**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный технический университет**

**Кафедра «Математические методы в строительстве»**

**Электронный учебно-методический**

**комплекс по учебной дисциплине**

**«МАТЕМАТИКА (РАЗДЕЛ: ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ)»**

**для специальностей**

**1-69 01 01 «Архитектура» и 1-69 01 02 «Архитектура и дизайн»**

Составитель: Мороз О.А.

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета факультета транспортных коммуникаций
« 26 » декабря 2022 г., протокол № 4

Минск БНТУ 2022

Рецензенты:

Гуло Ирина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка;

Катковская Ирина Николаевна, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и медицинской физики Международного государственного экологического института им. А.Д.Сахарова Белорусского государственного университета.

Электронный учебно-методический комплекс «Математика (раздел: элементы линейной и векторной алгебры)» содержит:

– вспомогательный материал;

– лекционный материал;

– материал для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материал для текущего контроля.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины по указанному разделу, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины (по данному разделу) в объеме, установленном учебным планом по специальности. Теоретический материал дополнен подробными решениями задач по данным темам.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы тематического контроля знаний в виде тестов.

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс «Математика (раздел: элементы линейной и векторной алгебры)» предназначен для студентов первого курса обучения по специальностям 1-69 01 01 «Архитектура» и 1-69 01 02 «Архитектура и дизайн».

Объем изучаемого раздела «Элементы линейной и векторной алгебры» в соответствии с учебным планом составляет 8 часов лекций и 8 часов практических занятий (очная форма получения высшего образования). Целью ЭУМК является оптимизация и координирование работы студентов и преподавателей по изучению предмета математика для студентов специальностей 1-69 01 01 «Архитектура» и 1-69 01 02 «Архитектура и дизайн», систематизация теоретического, практического материала и материала для проверки и контроля знаний в единый модуль.

**Структурирование и подача учебного материала.** Материал курса представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, и тестов теоретического и практического характера. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой в объеме, предусмотренном учебным планом.

**Рекомендации по организации работы с ЭУМК.** Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

Целями преподавания дисциплины «Математика» являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни общества;
- развитие интеллектуального потенциала студентов и способностей их к логическому и алгоритмическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений технических задач и выбора наилучших способов реализации этих решений;
- обучение методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;

**Задачами** преподавания дисциплины «Математика» являются:

- демонстрация сущности научного подхода на примерах математических понятий и методов.
- обучение студентов приемам исследования и решения математически формализованных задач.

- выработка у студентов умения анализировать полученные результаты;
- привитие студентам навыков самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» по данному разделу студент должен:

***знать:***
- основные понятия и методы линейной и векторной алгебры;

***уметь:***
- выполнять операции над матрицами и определителями;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- проводить различные операции над векторами;
- находить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов;

***владеть***:
- навыками творческого аналитического мышления;
- исследовательскими навыками для решения теоретических и практических задач;
- умением самостоятельно и творчески работать, способностью самостоятельно генерировать и реализовывать новые идеи и методы.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

БПК-1. Владеть основными понятиями и методами линейной и векторной алгебры, применять полученные знания для решения задач теоретической и практической направленности.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## РАЗДЕЛ I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

### Тема 1.1. Матрицы

Матрицы, линейные операции над ними. Произведение матриц, обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы и его вычисление.

### Тема 1.2. Определители

Понятие и вычисление определителей второго, третьего и более высоких порядков. Свойства определителей.

### Тема 1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Невырожденные системы линейных уравнений и их решение матричным методом, методом Гаусса и по формулам Крамера.

### Тема 1.4. Векторная алгебра

Пространства $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$. Определение вектора и линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису и координаты вектора. Проекция вектора на ось. Прямоугольная система координат. Длина вектора, направляющие косинусы. Линейные операции над векторами в координатной форме. Скалярное произведение векторов, его свойства и приложения. Векторное произведение векторов, его свойства и приложения. Смешанное произведение векторов, его свойства и приложения.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА........................................................3

Лекция 1. Матрицы, линейные операции над ними. Произведение матриц, обратная матрица, теорема существования и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы и его вычисление ..........6

Практическое занятие 1 ........................................................12

Лекция 2. Понятие и вычисление определителей второго, третьего и более высоких порядков. Свойства определителей ..........14

Практическое занятие 2 ........................................................17

Лекция 3. Невырожденные системы линейных уравнений и их решение матричным методом, методом Гаусса и по формулам Крамера..........19

Практическое занятие 3 ........................................................24

Лекция 4. Пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Определение вектора и линейные операции над ннми. Разложение вектора по базису, координаты вектора. Проекция вектора на ось. Прямоугольная система координат. Длина вектора, направляющие косинусы. Линейные операции над векторами в координатной форме. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов; свойства и приложение ..........26

Практическое занятие 4 ........................................................31

Теоретические тесты ........................................................33

Тесты по практике ........................................................37

Рекомендуемая литература ........................................................43

## Введение

Математика и архитектура всегда и уже давно тесно связаны между собой. Геометрия считалась одним из разделов архитектуры в Древней Греции. До определенного момента истории математика и архитектура развивались в тесной взаимосвязи, но в 17 веке инженерные науки окончательно отделились от архитектуры. Изобретение компьютера в 50-х годах 20 века явилось отправной точкой обратного проникновения математики в архитектурные расчеты. Появилась необходимость ввести математические методы и модели в архитектурное проектирование.

Такие разделы математики, как основы высшей алгебры и аналитической геометрии, теория матриц и математический анализ, математическое моделирование и методы оптимизации, должен знать каждый современный инженер.

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

### Лекция 1. Матрицы, линейные операции над ними. Произведение матриц, обратная матрица, теорема существования и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы и его вычисление

*§1. Матрицы: основные понятия и определения.*

Впервые матрицы упоминались еще в древнем Китае, называясь волшебным квадратом (2-ой век до нашей эры).

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 2 |
| 8 | 1 | 6 |

Магический квадрат изображен в картине А. Дюрера «Меланхолия»:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Дата создания гравюры – 1514 год.

Являясь закономерным продуктом развития теории чисел, определение матрицы появилось в середине 19 века в работах английских математиков Гамильтона и Кэли.

**Матрицей размера $m \times n$** называется прямоугольная таблица, составленная из $mn$ элементов некоторого множества, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов.

Для матриц употребляют одно из следующих обозначений:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \left(a_{ij}\right), i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}.$$

Элемент матрицы, стоящий на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца обозначают $a_{ij}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые матрицы, например, матрицы $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов (m=n) называется **квадратной**. Порядком квадратной матрицы называют число ее строк или столбцов. В квадратной матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ элементы $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots a_{n1}$ - побочную диагональ.

Остальные матрицы являются прямоугольными. Строки и столбцы матрицы называются ее рядами.

Две матрицы *A* и *B* называют **равными** (*A*=*B*), если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны.

Частные виды матриц порядка $3\times 3$:

нулевая – $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; диагональная – $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; **единичная** – $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; треугольная – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; трапециевидная –

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица размера $1\times1$ является просто числом: (2) = 2.

Матрица $A^T$, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** к исходной. Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*§2. Операции над матрицами.*

а). К линейным операциям над матрицами относятся операции сложения и умножения матрицы на число.

**Суммой матриц** $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), i=\overline{1,m},; j=\overline{1,n}$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

**Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ на **число** $\lambda$ называется матрица $B=(b_{ij})$ того же размера, что и матрица А, причем $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

б). Операция **умножения матриц** $A\cdot B$ вводится только для **согласованных** матриц (число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$).

**Произведением матрицы** $A_{mn}=(a_{ij})$ **на матрицу** $B_{nk}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{mk}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$, (правило «строка на столбец»).

Пример. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

Решение. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot3+3\cdot1 \\ -1\cdot1+0\cdot2+5\cdot0 & -1\cdot(-1)+0\cdot3+5\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Замечание.

1. Произведение для несогласованных матриц не определено.

2. Произведение матриц вообще говоря не коммутативно, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

3. Таблица умножения есть произведение матриц: $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{T}\times(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$.

*§3 Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы.*

Матрица $A^{-1}$ называется **обратной** для квадратной матрицы $A$, если выполняется соотношение

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E,$$

где $E$ – единичная матрица.

**Невырожденной** называется квадратная матрица $A$, определитель которой отличен от нуля. В противном случае матрица называется **вырожденной**.

**Союзной** матрицей $A^{*}$ для матрицы $A$ называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^{T}.$$

**Алгебраическим дополнением** $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы А называется минор $M_{ij}$ со знаком

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

где **минор** $M_{ij}$ -определитель, полученный из определителя матрицы $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца.

Например, для матрицы $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-1&0&2\end{pmatrix}$ минор $M_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=-2$, минор $M_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$.

Теорема 1. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была невырожденной.

Теорема 2. Для невырожденной матрицы $A$ существует единственная обратная матрица.

Формула для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* .$$

Пример. Вычислить $A^{-1}$ и сделать проверку, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим невырожденность матрицы $A$, для этого вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 16 - (-12 + 4 - 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ матрица $A$ невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица.

Найдем союзную матрицу $A^*$, для чего вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Тогда $A^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

### *§4. Ранг матрицы и его вычисление.*

Введем понятие ранга матрицы. Выделим в матрице $A$ $k$ строк и $k$ столбцов. Определителем $k$-го порядка, порожденным матрицей $A$, называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных $k$ строк и $k$ столбцов. Например, для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 5 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$$ при $k=2$ получаем определители

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}.$$

**Рангом матрицы** $A$ **(**обозначается $r_A$) называется наивысший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

Решение. Минор 3-го порядка – это определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}=7\neq 0\Rightarrow$$

$rangA=3$.

**Элементарными преобразованиями матрицы** называют следующие:

1. Умножение произвольного ряда матрицы на число отличное от нуля.
2. Прибавление к одному ряду матрицы другого параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число.
3. Перестановка местами двух параллельных рядов.

Если матрица B получена из матрицы A элементарными преобразованиями, то пишут $A\rightarrow B$ или $A\sim B$. Известно, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Отсюда следует правило нахождения ранга матрицы:

При помощи элементарных преобразований приводят исходную матрицу к треугольной или трапециевидной форме**; ранг такой преобразованной матрицы равен числу отличных от нуля строк.**

Пример. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix}-4 & 2 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 1\\ 1 & 5 & -2 & -7\\ 1 & 10 & -3 & 15\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -7 \\ 1 & 10 & -3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & 10 & -3 & 15 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -17 & 10 & -20 \\ 0 & 22 & -11 & 28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -17 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -17 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 33 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow rang A = 3.$$

Замечание. Под элементами главной диагонали должны стоять нули.

**Практическое занятие 1**

Примеры для аудиторной работы:

1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ найти а) $A - 2B$; б) $3A + B$.

2. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице $A$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; с) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 11 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Найти $2A^T - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Существуют ли следующие произведения: а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$; в) $B \cdot C$; г) $C \cdot B$; д) $C \cdot A$; е) $A \cdot B \cdot C$? Найти возможные произведения матриц.

5. Найти $A^2$ и $A^3$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Найти ранги матриц: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответы. 1.а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 13 & -4 & 8 \\ 13 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 2.а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. 4.а) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) не существует; в) не существует; г) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; д) не существует; е) $\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$. 5. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. а) $r = 2$; б) $r = 1$; в) $r = 2$; г) $r = 3$; д) $r = 3$.

*Задание для самостоятельной работы*

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: а) $A^T \cdot A$; $A \cdot A^T$; $F \cdot B + D \cdot B$;
б) $C \cdot B^T \cdot F$; $B \cdot A \cdot F$; $C \cdot A + A$; в) $D \cdot F^2$; $B \cdot C \cdot D$.

2. Проверить справедливость матричного равенства $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $X$ из матричного уравнения $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матриц: а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1.а) $\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; не существует; б) $\begin{pmatrix} 24 & 15 \\ -6 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; не существует; $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; не существует. 2. Не выполняется. 3. $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.4. а) $r_A=3$; б) $r_B=2$.

## Лекция 2. Понятие и вычисление определителей второго, третьего и более высоких порядков. Свойства определителей

### *§5. Определители и их свойства.*

Любой квадратной матрице $A$ порядка n ставится в соответствие **число**, вычисленное по определенному правилу и называемое **определителем** или **детерминантом**: det $A$, $|A|$, $\Delta$.

Определитель 1-го порядка – число $|a_{11}|=a_{11}$.

Определитель 2-го порядка – число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Определитель 3-го порядка – число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+$

$a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$-$(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})$.

Пример. Вычислить определители 2-го и 3-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot(-2) = 22$.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 5\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot 1 - \left(1\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 6\right) =$
$= -54$.

*Свойства определителей*

$1^0$. Если в определителе какой-либо ряд состоит из нулей, то этот определитель равен нулю.

$2^0$. Определитель, имеющий два одинаковых параллельных ряда, равен нулю.

$3^0$. Определитель, имеющий два пропорциональных параллельных ряда, равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 8\cdot 1 - (1\cdot 6\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot 8 + 3\cdot 4\cdot 3) =$
$= 0$.

$4^0$. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

$5^0$. Общий множитель любого ряда можно вынести за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 18 \\ 3 & 15 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 3 & 15 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 3\cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 360.$

$6^0$. Определитель не изменится, если к элементам любого его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ему ряда, умноженные на любое число.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$. С другой стороны , $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ (умножим первую строку на –2 и сложим со второй строкой) $= = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

(умножим первую строку на 3 и сложим со третьей строкой) $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 6 & -8 \end{vmatrix}$

$=$ (умножим третью строку на 1 и сложим со второй строкой) $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -8 \end{vmatrix}$

$=$(умножим вторую строку на -6 и сложим с третьей)$= = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

$7^0$. Определитель не меняется при транспонировании.

$8^0$. Определитель произведения матриц равен произведению определителей.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель, пользуясь свойствами:

1) $\begin{vmatrix} 278 & 153 & 127 \\ 277 & 152 & 126 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

<u>Решение.</u>

1) $\begin{vmatrix} 278 & 153 & 127 \\ 277 & 152 & 126 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 278 & 153 & 127 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

2) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

Определители третьего и более высокого порядка можно вычислить с помощью следующей теоремы.

**Теорема о разложении определителя по элементам ряда.** Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} .$$

Рассмотрим определитель 3-го порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \left( a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \right) = \Delta .$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Решение</u>. Разложим определитель по элементам 2-ой строки:

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -207.$$

**Практическое занятие 2**

Примеры для аудиторной работы:

1. Вычислить определители 2-го порядка: а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.
2. Вычислить определители 3-го порядка: а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители 4-го порядка: а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 13 & 15 \\ 4 & 9 & 16 & 29 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить обратную матрицу $A^{-1}$, если а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения а) $A \cdot X = B$; б) $X \cdot A = B$, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Определить при каких $\lambda$ существует матрица, обратная данной

$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ 1 & 1+\lambda & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1. а) $12$; б) $-17$. 2. а) $-7$; б) $0$. 3. а) $1$; б) $17$. 4. а) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} -6 & 13 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -14 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 6. $\lambda$ не существует.

*Задание для самостоятельной работы*

1. Вычислить определители 3-го и 4-го порядков: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Найти матрицу, обратную данной: а) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
в). $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Решить матричные уравнения: а) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
б). $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 2X$ .

## Лекция 3. Невырожденные системы линейных уравнений и их решение матричным методом, методом Гаусса и по формулам Крамера

*§6. Системы линейных уравнений.*

**Линейной системой** $m$ **уравнений с** $n$ **неизвестными** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .......................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ – некоторые числа.

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется **основной матрицей системы** (1),

матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$ называется **расширенной матрицей.** Обозначим через $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из неизвестных системы (1),

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из свободных членов системы (1).

Тогда в **матричном виде** систему (1) можно записать следующим образом

$$A\cdot X=B.$$

**Решением системы** (1) называется такая совокупность чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ , при подстановке которых вместо соответствующих $x_1, x_2, ..., x_n$ в систему, получаем верное тождество.

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение; в противном случае – **несовместной**. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение. Система, имеющая более одного решения, называется неопределенной.

<u>Пример</u>. Записать систему линейных уравнений в матричном виде:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=8 \\ 7x_1+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=4 \end{cases} \to X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to A\cdot X=B.$$

Ответ на вопрос о совместности системы (1) дает следующая теорема.

*Теорема Кронекера-Капелли*

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы.

*§7. Невырожденные системы линейных уравнений. Матричный метод решения и метод Крамера.*

Рассмотрим систему *n* уравнений с *n* неизвестными в матричном виде

$$A\cdot X=B,$$

где $A=A_{n\times n}$ – невырожденная матрица, т.е. $\det A\neq 0$, $X_{n\times 1}$ – матрица из неизвестных $x_j$, $B_{n\times 1}$ – матрица из свободных членов $b_i$.

Матричное равенство умножим слева на матрицу $A^{-1}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow E\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$. Таким образом, получаем формулу **матричного** метода решения системы:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом $\begin{cases}-x_1+2x_2=8\\3x_1+x_2+x_3=2\\-2x_1-x_2=1\end{cases}$.

Решение. $DetA=\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&1&1\\-2&-1&0\end{vmatrix}=-5\Rightarrow$ система не вырождена. Следовательно, можем найти решение системы с помощью обратной матрицы $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$. Найдем элементы матрицы $A^{*}$, т.е. алгебраические дополнения: $\begin{matrix}A_{11}=1 & A_{21}=0 & A_{31}=2\\ A_{12}=-2 & A_{22}=0 & A_{32}=1\\ A_{13}=-1 & A_{23}=-5 & A_{33}=-7\end{matrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&0&1\\-1&-5&-7\end{pmatrix}$.

Тогда $X=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&0&1\\-1&-5&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$. Ответ. $X=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$.

Невырожденную систему линейных уравнений можно решать, используя формулы **Крамера**:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $\Delta_j$ – определитель, полученный из определителя $\Delta$ матрицы *A* заменой *j*-го столбца столбцом из свободных членов.

<u>Пример.</u> Решить систему методом Крамера $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$.

<u>Решение.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -25$. Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{10}{-5} = -2$,

$x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-15}{-5} = 3$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-25}{-5} = 5$. Ответ. $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -17 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -17 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 33 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow rangA = 3$.

## *§8. Решение произвольных систем линейных уравнений. Метод Гаусса.*

Рассмотрим произвольную систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}\ . \tag{1}$$

Наиболее универсальным и простым методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса.

Для совместных систем введем понятие **базисного минора** $\boldsymbol{M_Б}$ – любой, отличный от нуля минор матрицы $A$, порядок которого совпадает с рангом матрицы $A$. **Базисными неизвестными** совместной системы, ранг основной матрицы которой равен $r$, называются $r$ неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные называются **свободными**. Базисный минор и базисные неизвестные могут быть выбраны неединственным образом.

*Правило решения произвольных систем*

1. Записываем расширенную матрицу $A$ и элементарными преобразованиями приводим ее к треугольной или трапециевидной форме.

2. Находим $rangA$ и $rang\,A$.

3. Если $rangA \ne rang\,A$, то система несовместна.

4. Если $rangA = rang\,A = n$ – система имеет единственное решение.

5. Если $rangA = rang\,A < n$ – система имеет множество решений; тогда находим базисный минор и выражаем базисные переменные через свободные.

Метод решения системы приведением к треугольной или трапециевидной форме называется **методом Гаусса**.

Пример. Решить системы методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольной или трапециевидной форме с помощью элементарных преобразований.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$rangA = rang\,A = 3 \Rightarrow$ система имеет единственное решение, т.к. $n=3$

$2z=-1 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

$-y=0 \Rightarrow y=0$ . Ответ. $X=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$x+2y+z=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

б) $$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+3x_3=3. \\ 4x_1+x_2-x_3=8 \end{cases}$$

Решение. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$rangA = 2 \ne rang\,A = 3 \Rightarrow$ система несовместна.

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$

<u>Решение</u>. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = rang\,A = 2 < n = 3 \Rightarrow$ система имеет множество решений. Выберем базисный минор $M_Б = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ $x_1$ и $x_2$ – базисные переменные, а $x_3$ – свободная переменная. Пусть $x_3 = c$. Тогда из последней матрицы получаем $2x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 + c = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - c$; $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2 + c \Rightarrow x_1 = c - 1$. Ответ. $X = \begin{pmatrix} c-1 \\ 2-c \\ c \end{pmatrix}, \forall c \in R$.

## Практическое занятие 3

*Примеры для аудиторной работы*

1. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$.

2. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -5 \end{cases}$.

3. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а)}\begin{cases} 7x+2y+3z=15 \\ 5x-3y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases};\ \text{б)}\begin{cases} x-2y-z=5 \\ 3x+4y-2z=13 \\ y+3z=-6 \end{cases}.$$

4. Определить, при каком значении $\lambda$ система однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ \lambda x-14y+15z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$ имеет ненулевое решение.

Ответы: 1.а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. 2.а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. 3.а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. 4. $\lambda=5$.

*Задание для самостоятельной работы*

1. Решить систему линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x+y-z=6 \\ 2x-7y+z=0 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x+2y+13z=2 \\ 3x-y+5z=0 \\ 2x-y+5z=4 \end{cases}.$$

3. Решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}.$$

4. Исследовать системы на совместность и решить методом Гаусса:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x-y+2z=5 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases};\ \text{б)}\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2 \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1 \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4 \\ 7x_1-4x_2-7x_3-5x_4=-7 \end{cases}.$$

Ответы: 1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 4. а) Несовместна; б) $\begin{pmatrix} 5c-5 \\ 7c-7 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \forall c \in \mathbb{R}$.

## Лекция 4. Пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Определение вектора и линейные операции над ннми. Разложение вектора по базису, координаты вектора. Проекция вектора на ось. Прямоугольная система координат. Длина вектора, направляющие косинусы. Линейные операции над векторами в координатной форме. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов; свойства и приложение

### *§9. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.*

**Вектором** называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой $A$ и конечной точкой $B$, который можно передвигать параллельно самому себе.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, имеющие равные длины и одно и то же направление, определяют один и тот же вектор.

**Длиной** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка $[AB]$.

**Нулевым вектором** называется вектор, начало и конец которого совпадают.

**Единичным вектором** называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой) называют **коллинеарными**.

Векторы, лежащие на одной плоскости (или на параллельных плоскостях) называют **компланарными.**

К линейным операциям над векторами относятся сложение векторов и умножение вектора на число (скаляр).

**Суммой** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{в}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{в}$.

**Умножением вектора** $\vec{a}$ **на число** $\lambda$ называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, длина которого равна $\left|\lambda \cdot \vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно, если $\lambda < 0$.

**Проекцией вектора** $\vec{a}$ **на ось** $\vec{l}$ называется произведение длины вектора $\left|\vec{a}\right|$ на косинус угла между вектором $\vec{a}$ и направлением $\vec{l}$:

$$np_{\vec{l}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{l}\right).$$

*§10. Базис и координаты вектора.*

Введем обозначения:

$\mathbb{R}$ - числовая прямая (или множество действительных чисел или пространство размерности один);

$\mathbb{R}^2$ - плоскость (или пространство размерности два);

$\mathbb{R}^3$ - трехмерное пространство.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ называется **базисом** на множестве всех геометрических векторов в $\mathbb{R}^3$.

**Теорема.** Если $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ - базис в $\mathbb{R}^3$, то любой вектор $x\in\mathbb{R}^3$ единственным образом представим в виде

$$\vec{a}=\alpha_1\cdot\vec{e_1}+\alpha_2\cdot\vec{e_2}+\alpha_3\cdot\vec{e_3},$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – некоторые постоянные.

Числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ в разложении вектора $\vec{a}$ по базису называются **координатами** вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$.

Базис, состоящий из попарно перпендикулярных (ортогональных) единичных векторов, называют **ортонормированным**. Векторы этого базиса называют **ортами** и обозначают $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

**Декартовой (прямоугольной) системой координат** в $\mathbb{R}^3$ $R^3$ называется совокупность ортонормированного базиса и фиксированной точки О. Прямые, проходящие через точку О в направлении базисных векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ называют соответственно ***осями координат*** $OX, OY, OZ$.

Тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называется **координатным базисом**, если эти векторы удовлетворяют следующим условиям:

1. вектор $\vec{i}$ лежит на оси $OX$, вектор $\vec{j}$ – на оси $OY$, вектор $\vec{k}$ – на оси $OZ$;
2. каждый из векторов направлен на своей оси в положительную сторону;
3. $\vec{i}=(1;0;0)$; $\vec{j}=(0;1;0)$; $\vec{k}=(0;0;1)$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ **называется радиус-вектором точки М**:

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}=(x;y;z)$$

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$. Тогда

Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\cdot\vec{i}+(a_y+b_y)\cdot\vec{j}+(a_z+b_z)\cdot\vec{k}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$: $\lambda\vec{a} = \lambda \cdot a_x \vec{i} + \lambda \cdot a_y \vec{j} + \lambda \cdot a_z \vec{k}$.

Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{a},\vec{i}\right) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

Направляющие косинусы: $\cos\beta = \cos\left(\vec{a},\vec{j}\right) = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$,

$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{a},\vec{k}\right) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

где $\alpha,\beta,\gamma$ - углы вектора $\vec{a}$ с осями $OX, OY, OZ$ соответственно.

Формула деления отрезка $\left[M_1M_2\right]$ пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$
$$M_1\left(x_1, y_1, z_1\right); M_2\left(x_2, y_2, z_2\right); M\left(x, y, z\right).$$

*§11. Скалярное произведение векторов.*

**Скалярным произведением** двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

1°. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

2$^0$. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$

3$^0$. $\vec{a}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{b}\right) = \lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right), \lambda - const$.

4$^0$. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{a^2} \geq 0; \overrightarrow{a^2} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0.$

5$^0$. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

Пусть $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}$

Тогда скалярное произведение в координатной форме запишется как

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

<u>Пример</u>. Даны точки $A\left(1;2;-3\right), B\left(4;-1;0\right), C\left(0;1;4\right)$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение: Найдем векторы и их длины: $\overrightarrow{AB}=(3;-3;3), \overrightarrow{AC}=(-1;-1;7)$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}, \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+7^2}=\sqrt{51}$.

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{3\cdot(-1)+(-3)\cdot(-1)+3\cdot 7}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{51}}==\dfrac{21}{9\sqrt{17}}=\dfrac{7\sqrt{17}}{51}$.

*§12. Векторное произведение векторов.*

**Векторным произведением** $\vec{a}\times\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$;
2. $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;
3. Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Свойства векторного произведения.

$1^0$. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$2^0$. $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

$3^0$. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

$4^0$. $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то векторное произведение в координатной форме имеет вид:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Из определения и свойств векторного произведения следуют важные приложения:

а) установление коллинеарности векторов:

$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$;

б) нахождение площади треугольника и площади параллелограмма:

$S_{\vartriangle}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ и $S_{пар.}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Пример 1. Найти $S_{\vartriangle ABC}$, если $A=(-1;2;3), B=(2;1;4), C=(0;-3;4)$.

Решение. Запишем векторы $\overrightarrow{AB}=(3;-1;1), \overrightarrow{AC}=(1;-5;1)$. Тогда

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(4\vec{i}-2\vec{j}-14\vec{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+\left(-2\right)^2+\left(-14\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{216}=3\sqrt{6}.$$

Пример 2. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}=\left(3;-1;5\right)$ и $\vec{b}=\left(-6;2;-10\right)$.

Решение. Составим пропорцию $\frac{3}{-6}=\frac{-1}{2}=\frac{5}{-10}$. Так как координаты пропорциональны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

С другой стороны, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 5\\ -6 & 2 & -10\end{vmatrix}=\vec{0}\Rightarrow$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

*§13. Смешанное произведение векторов.*

**Смешанным произведением** трех векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ называется число, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения векторов: $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=$(по определению скалярного произведения)= $=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\theta$ = (по определению модуля векторного произведения) =

$$=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi=S_{пар}\cdot H_{п-да}=V_{п-да}.$$

Таким образом, модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

$1^0$. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$, т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

$2^0$. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}=-\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}$ , т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов-сомножителей.

$3^0$. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

$4^0$. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны.

Выразим смешанное произведение векторов через их координаты:
$\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right),\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right),\vec{c}=\left(c\ ;c_y;c_z\right)\Rightarrow$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения.

а). Определение объема параллелепипеда или треугольной пирамиды:

$$V_{п-да}=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,V_{тр.пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

б). Установление компланарности векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\text{ компланарны.}$$

в). Определение взаимной ориентации векторов:

если $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}>0,$ тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая; если $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}<0$, тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая.

Пример. Доказать, что четыре точки $A(3;5;1)$, $B(2;4;7)$, $D(4;4;5)$, $C(1;5;3)$, лежат в одной плоскости.

Решение. Запишем координаты трех векторов, выходящих из одной точки:

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;0;2)$, $\overrightarrow{AD}=(1;-1;4)$. Найдем смешанное произведение этих векторов

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$ векторы компланарны $\Rightarrow$ данные точки лежат на одной плоскости.

**Практическое занятие 4**

*Примеры для аудиторной работы*.

1) $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}-$ медианы $\triangle ABC$. Доказать равенство: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

2) Заданы векторы $\vec{a}_1(2;0;-4)$, $\vec{a}_2(3;0;1)$, $\vec{a}_3(2;-1;-1)$. Найти: а) вектор $\vec{a}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2+3\vec{a}_3$ и его длину; б) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{j}$; в) координаты орта $\vec{a}_1^{\,0}$.

3) Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}|=15$.

4) Даны точки $A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7), D(5;-4;2)$. Проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

5) Даны вершины треугольника $\triangle ABC: A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Определить внутренний угол при вершине $B$.

6) Является ли $\triangle ABC$ равнобедренным, если $A(1;2;1), B(3;-1;7)$, $C(7;4-2)$?

7) Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Найти координаты векторных произведений : а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$. Являются ли полученные векторы коллинеарными?

8) Найти площадь $\triangle ABC$ с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3), C(5;2;6)$.

9) Установить компланарность векторов: а) $\vec{a}=(2;3;-1), \vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$; б) $\vec{a}=(3;-2;1), \vec{b}=(2;1;2), \vec{c}=(3;-1;-2)$.

10) Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

11) Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины $D$, если она лежит на оси $OY$.

Ответы: 2. а) $\vec{a}(2;-3;-9)$; $|\vec{a}|=\sqrt{94}$; б) $np_j\vec{a}=-3$; в) $\vec{a}_1^{\,0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}};0;-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 3) $\vec{x}=(-5;10;10)$. 4) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{CD}\right|$; направлены в одну сторону. 5) $\angle B=45^o$. 6) да. 7). а) $(5;1;7)$; б) $(10;2;4)$. 8. $S=14$. 9. а) компланарны; б) не компланарны. 10. $V=3$. 11. $D_1=(0;8;0)$, $D_2=(0;-7;0)$.

*Задание для самостоятельной работы*

1) Какими должны быть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение: а) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; б) $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$?

2) Найти проекцию вектора $\overrightarrow{MN}$ на вектор $\vec{a}$, если $M(1;3;4)$ $N(2;0;5)$,

$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$.

3) В треугольнике $\triangle ABC$ найти косинус внутреннего угла $\angle A$ и длину медианы $AM$, если $A(3;1;0), B(-2;0;1), C(1;1;1)$.

4) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и

$\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$.

5) Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a}(3;1;-2)$, $\vec{b}(-4;0;3)$, $\vec{c}(1;5;-1)$.

Ответы: 1.а) перпендикулярны; б) коллинеарны. 2. $\dfrac{5}{\sqrt{77}}$.

3. $\cos\angle A = \dfrac{11}{\sqrt{135}}$; $|AM| = \dfrac{\sqrt{54}}{2}$. 4. $S = 5\sqrt{11}$. 5. $V = 6$.

## Теоретические тесты

*Тест 1 по теории*

(выбрать правильный ответ, неверный ответ зачеркнуть)

1. Размер матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 7 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ равен $2 \times 4$.

| да | нет |
|---|---|

2. $(-E)^{-1} = -E$ $\left( \textit{аналог} \dfrac{1}{-1} = -1 \right)$.

| да | нет |
|---|---|

3. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$ равен $1$.

| да | нет |
|---|---|

4. Если $|A| = 0$, то $|A^{-1}| = 0$.

| да | нет |
|---|---|

5. Матрица $A^{-1}$ имеет те же размеры, что и матрица $A$.

| да | нет |
|---|---|

6. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ может не иметь решений.

| да | нет |
|---|---|

7. Векторы называют компланарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

| да | нет |
|---|---|

8. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится по формуле: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$.

| да | нет |
|---|---|

9. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

| да | нет |
|---|---|

10. Может ли вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ составлять с осью $OX$ угол $\alpha = 30^0$, с осью $OY$ – угол $\beta = 45^0$?

| да | нет |
|---|---|

*Тест 2 по теории*

(выбрать правильный ответ, неверный ответ зачеркнуть)

1. Размер матрицы $C = A_{3\times 2} \cdot B_{3\times 2}$ равен $3\times 2$.

| да | нет |
|---|---|

2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ равен 1.

| да | нет |
|---|---|

3. Если $|A| = 2$, то $|A^{-1}| = -2$.

| да | нет |
|---|---|

4. Для матриц $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$ выполнима операция $B\cdot C\cdot A$.

| да | нет |
|---|---|

5. Формула Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta}{\Delta_j}$.

| да | нет |
|---|---|

6. Определитель изменится, если в нем поменять местами первый и третий столбцы.

| да | нет |
|---|---|

7. Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится по формуле: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$.

| да | нет |
|---|---|

8. $\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$.

| да | нет |
|---|---|

9. Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

| да | нет |
|---|---|

10. Может ли вектор $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ составлять с осью $OY$ угол $\beta=60^0$ и с осью $OZ$ угол $\gamma=60^0$?

| да | нет |
|---|---|

*Тест 3 по теории*

(выбрать правильный ответ, неверный ответ зачеркнуть)

1. Для матриц $A_{3\times4}$, $B_{1\times3}$, $C_{2\times4}$ выполнима операция $B\cdot A\cdot C$.

| да | нет |
|---|---|

2. Для произвольной матрицы $A$ справедливо равенство: $A\cdot E=E\cdot A$.

| да | нет |
|---|---|

3. Обратная матрица для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ равна $A^{-1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

| да | нет |
|---|---|

4. Ранг расширенной матрицы системы линейных уравнений не может быть больше числа неизвестных.

| да | нет |
|---|---|

5. Уравнения $AX=B$ и $X=BA^{-1}$ равносильны.

| да | нет |
|---|---|

6. Может ли вектор $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ составлять с осью $OX$ угол $\alpha=150^0$ и с осью $OZ$ угол $\gamma=30^0$.

| да | нет |
|---|---|

7. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

| да | нет |
|---|---|

8. Базисные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеют координаты $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(1;1;0)$, $\vec{k}=(1;1;1)$.

| | |
|---|---|
| да | нет |

9. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

| | |
|---|---|
| да | нет |

10. Смешанное произведение $\vec{i}\cdot\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{k}$.

| | |
|---|---|
| да | нет |

Ответы:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| тест 1 | нет | да | да | нет | да | да | нет | нет | да | нет |
| тест 2 | нет | да | нет | нет | нет | да | нет | нет | да | да |
| тест 3 | нет | нет | нет | да | нет | нет | да | нет | да | нет |

**Тесты по практике**

*Тест по практике 1*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Найти матрицу $X$ из уравнения $3A-X=2B+E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}4 & 14\\ 7 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-4 & -14\\ 4 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-4 & -14\\ 4 & 7\end{pmatrix}$; 5) другой ответ. |
| 2. | Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}16 & 7\\ -12 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}10 & -7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | 3) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$;<br>5) другой ответ. |
| 3. | Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. | 1) $-12$; 2) $-10$; 3) $0$;<br>4) $17$;<br>5) другой ответ. |
| 4. | Решить матричное уравнение $A\cdot X = B$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$;<br>2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;<br>3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$;<br>5) другой ответ. |
| 5. | Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. | 1) $r=0$; 2) $r=1$;<br>3) $r=2$; 4) $r=3$;<br>5)другой ответ. |
| 6. | Найти $\cos\varphi$ угла между векторами $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{k}$. | 1) $-\frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{14}}$ ;2) $0$<br>3) $-\frac{3}{\sqrt{18}}$;<br>4) $-\frac{8}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{13}}$;<br>5) другой ответ. |
| 7. | Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$, если $M(1;-3;2)$, $N(4;-1;-2)$. | 1) $\sqrt{29}$; 2) $\sqrt{41}$;<br>3) $\sqrt{40}$; 4) $6$;<br>5) другой ответ. |
| 8. | Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$. | 1) $\vec{x}=(2;1;-1)$;<br>2) $\vec{x}=(-2;-1;1)$;<br>3) $\vec{x}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | 4) $\vec{x}=(4;2;-2)$;<br>5) другой ответ. |
| 9. | Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;-3;1)$ и $\vec{b}(1;2;3)$. | 1) $\sqrt{195}$; 2) $14$;<br>3) $7\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{174}$;<br>5) другой ответ.. |
| 10. | При каком $\lambda$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарны, если $\vec{a}=(\lambda;2;-5)$, $\vec{b}=(3;1;1)$, $\vec{c}=(4;-1;0)$? | 1) $24$; 2) $17$; 3) $-3$;<br>4) $-43$; 5) другой ответ. |

*Тест по практике 2*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Найти матрицу $X$ из уравнения $A+2X=E-B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$;<br>2) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$;<br>3) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$;<br>5) другой ответ. |
| 2. | Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 7\end{pmatrix}$;<br>3) $\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 10 & 15\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix}2 & 17\end{pmatrix}$;<br>5) другой ответ. |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. | 1) $29$; 2) $0$; 3) $-30$; 4) $4$; 5) другой ответ. |
| 4. | Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$; 5) другой ответ. |
| 5. | Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. | 1) $r = 0$; 2) $r = 1$; 3) $r = 2$; 4) $r = 3$; 5) другой ответ. |
| 6. | Найти $\cos\varphi$ угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$. | 1) $\frac{6}{5\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; 3) $-\frac{6}{5\sqrt{2}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{51}}$; 5) другой ответ. |
| 7. | Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$, если $M(2;-2;0)$, $N(3;1;-1)$. | 1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{14}$; 3) 4; 4) $2\sqrt{3}$; 5) другой ответ. |
| 8. | Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(6;-8;-7,5)$ и образующий острый угол с осью $OZ$, если $\lvert\vec{x}\rvert = 50$. | 1) $(-6;8;7,5)$; 2) $(3;-4;-3,75)$; 3) $(-12;16;15)$; 4) $(-24;32;30)$; 5) другой ответ. |
| 9. | Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b} = (-3;1;2)$. | 1) $\sqrt{123}$; 2) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $7\sqrt{3}$; 5) другой ответ. |
| 10. | При каком $\lambda$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компла- | 1) $7$; 2) $-7$; 3) $-43$; |

| | | |
|---|---|---|
| | нарны, если $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(1;-5;2)$, $\vec{c}=(\lambda;4;-1)$? | 4) $12$; 5) другой ответ. |

*Тест по практике 3*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Найти матрицу $X$ из уравнения $X+2A=3E-B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}2 & -7\\ 7 & 5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -7 & 5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 5 & 5\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -5 & -7\end{pmatrix}$; 5) другой ответ. |
| 2. | Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 13 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 17 & -5\\ 2 & -4\end{pmatrix}$; 5) другой ответ. |
| 3. | Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 16\\ 0 & -1 & 10\end{vmatrix}$. | 1) $29$; 2) $0$; 3) $-30$; 4) $4$; 5) другой ответ. |
| 4. | Решить матричное уравнение $X\cdot A=B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$. | 1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | 3) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$;<br>5) другой ответ. |
| 5. | Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. | 1) $r=0$; 2) $r=1$;<br>3) $r=2$; 4) $r=3$;<br>5) другой ответ. |
| 6. | Найти $\cos\varphi$ угла между векторами $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. | 1) $-\frac{2}{\sqrt{102}}$; 2) $-\frac{15}{\sqrt{37}}$<br>3) $\frac{2}{\sqrt{102}}$; 4) $\frac{9}{\sqrt{30}}$;<br>5) другой ответ. |
| 7. | Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$, если $M(-2;2;-3)$ и $N(1;-2;-1)$. | 1) $\sqrt{17}$; 2) $4$; 3) $\sqrt{11}$<br>4) $\sqrt{29}$;<br>5) другой ответ. |
| 8. | Найти вектор $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$, и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=6$. | 1) $(2;3;4)$; 2) $(1;0;2)$<br>3) $(-3;3;3)$;<br>4) $(-3;6;2)$;<br>5) другой ответ. |
| 9. | Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. | 1) $13$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{171}$;<br>3) $\frac{1}{2}\sqrt{219}$; 4) $\sqrt{71}$;<br>5) другой ответ. |
| 10. | При каком $\lambda$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут компланарны, если $\vec{a}(\lambda;3;2), \vec{b}(1;-2;0), \vec{c}(3;-1;3)$. | 1) $0$; 2) $-4$; 3) $\frac{1}{6}$;<br>4) $-\frac{1}{6}$;<br>5) другой ответ. |

Ответы:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тест 1 | 2 | 4 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 |
| Тест 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| Тест 3 | 4 | 1 | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 |

## Рекомендуемая литература

1. Боревич З.И. Определители и матрицы: учебное пособие для вузов / З.И. Боревич. 6-ое изд., стер.– Санкт-Петербург: Лань, 2023.–188 с.

2. Сиротина И.К. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: интерактивный курс: учебное пособие для СПО / И.К. Сиротина. – Санкт-Петербург: Лань, 2022.–180 с.

3. Ивин Е.А., Попеленский Ф.Ю. Сборник задач по линейной алгебре. Первый семестр: учебное пособие для вузов / Е.А. Ивин, Ф.Ю. Попеленский; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Вологда: ВолНЦРАН, 2020.– 90 с.

4. Ерошевская Е.Л. Математика: учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей: в 2-х ч./ Е.Л. Ерошевская – Минск, БНТУ, 2018. – 182 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный, 14 изд.– Москва: Айрис-пресс, 2019. – 603 с.

6. Рябушко А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие. Часть 1./ А.П. Рябушко, Т.А. Жур.– Минск: Вышейшая школа, 2018.– 319 с.

7. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко (и др.) – Москва: Мир и образование, 2017. – 368 с.

8. Математика: программные вопросы, контрольные задания и методические указания для студентов-заочников строительных специальностей экономического профиля / Т.Н. Гурина (и др.) – Минск, БНТУ, 2012. – 108 с.