

**НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ
СЛОЯ С ЭФФЕКТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ**

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Пусть слой толщиной L лежит на полупространстве $x_1 \geq x_{10}$. Слой L состоит из слоев толщиной $l_i (i=1, 2, \dots, n)$ известно, что $l_i \ll L$. Например, это может быть чередование песка и глины, рис. 1.

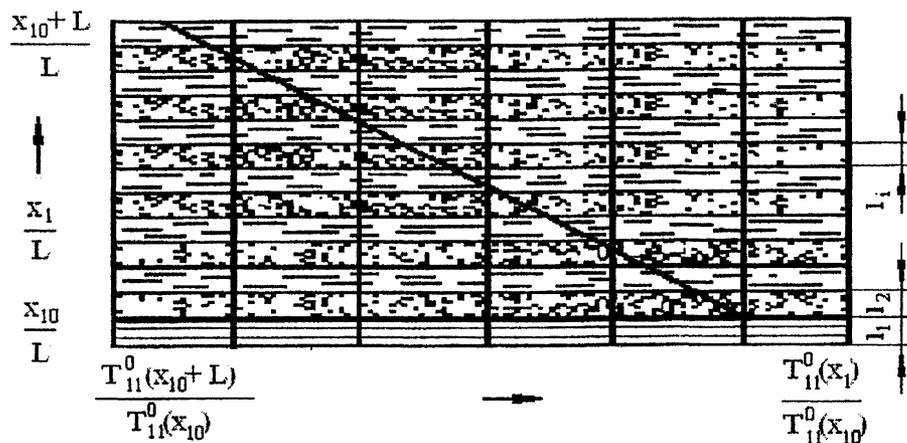


Рис.1. Пример стратифицированного гранулированного слоя.

Пусть сдвиговая волна (SH) падает на плоскую границу $x_1 = x_{10}$ из полупространства $x_1 < x_{10}$. Если необходимо получить точное решение задачи, то нужно поставить начальные и граничные условия и описать распространение волн для каждого слоя. Поставленная задача представляет большие трудности, поэтому применяются различные приближения для этой задачи. Метод эффективной среды позволяет получить решение данной задачи. Применение метода осреднения (метод гомогенизации или энергетической континуализации) позволяет получить феноменологическую модель неоднородной среды. Известно, что макроскопические (эффективные) свойства стратифицированной гранулированной среды достаточно хорошо описываются уравнениями гипопластической среды [1-3].

Рассмотрим задачу о распространении волны, которая отражается от свободной поверхности $x_1 = x_{10} + L$. Такая плоская волна распространяется в направлении $-x_1$ и распадается на две: прямую и обратную волны. Это обусловлено возрастанием волнового сопротивления в направлении $-x_1$.

Из уравнений [4] имеем

$$C_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - (1 - \varepsilon(x)) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1)$$

где

$C_0^2 = h_1 / 2\rho$, $\varepsilon(x) \approx (C_1 / C_0)^2$, $C_1^2 = (T_{11}^0 - T_{22}^0) / 2\rho$, $U(x_1, t) = V_2(x_1, t)$ Для упрощения вычислений предположим, что $\rho = \text{const}$. Падающая волна генерирует на свободной поверхности распределение волновых источников $f(t_1)$, которое определяется из уравнения [5].

$$U(x_{10} + L, \psi(x_{10} + L)) = \frac{1}{2C_0} \int dt_1 \theta(t - t_1) f(t_1) \quad (2)$$

В этом случае отраженное волновое поле описывается с помощью функции Грина $G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)_1$ в виде

$$U(x_1, t) = \int G(x_1, t, x_{10} + L, t_1) f(t_1) dt_1 \quad (3)$$

Функция Грина $G(x_1, t, x_{10} + L, t_1)_1$ удовлетворяет интегральному уравнению [6]

$$G(x_1, t; x_{10} + L, t_1) = g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) - \int_{x_{10}}^{x_{10} + L} \varepsilon(x_2) dx_2 \int dt_2 g(x_1 - x_2, t - t_2) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G(x_2, t_1, x_{10} + L, t_2) g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) \cdot g(x_1 - x_{10} - L); \quad (4)$$

$$g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) = \frac{1}{2C_0} \theta\left(t - t_1 - \frac{1}{C_0} |x_1 - x_{10} - L|\right).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G(x_2, t_1, x_{10} + L, t_2) g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) = \frac{1}{2C_0} \theta\left(t - t_1 - \frac{1}{C_0} |x_1 - x_{10} - L|\right).$$

Решение уравнения можно получить в виде ряда рассеяния. В приближении однократного рассеяния решение запишем в виде

$$G(x_1, t; x_{10} + L, t_1) \approx g(x_1 - x_{10} - L, t - t_1) - \\ - \int_{x_{10}}^{x_{10} + L} \varepsilon(x_2) dx_2 \int dt_2 g(x_1 - x_2, t - t_2) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g(x_2 - x_{10} - L, t_1 - t_2). \quad (5)$$

Представим функцию G в виде

$$G(x_1, t; x_{10} + L, t_1) = G_1(x_1, t; t_1) + G_2(x_1, t, t_1), \quad (6)$$

где G_1 описывает распространение прямой волны, G_2 описывает отра-

отраженную волну.

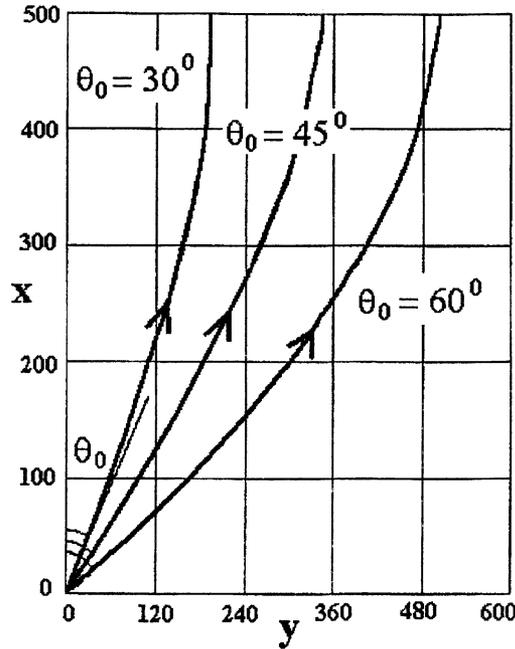


Рис.2. Траектории лучей для $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta_0 = 60^\circ$

Функция G связана с G_1 , G_2 формулами [6]

$$\frac{2}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} G_1(x_1, t, t_1) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x_1, t; x_{10} + L, t_1); \quad (7)$$

$$-\frac{2}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} G_2(x_1, t, t_1) = + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) G(x_1, t, x_{10} + L, t_1). \quad (8)$$

Рассмотрим наклонное падение волны на границу $x_1 = 0$ из полупространства $x_1 < 0$. В трехмерном случае лучи будут кривыми линиями, которые удовлетворяют уравнениям [7]

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{\tau}, \quad \frac{d(n\bar{\tau})}{ds} = \text{grad } n, \quad \frac{d\psi}{ds} = n, \quad n(\bar{x}) = \frac{C_0}{C(\bar{x}_1)}, \quad (9)$$

где $\bar{\tau}$ – касательный вектор к лучевой траектории, n – коэффициент преломления, s – расстояние вдоль луча, C_0 – скорость волны в полупространстве $x < 0$.

Для системы дифференциальных уравнений (9) заданы граничные условия на начальной поверхности $S_0(x_1 = 0)$

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \quad \bar{\tau} = \dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}_0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{для } S = S_0(x_1 = 0). \quad (10)$$

Если лучевая траектория определяется, то фаза ψ (эйконал) рассчитывается вдоль луча согласно формуле $\psi(\bar{x}_1) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{C(\bar{x}_1)} = \int_{M_0}^{M_1} n(\bar{x}_1) ds$ [7]. Лучевые

траектории ортогональны волновой поверхности $\psi(\bar{x}_1) = \text{const}$. В формулах изменение dS вдоль лучевых траекторий находится из уравнения (9). Эта зависимость не находится в аналитическом виде в общем трехмерном случае и произвольной функции $n(\bar{x}_1)$. Рассмотрим уравнение (9) в плоскости x_1Ox_2

$$\frac{d(n \sin \theta)}{dS} = \frac{\partial n}{\partial x_1} = 0. \quad (11)$$

Уравнение для траектории луча имеет вид [5]

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \text{tg} \theta = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (12)$$

Положим $L = 500$ м, тогда имеем

$$n^2 = \sqrt{\frac{500}{500 - x_1}}, \quad (13)$$

где $n(x_1, x_2) = C_0 / C_s(x_1, x_2)$ – коэффициент преломления, для упрощения предположим, что $h_1 \ll (T_{11} - T_{22})$. Поведение лучей для различных углов между осью и лучами изображено на рис.2.

Как следует из (12), (13), если $dn/dx_1 > 0$, то траектории лучей, которые имеют начальный угол $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ изгибаются и вблизи свободной поверхности стремятся к вертикали. Поэтому волновой фронт, который падает на свободную поверхность $x_1 = L(S_L)$, становится параллельным плоскости $x_1 = L$ и отраженная волна тоже плоская.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karal F.C. and Keller J.B. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer. –1959. –№31. –P.694–705.
2. Rossikhin Yn. A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamics problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // ASME Appl Mech Rev. –1995. –№48. – P.39–45.
3. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. –Мн.: Технопринт, 2000. – 450с.
4. Чигарев А.В., Белоус Е.А. Решение уравнений распространения волн сдвига в слое с эффективными свойствами // Теоретическая и прикладная механика. –2005. –№18. – С.58–63.
5. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. –М.: Наука, 1980. –304с.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. –М.: Наука, 1979. –383с.
7. Гольдин С.В., Березин Ю.А. Сейсмические волны в сыпучих грунтах в рамках гипопластической модели // Физическая мезомеханика. –2003. –№1. –С.58–62.