещин.

Приближенная теория изгиба анизотропных пластинок (тонких плит) достаточно полно и основательно изложена С. Г. Лехницким в монографии [20]. Цилиндрические жесткости изгиба пластинки определяются для главных направлений упругости, и имеют название главных жесткостей

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}. \quad (5)$$

Приведем здесь же выражение для потенциальной энергии изгиба ортотропной пластинки [20], при пренебрежении некоторыми компонентами тензора напряжений σ_z, τ_{yz} и τ_{xz} ,

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (6)$$

Хотелось бы отметить, что для железобетонных гибких пластин с возможными трещинообразованием ТНПА в статических расчетах рекомендует использовать приведенный модуль упругости (деформации) для нахождения соответствующих жесткостей.

Постановка задачи. Граничные условия. В работе рассматривается прямоугольная гибкая ортотропная плита под действием внешней нагрузки размерами $2a \times 2b$, толщиной h , опирающаяся на упругое основание (рис. 2), с цилиндрическими жесткостями в соответствующих плоскостях D_x, D_y . В приводимых ниже расчетах учитывается крутильная жесткость изолированной ортотропной плиты, которая вычисляется по формуле [21]

$$D_k = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x \cdot D_y}, \quad (7)$$

где D_x, D_y определяются по формулам (5).

В ходе упругого и нелинейного расчетов определяются осадки плиты, распределение контактных напряжений под ней, внутренние усилия в плите (изгибающие моменты), а также выполняется анализ полученных результатов.

Упругое основание в данных исследованиях моделируется в виде упругого однородного изотропного слоя, жестко соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем).

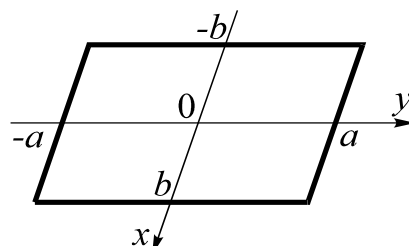


Рис.2 Расчетная модель плиты

Принимается, что в контактной зоне отсутствуют касательные напряжения и для плиты справедливы гипотезы технической теории изгиба [22].

Расчет прямоугольной ортотропной плиты выполняется методом Б.Н. Жемочкина [16]. Плита разбивается на одинаковые прямоугольные участки размерами $\Delta x \times \Delta y$ и в центре каждого участка размещается вертикальная связь для описания контакта плиты с упругим основанием. Считается, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений при определении перемещений центра участка.

Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом строительной механики [22], приняв за неизвестные силы в контактных связях Жемочкина, а также два угловых и линейное перемещения введенного защемления нормали в центре плиты.

Канонические уравнения смешанного метода для решения поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1} X_1 + \dots + \delta_{1,m} X_m - \varphi_x y_1 - \varphi_y x_1 + u_1 + \Delta_{1,p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m,1} X_1 + \dots + \delta_{m,m} X_m - \varphi_x y_m - \varphi_y x_m + u_1 + \Delta_{m,p} = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k y_k - M_x = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k x_k - M_y = 0; \\ - \sum_{k=1}^m X_k - R = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

где m – число участков Жемочкина на плите; u_1 , φ_x , φ_y – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного защемления в центре плиты; R , M_x , M_y – равнодействующая внешних сил и моменты равнодействующей относительно координатных осей, расположенных в плоскости плиты и проходящих через центр плиты; X_k – усилие в связи Жемочкина с номером k .

Алгоритм нелинейного расчета ортотропной плиты с трещиной методом Б.Н. Жемочкина. Сформулированную задачу в нелинейной постановке авторы предлагают решать итерационным путем метода Б.Н. Жемочкина через зависимость «жесткость – кривизна» [13]. На первой итерации плита рассчитывается как линейно-упругая, однородная и ортотропная (см. выше), на последующих - как линейно-упругая, ортотропная неоднородная на каждом участке Жемочкина.

Для упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем), вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы P определяются через соотношение (2.13) из монографии Босакова С.В. [7]

$$W(R) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right) \right], \quad (9)$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ – радиус-вектор перемещающихся точек с координатами (x, y) исследуемой поверхности упругого слоя от силы, приложенной в точке с координатами (ξ, η) ;

h – мощность (толщина) упругого слоя, м; $\Gamma(n+1)$ – гамма-функция; $P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right)$

– полином Лежандра [18];

a_n – неопределенные коэффициенты разложения в ряд.

В монографии Босакова С.В. [7] определены коэффициенты a_n в следующих значениях $a_0 = -1$; $a_1 = -3/2$; $a_2 = -1$; $a_3 = -1/3$; $a_4 = 1/18$; ...

После интегрирования (9) по площади прямоугольного участка размерами $\Delta x \cdot \Delta y$ получаем выражения для определения перемещений центра участка Жемочкина с номером i от действия сосредоточенной силы, равной 1, приложенной к центру участка с номером k .

Первое слагаемое в формуле (9) определяет функцию вертикальных перемещений для упругого однородного изотропного полупространства (решение Буссинеска), интегрируется точно (оно сингулярное), остальные – не сингулярные и не интегрируются. Для практических расчетов в формуле (9) можно ограничиться пятью членами ряда.

В монографии [7] получено соотношение (3.3) для перемещения точки $M(x_i, y_i)$ поверхности упругого полупространства при загрузении участка прямоугольной формы на этой поверхности равномерно-распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1.

Перемещения точки поверхности основания $M(x_i, y_i)$ запишем в следующем виде

$$W(x_i, y_i) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} \cdot F_{ik}, \quad (10)$$

где $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которую определяем из формулы (9) через соотношение (3.3) [7].

Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы (рис. 3) определяются методом Ритца [23] при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое один из авторов предлагает впервые в [24].

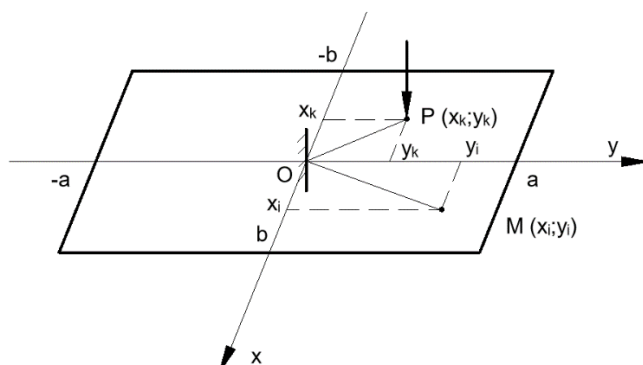


Рис.3. Гибкая плита с защемленной нормалью

Общий вид нового решения имеет следующее представление

$$W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i) = \left(\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} \right) \left(A_{0,0}^{(n)} + A_{1,0}^{(n)} \frac{x_i}{a} + A_{0,1}^{(n)} \frac{y_i}{b} + A_{2,0}^{(n)} \frac{x_i^2}{a^2} + A_{1,1}^{(n)} \frac{x_i y_i}{ab} - \frac{b^2(a^2 + 3b^2)A_{2,0}^{(n)}}{a^2(3a^2 + b^2)} \frac{y_i^2}{b^2} \right), \quad (11)$$

где x_i, y_i – координаты точки i , в которой определяются прогибы плиты $W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i)$ с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода;

$A_{m,k}^{(n)}$ – постоянные коэффициенты метода Ритца [23] при координатных функциях,

базисной из которых является функция $f_{m,k}(x_i, y_i) = \frac{x_i^m y_i^k}{a^m b^k}$, где чередующиеся индексы $m, k = 0, 1, 2$.

Выражение (11) удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению.

Далее определяется функционал полной энергии ортотропной пластинки с защемленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной единичной силы как квадратичную функцию коэффициентов $A_{i,k}$, что позволяет из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) найти эти коэффициенты и, таким образом, вычислить прогибы плиты с защемленной нормалью. Так формируется система уравнений способа Жемочкина на каждой итерации.

В нелинейных расчетах плиты при нахождении переменной (секущей) жесткости для участка Жемочкина на каждой итерации используется зависимость "жесткость - кривизна" для каждого из направлений X и Y , аппроксимированная нелинейной функцией, характер зависимости которой графически свидетельствует о нелинейно-упругой работе ортотропной плиты и ее деформировании с учетом трещинообразования и раскрытия трещин.

Итерационный процесс решения сформулированной контактной задачи организуется через итерационный алгоритм по А.А. Ильюшину [25] в области малых упругопластических деформаций и заканчивается при достижении заданной точности получаемых результатов.

Численные результаты по предлагаемой выше новой универсальной методике нелинейного расчета гибких ортотропных плит на изотропном упругом слое приведены в работе [26].

Выводы и заключения. В работе предложена в развитии методика и последовательность нелинейного итерационного расчета методом Б.Н. Жемочкина железобетонной гибкой ортотропной плиты на произвольном упругом основании,

моделируемом в данной работе упругим слоем конечной толщины. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определяются методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое автор предлагает впервые в проводимых исследованиях. Кроме того, в отличие от традиционных подходов, основанных на применении зависимости «момент-кривизна», используется зависимость «жесткость-кривизна», что сокращает объем вычислений.

Моделированию работы фундаментной балки с трещинами посвящены работы Соломина В.И., Мурашева В.И. и др. Как следует из данных работ, предполагается, что фундаменты будут работать с трещинами. В этом случае необходимо учитывать нелинейные свойства железобетона через переменную кривизну элемента балки. Проведенный выше анализ по данной тематике показал, что данный вопрос изучен не в неполной мере. Таким образом, изучаемая отрасль исследований нелинейных задач требует дальнейшей разработки, как в плане создания общей методики решения данного вида задач, так и в плане создания численно-аналитических методов аналогичных расчетов с учетом нелинейности конструкции и неоднородности основания.

Литература

1. Мурашев, В.И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / В.И. Мурашев – М.: Машиностроение, 1950. – 268 с.
2. Гвоздев, А.А. Метод предельного равновесия в применении к расчету железобетонных конструкций // А.А. Гвоздев/ Инженерный сборник, т.5, вып.2. – 1949. – С. 3-20.
3. Гвоздев, А.А. К вопросу о предельных условиях (условиях текучести) для ортотропных сред и для изгибаемых железобетонных плит // А.А. Гвоздев / В кн.: Строительная механика. М.: Стройиздат –1966. – С. 208-218.
4. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н.И. Карпенко – М.: Стройиздат, 1976. – 204 с.
5. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В.И. Соломин – 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. – 680 с.
6. Семенюк, С.Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно-деформируемом основании / С.Д. Семенюк – Могилев, БРУ, 2003. – 269 с.
7. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
8. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – Т. 279, № 4. – С. 2–5.
9. Козунова, О. В. Статический расчет дорожной плиты на слоистом основании / О. В. Козунова // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 134–139.
10. ТКП 45-5.01-254-2012* (02250) (переиздание в 2019 г.) Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. Строительные нормы проектирования. РУП «Стройтехнорм», 2012. – 118 с.
11. Коренев, Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б.Г. Коренев – М.: Госстройиздат, 1954. – 231 с.
12. Серебрянный, Р.В. Определение разрушающе нагрузки для плит на упругом основании // Р.В. Серебрянный / Основания, фундаменты и механика грунтов, №2 – 1960. – С. 10-12.
13. Соломин, В.И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций // В.И. Соломин, С.Б. Шматков/ М., Стройиздат –1986. –208с.

14. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
15. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Под общ. ред. А. Б. Васильева [и др.]. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
16. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
17. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // Труды ХАДИ. – 1953. Вып. 14. – С. 33–46.
18. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963.–1098 с.
19. Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-5.01-254–2012* (02250). Введен 01.07.2012. – Минск: Минстройархитектуры, 2012. – 118 с.
20. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. – 387 с.
21. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963. – 536 с.
22. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
23. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест: БрГТУ, 2006. – 107 с.
24. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. Т. 21, № 3. – С. 211–221.
25. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
26. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. Т. 21, № 4. – С. 290–296.

УДК 51-74

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГОРОДСКОГО ЛАНДШАФТА

В.Т. Калайда, А.И. Шапошников, Национальный исследовательский Томский государственный университет, пр. Ленина, 36, 634050, г. Томск, Российская Федерация, albertelena@mail.ru.

Недавно зарегистрированная Роспатентом [1] техника измерения фрактальной размерности применена для спутниковых изображений Минских городских кварталов. Подробно разобраны шаги вычисления статистических параметров. Приведены и обсуждены результаты для примеров вложенных друг в друга изображений. Примененный метод поиска статистических параметров фрактальной размерности позволяет обоснованно сравнивать между собой значения фрактальной размерности существенно различающихся объектов. В качестве материалов используются имеющиеся в открытом доступе [2] снимки городских кварталов Минска. Новизной данного исследования является использование двух вложенных друг в друга изображений. То есть, на втором изображении взят участок с первого более детализированным масштабом. Такой прием позволяет сравнивать между собой результаты, полученные для вообще говоря различных изображений. Приведены гистограммы и графики выборок значений фрактальной размерности, получившиеся в