УДК 531.1:621.01]:681.3 (075.8)

Носов В.М.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АНАЛОГОВ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

При проектировании приводов машин активно используются понятия аналогов угловых и линейных скоростей ($\omega_{k\varphi}$ и $\bar{v}_{m\varphi}$) и ускорений ($\varepsilon_{k\varphi}$ и $\bar{a}_{m\varphi}$) как соответственно первых или вторых производных от угла поворота k-го звена φ_k или радиуса-вектора $\bar{r}_m$ некоторой его точки m по обобщенной координате φ_1:

аналог угловой скорости: $$\omega_{k\varphi} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = \varphi_k\,'; \qquad (1)$$

аналог линейной скорости: $$\bar{v}_{m\varphi} = \frac{d\bar{r}_m}{d\varphi_1} = \bar{r}_m\,'; \qquad (2)$$

аналог углового ускорения: $$\varepsilon_{k\varphi} = \frac{d\omega_{k\varphi}}{d\varphi_1} = \omega_{k\varphi}\,' = \varphi_k\,''; \qquad (3)$$

аналог линейного ускорения: $$\bar{a}_{m\varphi} = \frac{d\bar{v}_{m\varphi}}{d\varphi_1} = \bar{v}_{m\varphi}\,' = \frac{d^2\bar{r}_m}{d\varphi_1^{\,2}} = \bar{r}_m\,''. \qquad (4)$$

Здесь в формулах (1)–(4) и везде при дальнейшем изложении первая или вторая производные по обобщенной координате φ_1 (или S_1)обозначаются соответственно одним или двумя штрихами.

Однако в курсе теоретической механики все кинематические характеристики (линейные и угловые скорости и ускорения) представляются обычно функциями от времени t.

Это является естественным, так как вытекает непосредственно из их определений как первой или второй производной от радиуса-вектора $\bar{r}_m$ или угла поворота φ_k по времени t:

$$\bar{v}_m = \frac{d\bar{r}_m}{dt}, \qquad (5)$$

$$\bar{a}_m = \frac{d\bar{v}_m}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_m}{dt^2}, \qquad (6)$$

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt}, \qquad (7)$$

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d^2\varphi_k}{dt^2}. \qquad (8)$$

Такой подход является общепринятым и традиционным в курсе теоретической механики, позволяя всесторонне изучить движение материальных точек и тел.

Однако, при проектировании приводов машин и выполнении динамического расчета, реальные характеристики машины учитываются в виде приведенных массы m_n и момента инерции I_n, его производной $\frac{dI_n}{d\varphi_1}$, а также приведенных моментов движущих сил $M_Д{}^n$ и моментов сил технологического сопротивления $M_C{}^m$. Последние представляют собой функции от обобщенной координаты φ_1, для определения которых знание кинематических характеристик как функций от обобщенной координаты, то есть аналогов скоростей и ускорений, является необходимым.

В курсе теории механизмов и машин [1-2] широко используется изучение кинематических характеристик механизмов не от времени, а от обобщенной координаты с применением аппарата аналогов скоростей и ускорений, которые при этом часто называют передаточными функциями. Однако для их получения используют только известный координатный метод:

- выражают декартовые координаты точек механизмов через обобщенную координату;
- дальнейшее определение аналогов угловых и линейных скоростей и ускорений выполняют с помощью соответственно одно- или двукратного формального дифференцирования по обобщенной координате φ_1.

При таком подходе получающиеся достаточно громоздкие аналитические выражения, используемые в дальнейших расчетах, называются передаточными функциями. Этот общий термин отражает только практическую направленность используемого аппарата аналогов скоростей и ускорений, нивелируя их сущность. На самом деле они представляют собой проекции соответствующих разных аналогов скоростей и ускорений на декартовы оси координат. Поэтому прекрасно развитый аппарат теоретической механики поможет разобраться в любых, даже достаточно сложных случаях (например, кривошипно-кулисном механизме (ККМ), реализующем сложное движение точки)

В пособии [3] получены векторные выражения основных соотношений для аналогов скоростей и ускорений при различных видах движения тела.

Установлено, что векторные соотношения для аналогов скоростей и ускорений при различных видах движения твердого тела полностью совпадают с соответствующими известными соотношениями для самих скоростей и ускорений.

Показано, что составляющие этих соотношений для аналогов линейных скоростей и ускорений могут быть получены из соответствующих соотношений для самих скоростей и ускорений, для чего в их правых частях следует во всех случаях вместо самих скоростей и ускорений (угловых, линейных или их проекций) использовать их соответствующие аналоги.

Для удобства использования предлагаемого метода аналогии в третьей главе работы [3] впервые доказывается *теорема об аналогах линейных скоростей и ускорений любой точки, находящейся на первом (входном) вращающемся звене.*

Аналоги линейных скоростей и ускорений любой точки m, расположенной на входном вращающемся звене, равны по модулю расстоянию от центра вращения до этой точки. Вектор аналога линейной скорости $\bar{V}_{m\varphi}$ направлен перпендикулярно этому расстоянию в сторону возрастания угла поворота звена, а вектор аналога линейного ускорения $\bar{a}_{m\varphi}$ направлен по этому звену от точки к центру вращения.

Теорема доказывается одно- и двукратным дифференцированием по обобщенной координате φ_1 вектора постоянного модуля $\left|\bar{l}_m\right| = const$, равного расстоянию от центра вращения до точки *m*.

$$\bar{V}_{m\varphi} = \frac{d\bar{l}_m}{d\varphi_1} = l_m \bar{n}_1, \qquad (9)$$

$$\bar{a}_{m\varphi} = \frac{d\bar{V}_{m\varphi}}{d\varphi_1} = \frac{d\left(l_m \bar{n}_1\right)}{d\varphi_1} = l_m \frac{dn_1}{d\varphi_1} = -l_m \bar{l}_1^0, \qquad (10)$$

так как угол поворота нормали к 1-му звену $\bar{n}_1$ совпадает с углом поворота этого звена φ_1, поэтому отношение $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1}$ в последних зависимостях обоих равенств равно единице и не указывается.

Отметим, что теорема имеет особенно важное значение при рассмотрении различных кулисных механизмов, так как абсолютное или переносное движение точки *А* кулисы часто является вращательным и она обычно расположена на 1-м звене (см. рис. 1-2).

Покажем использование векторных методов механики на примере определения аналогов скоростей и ускорений для кривошипно-кулисного механизма (ККМ):

- с ползуном, движущимся по гармоническому закону (синусный механизм рис. 1);
- с двумя ползунами при вертикальной оси абсолютного движения (рис.2).

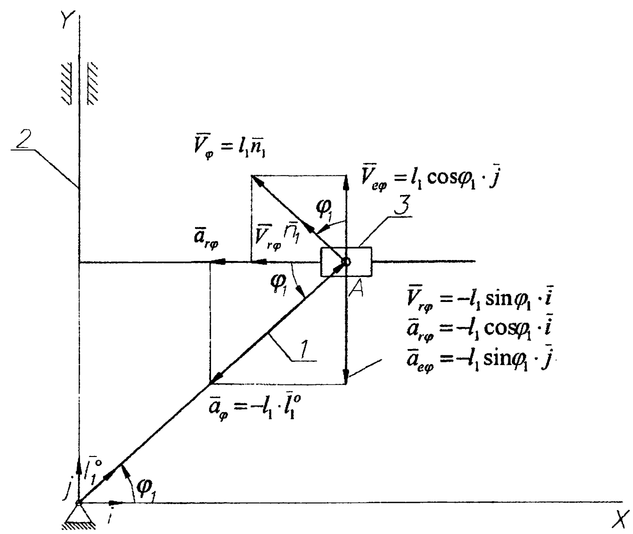

Рис. 1. Схема ККМ с ползуном, движущимся по гармоническому закону (синусный механизм), с изображенными на ней аналогами скоростей и ускорений

Будем рассматривать движение точки A ползуна ККМ, изображенного на рис. 1, как составное. В нем скольжение ползуна вдоль горизонтальной части изогнутого 2-го звена является поступательным относительным движением, а также поступательное движение самого 2-го звена в вертикальных направляющих является переносным, что обусловливает в данном случае равенство нулю аналога ускорения Кориолиса.

В своем абсолютном движении точка A, принадлежащая 1-му звену, совершает вращательное движение по окружности постоянного радиуса $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{l}_1$ Поэтому согласно вышеприведенной теореме аналоги ее линейных скорости и ускорения равны по модулю l_1 и направлены соответственно перпендикулярно первому звену в сторону возрастания угла φ_1 и вдоль 1-го звена к центру вращения:

$$\bar{v}_{gj} = l_1\bar{n}_1, \tag{11}$$

$$\bar{a}_\varphi = -l_1\bar{l}_1^0. \tag{12}$$

Проектируя равенства (11)-(12) на вертикальную и горизонтальную оси получим соответственно относительные и переносные аналоги линейных скоростей и ускорений, представляя результаты в векторной форме записи – с использованием ортов $\bar{i}$ и $\bar{j}$ (см. рис. 1):

$$\bar{v}_{e\varphi} = l_1\cos\varphi_1\bar{j}, \tag{11а}$$

$$\bar{v}_{r\varphi} = -l_1\sin\varphi_1\bar{j}, \tag{11б}$$

$$\bar{a}_{e\varphi} = -l_1\sin\varphi_1\bar{j}, \tag{12а}$$

$$\bar{a}_{r\varphi} = -l_1\cos\varphi_1\bar{j}. \tag{12б}$$

Для возможности использования полученных результатов для дальнейших расчетов на ПК следует перейти к "аналитической" форме записи результатов, в которой используется само значение соответствующего аналога с учетом знака (т.е. все, что стоит в выражениях (11а)-(12б) перед ортами $\bar{i}$ или $\bar{j}$):

$$v_{e\varphi} = l_1 \cos\varphi_1 , \tag{11a'}$$

$$v_{r\varphi} = -l_1 \sin\varphi_1 \bar{j}, \tag{11б'}$$

$$a_{e\varphi} = -l_1 \sin\varphi_1 \bar{j}, \tag{12 a'}$$

$$a_{r\varphi} = -l_1 \cos\varphi_1 \bar{j}. \tag{12 б'}$$

В таком виде выражения (11а')-(12б') соответственно совпадают с зависимостями (5.85)-(5.88) |1, с. 125|, полученными в результате аналитического расчета путем дифференцирования по обобщенной координате φ_1 проекций уравнений связей.

Отметим, что при сравнении здесь и далее следует учесть, что в работе |1| неподвижная стойка считается не нулевым звеном, как у нас, а 1-м, в результате чего входное звено имеет 2-й номер, что приводит к несовпадению нумерации звеньев и соответствующих индексов.

В заключение отметим, что векторные методы механики для определения аналогов скоростей и ускорений могут найти активное применение при профилизации курса теоретической механики для механических (особенно машиностроительных) специальностей, а также для моделирования кинематических связей в технологических машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебное пособие для втузов. –М.: Наука, 1988. – 640 с. 2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: Учебное пособие для втузов. –М.: Наука, 1990. – 592 с. 3. Носов В.М. Определение скоростей и ускорений с использованием их аналогов для основных (базовых) механизмов: Учеб.–метод. пособие для мех. спец. – Мн.: БГПА, 1994. – 164 с.