

$$\begin{aligned}
& du + \left(\frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma} dw + f_{\alpha,\beta,\gamma} dv + \frac{1}{1-n_2^2} \left[n_3^2 (S_1 + S_2) + (n_3^2 - n_1^2) S_3 - \right. \\
& \left. - 2\tau_1\tau_3 (S_1 + S_2 + 2S_3) \left(\frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma} + (n_1^2 S_1 - n_3^2 S_2 - (n_3^2 - n_1^2) S_3) \left(\frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma}^2 \right] d\rho, \\
& f_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n_2(1-2n_2^2)}{n_1(1-2n_1^2) + n_3(1-2n_3^2) \left(\frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma}}, \\
& S_1 = \frac{u}{\rho}, \quad S_2 = -\frac{n_2}{2\rho n_1} v, \quad S_3 = \frac{u}{\rho} + \frac{n_2^2 - n_1^2}{2\rho n_1 n_2} v,
\end{aligned} \tag{15}$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы главного напряжения $\sigma_{3,1}$ при условиях ползучей пластичности (1):

$$n_1 = \cos \frac{\Psi}{2} \cos \xi, \quad n_2 = \sin \frac{\Psi}{2}, \quad n_3 = \cos \frac{\Psi}{2} \sin \xi. \tag{16}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А.В., Чигарев, Ю.В., Беляцкая, Л.Н., Миклашевич, И.А. Классический хаос и самоорганизация в волновых и деформационных полях // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Мн., 2001. – С. 458-462.
2. Кузнецов, И.И. Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестник Ленинградского университета, 1958, № 13. – Вып.3. – С.112-131.

ДК 621.7

Шелег В.К., Александров В.М., Сягло И.С.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРОНИЦАЕМЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Научно-исследовательский институт импульсных процессов с опытным производством
Минск, Беларусь*

Моделирование структуры пористого композиционного материала (ПКМ) своей конечной целью ставит определение зависимости свойств ПКМ от каркасных и структурных факторов и, в большинстве случаев, рассматривается как единственно возможный способ описания реального пористого материала на базе некоторых гипотетических представлений о нем.

Применение моделей для исследования свойств пористых материалов предполагает обоснование и использование численных параметров, характеризующих строение их порового пространства. В результате исследований определяется взаимосвязь этих параметров, а также их влияние на гидравлические, физико-механические, фильтровальные, акустические и ряд других свойств. Модели, применяемые для исследования свойств пористых материалов, весьма многочисленны и разнообразны. Они строятся в виде совокупности частиц одинаковой геометрической формы и размера, расположенных в пространстве по определенным

схемам [1 - 6], либо в виде системы капиллярных каналов (пор), соответствующим образом ориентированных в пространстве и имеющих заданную форму поперечного сечения [5- 10].

Известны модели проницаемых материалов из частиц в форме шара [4, 11], куба [12], пластины [1], параллелепипеда [1, 12], цилиндра [2, 3, 6, 12], а также правильных многогранников [12].

Выбор той или иной модели или точки отсчета определяется конкретными условиями решаемой проблемы. Так, для процессов, определяемых поровым пространством, размером пор и их распределением по размеру, наиболее целесообразно моделировать пористое тело системой пор, а для моделирования процессов, связанных со строением каркаса пористого тела, рациональнее использовать модели в виде систем связанных дискретных частиц.

ПКМ из непрерывных и дискретных волокон представляют новый вид проницаемых материалов, отличающихся от известных повышенным уровнем механических свойств за счет непрерывных волокон и тонкостью фильтрации на уровне нескольких микрометров за счет дискретных волокон.

Цель работы - модельно-аналитическое описание физических свойств пористых тел и расчет их структурных характеристик, представленных проницаемыми композиционными материалами из металлических непрерывных и дискретных волокон.

Рассмотрим пористое тело из слоя дискретных волокон, расположенных на непрерывных волокнах в виде металлической сетки. Если волоконный слой достаточно тонкий, то волокна слоя будут в основном располагаться в плоскостях, параллельных плоскости сетки.

В качестве модели рассмотрим пористое тело, состоящее из элементарных составляющих: слоя непрерывных волокон в виде единичной сетки и слоя дискретных волокон, высотой не менее двух диаметров d_0 волокна (рисунок 1).

Примем длину волокна l_0 больше его диаметра d_0 ($l_0 > d_0$) и больше шага ячейки сетки, а упаковку волокон - не плотной. Критерием неплотности упаковки возьмем число n_0 пересечений отдельного волокна другими волокнами. Для неплотной упаковки число пересечений удовлетворяет условию $n_0 < l_0/d_0$. При выполнении этого условия расстояние между отдельными контактами вдоль волокна превышает d_0 , оставаясь намного меньше l_0 . Пример возможных пересечений отдельного волокна отрезками других волокон, удовлетворяющих принятым предположениям, приведен на рисунке 2.

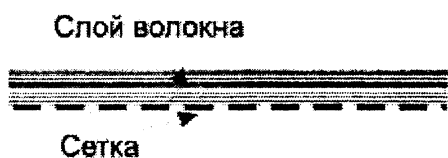


Рисунок 1 – Схематическое изображение ПКМ

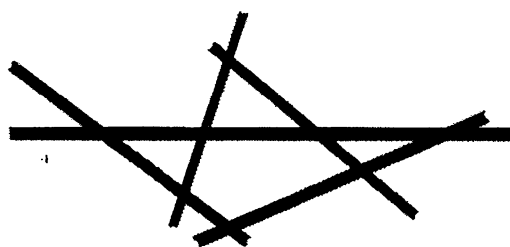


Рисунок 2 – Схематическое изображение пересечений отдельного волокна отрезками других волокон

Так как при изготовлении такого рода ПКМ с помощью виброформования или другими технологическими приемами стремятся равномерно распределить волокна вдоль поверхности сетки, то внутри слоя волокна будут располагаться произвольно, сохраняя приближенную параллельность плоскости сетки. Поэтому углы, под которыми пересекаются волокна, с одинаковой вероятностью могут принимать значения из интервала ($0^\circ, 90^\circ$). Расстояния между узлами пересечения волокон друг с другом не должны существенно отличаться от их среднего значения для всего набора волокон. Пересекающие выделенное волокно другие волокна образуют вблизи него выпуклые многоугольники (рисунок 2). Вследствие равномерного распределения волокон по всей площади образца преобладающая часть многоугольников будет иметь площадь, незначительно отличающуюся от средней площади таких многоугольников. Именно эти приблизительно равновеликие многоугольники создают преобладающую поре:

тую структуру и определяют ее свойства. Подобные структуры возникают в окрестности каждого волокна ПКМ. Эти структуры наслаиваются друг на друга, создавая сложную систему порового пространства.

При моделировании свойств проницаемых порошковых материалов используются результаты по различным упаковкам сфер, когда реальные частицы порошка заменяются идеальными сферами. Элементарной ячейкой в такой глобулярной модели является простейшая ячейка из определенным образом размещенных сфер. При моделировании волоконных материалов применяются модели, основанные на расчетах по упаковке параллельных цилиндров. Несмотря на явную несхожесть структуры реального волоконного материала и структуры идеально уложенных цилиндров, такие модели позволяют получить не только качественные, но и количественные результаты, согласующиеся с опытными данными. При случайных пересечениях волокон преобладающими фигурами будут треугольники. Наличие многоугольников, если их площадь незначительно отличается от площади треугольников, не должно сильно влиять на результаты аналитических расчетов. Поэтому для моделирования ПКМ из непрерывных и дискретных волокон в качестве элементарной ячейки модели возьмем треугольник с произвольными углами. В этом случае элементарная ячейка модели образована пересечением трех волокон (рисунок 3). Она представляет собой треугольную призму высотой $2d_0$, в основании которой лежит треугольник. Плоскости, ограничивающие ячейку, показаны сплошными линиями. Основание ячейки вынесено на отдельную плоскость. Проекция половинок волокна, входящих в ячейку, показаны темным цветом. Стороны треугольника обозначены как L, L_2, L_3 . Внутренние углы треугольника – α, β, γ . Внутреннее поровое пространство ячейки ограничено треугольником со сторонами l, l_2, l_3 , диаметр волокна обозначен d_0 . Для проведения численных расчетов для любого диаметра волокна линейные величины сделаем безразмерными, разделив их на d_0 . Соответственно безразмерный объем получится делением объема на d_0^3 . Все геометрические параметры ячейки выразим через безразмерную величину $x = l/d_0$ и два угла α и β .

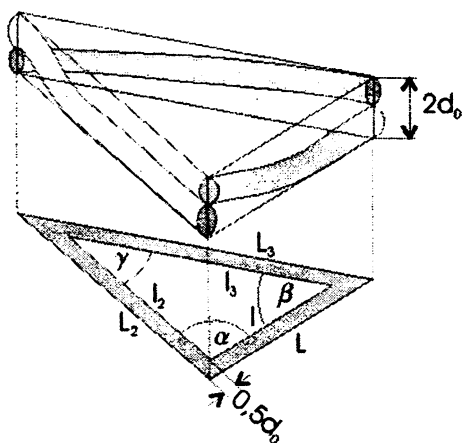


Рисунок 3 - Элементарная ячейка модели

Тогда длину сторон треугольника определяем в виде:

$$L = x + \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} \right), \quad (1)$$

$$L_2 = x \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \quad (2)$$

$$L_3 = x \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \right). \quad (3)$$

Объем ячейки считаем как площадь основания, умноженную на высоту $2d_0$ призмы, то есть

$$V = L \times L_2 \sin \alpha. \quad (4)$$

Выражая объем ячейки через параметры x , α и β , после упрощений получим:

$$V = 2x \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} + x^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (5)$$

Следует отметить, что в ячейку модели входит только половина волокна, а другая половина входит в смежную ячейку. Считая волокна цилиндрами, найдем объем материала, содержащегося в ячейке, как сумму половин цилиндров. Увеличение длины частей волокон, входящих в ячейку, за счет их наклона по отношению к основанию ячейки или за счет изгиба волокон учтем дополнительным параметром λ . Объем ячейки модели определим по формуле:

$$V_m = \frac{\pi \lambda}{8} (L + L_2 + L_3), \quad (6)$$

а после упрощений:

$$V_m = \frac{\pi \lambda}{8} \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) (1 + x \sin \beta). \quad (7)$$

Средний диаметр поры определим как квадратный корень площади внутреннего, не занятого материалом, треугольника модели. В безразмерных величинах средний диаметр поры равен:

$$D_p = \sqrt{\frac{\sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}} x. \quad (8)$$

В волоконном материале находится большое количество ячеек с различными параметрами x , α и β , значения которых распределены случайным образом. Измерение этих параметров для всех ячеек невозможно. Поэтому для получения результатов, которые можно сравнить с экспериментальными результатами, необходимо произвести усреднение ячеек по всему объему волоконного материала. Примем, что распределения ячеек по углам α , β и линейным размерам, параметру x - независимы. Поэтому вначале проведем их усреднение по углам, а затем по линейным размерам. Вследствие независимости ориентации волокон друг от друга, углы между различными волокнами в местах их пересечений с равной вероятностью будут принимать все возможные значения из интервала $(0^\circ, 180^\circ)$. В треугольной ячейке модели сторону треугольника, длина которой входит в параметры модели, всегда можно выбрать прилежащей к острым углам. Поэтому при усреднении по углам функцию распределения следует выбрать постоянной для α и β , лежащих в интервале $(0^\circ, 90^\circ)$ и удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < 180^\circ$. Однако, вследствие расходимости интегралов для V_m , V , D_p , если α и β одновременно равны 0° или 90° , сузим интервал до $(1^\circ, 89^\circ)$, тогда функция распределения по углам примет вид:

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{cases} c, & \text{если } 1^\circ \leq \alpha, \beta \leq 89^\circ, \\ 0, & \text{если } \alpha, \beta < 1^\circ \text{ или } \alpha, \beta > 89^\circ, \end{cases} \quad (9)$$

а условие нормировки

$$c \int_1^{89\beta} \int_1 d\beta d\alpha = 1, \quad (10)$$

дает значение $c = 0,848$. Усредняя по углам объем ячейки, объем материала в ячейке и диаметр поры с помощью постулированной таким образом функции распределения получим следующие уравнения для определения объема ячейки модели и среднего диаметра пор:

$$V(x) = c \int_1^{89\alpha} \int_1 V(x, \alpha, \beta) d\beta d\alpha = 6,413 + 2,757x + 0,601x^2, \quad (11)$$

$$V_m(x) = c \int_1^{89\alpha} \int_1 V_m(x, \alpha, \beta) d\beta d\alpha = (5,037 + 1,083x)\lambda, \quad (12)$$

$$D_p(x) = c \int_1^{89\alpha} \int_1 D_p(x, \alpha, \beta) d\beta d\alpha = 0,48x. \quad (13)$$

Ввиду равномерного распределения волокон по всему объему волоконного материала примем гипотезу, что линейные размеры ячеек распределены по нормальному закону вблизи средней длины x_0 с дисперсией σ . Тогда функция распределения имеет вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14)$$

Усреднение x приводит к замене $x \Rightarrow x_0$, а усреднение x^2 к замене $x^2 \Rightarrow x_0^2 + \sigma^2$. В результате усредненных по всем случайным параметрам x , α и β объем ячейки, объем материала в ячейке и пористость принимают вид:

$$\langle V \rangle = 6,413 + 2,757x_0 + 0,601(x_0^2 + \sigma^2), \quad (15)$$

$$\langle V_m \rangle = (5,037 + 1,083x_0)\lambda, \quad (16)$$

$$\langle D_p \rangle = 0,48x_0. \quad (17)$$

Формулы (15) - (17) дают зависимость величин, измеряемых макроскопически от микроскопических параметров x_0 и σ , которые могут быть получены исследованием образца под микроскопом. Дополнительный параметр λ не измеряется и не может быть рассчитан теоретически. Неопределенность λ можно использовать для лучшего согласования теоретических результатов с опытными данными.

Таким образом, в результате проведенных исследований разработана теоретическая модель пористого композиционного материала из непрерывных и дискретных волокон, позволяющая производить аналитический расчет размера пор материала и прогнозировать свойства фильтров различного назначения. На основании разработанной модели в дальнейшем будут рассчитаны структурные характеристики ПКМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грег, С., Синг, К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость. – М.: Мир, 1970– 407 с.
2. Гребенников, С.Ф., Коновалов, В.И. Моделирование пористых структур системой параллельных цилиндров. – В кн.: Адсорбция и пористость, М.: Наука, 1976, с. 63 – 64.
3. Радушневич, Л.В. Статистическое описание структуры волокнистых фильтров. – Журнал физиче-

ской химии, т. 40, 1966, № 4, с. 965 – 966. 4. Карнаухова, А.П. Глобулярная модель пористых тел корпускулярного строения. – Кинетика и катализ, т. 12, 1971, Вып. 4, с. 1025 – 1033. 5. Карнаухова, А.П. Модели пористых систем. – В кн.: Моделирование пористых материалов. Новосибирск, 1976, с. 42 – 59. 6. Фукс, Н.А., Кирш, А.А., Стечкина, И.Б. Динамические методы исследования структуры волокнистых фильтров. – В кн.: Адсорбция и пористость, М.: Наука, 1976, с. 313 – 317. 7. Шейдеггер, А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостехиздат, 1960. 249 с. 8. Коллинз, Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964, 350 с. 9. Косторнов, А.Г. Параметры пористой структуры проницаемых материалов. Сообщение 1. Теоретические предпосылки и модельные исследования. – Порошковая металлургия, 1978, № 4, с. 34 – 40. 10. Кудряшов, А.Ф., Волгин, В.Д., Планоцкий А.Н. Определение экспериментального ряда распределения пор по размерам в пористых телах применительно к процессам фильтрации и ультрафильтрации. – В кн.: Химическое машиностроение. М., 1974, Вып. 1, с. 108 – 114. 11. Фенелонов, В.Б., Загорская, Р.В. Некоторые вопросы моделирования структуры катализаторов, носителей и адсорбентов. – В кн.: Моделирование пористых материалов. Новосибирск, 1976, с. 60 – 77. 12. Лейбензон, Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.

УДК 531.8

Ширко А.В., Камлюк А.Н., Немцов В.Б.

МЕХАНИКА СВЕРХСКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ВИНТОВОЙ СТРУКТУРОЙ

*Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь*

Введение. Для описания поведения сложных систем и явлений часто используются упрощенные модели. Одной из широко используемых моделей является модель упругого стержня с круговым поперечным сечением.

Данная модель получила применение для исследования упругих свойств не только механических объектов. Как оказалось модель в виде стержня позволяет успешно изучать также классы веществ и материалов как эластомеры, ЖК-полимеры и биомолекулы [1, 2].

В данной работе исследуются равновесные формы сверхскрученных стержней. Для анализа используется модель упругого изотропного гомогенного стержня единичной длины с круглым поперечным сечением при больших нелинейных деформациях кручения и изгиба.

Постановка задачи. Каждому значению естественной координаты s ($0 \leq s \leq 1$), отсчитываемой вдоль оси стержня, соответствует определенное значение радиус-вектора $\mathbf{r}^{(s)}$. Ориентация поперечного сечения стержня задается ортогональной системой единичных векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. Вектор \mathbf{d}_3 , нормальный к плоскости сечения, является первой производной от радиус-вектора $\mathbf{d}_3 = \mathbf{r}'$. Штрих означает дифференцирование по s . Векторы \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 лежат в плоскости сечения и совпадают с его главными осями.

Разложение вектора полной деформации \mathbf{u} по ортогональному базису $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ имеет вид

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{d}_1 + u_2 \mathbf{d}_2 + u_3 \mathbf{d}_3.$$

Составляющие u_1 и u_2 описывают изгиб стержня, а составляющая u_3 – его кручение. Используя кинематику ориентационной деформации [3] вектор \mathbf{u} можно записать в форме

$$\mathbf{u}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}_1 \times \frac{d\mathbf{d}_1}{ds} + \mathbf{d}_2 \times \frac{d\mathbf{d}_2}{ds} + \mathbf{d}_3 \times \frac{d\mathbf{d}_3}{ds} \right). \quad (1)$$

Равновесие стержня соответствует минимуму энергии деформации при определенных