нии аппроксимации начальной части опорной поверхности степенной функцией. Получено аналитическое уравнение для определения необходимого давления по относительному сближению. Выполненные вычисления свидетельствуют, что если высота субшероховатости существенно меньше высоты выступов первого уровня, то ее влияние на относительное сближение является минимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демкин,Н.В. Контактирование шероховатых поверхностей. Москва: Наука, 1970, 227 с. 2. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989, 510 с. 3. Greenwood,J.A., Wu,J.J. Surface Roughness and Contact: An Apology// Meccanica, N 36, 2001, 617–630 p. 4. Persson,B.N.J.: Elastoplastic Contact between Randomly Rough Surfaces// Physical Review Letters, Vol. 87, N 11, 2001, 116101.

УДК 539.3

Босяков С.М., Журавков М.А.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТЫХ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Волновые задачи теории пластичности связаны с изучением процессов, возникающих в сплошных средах и элементах конструкций, под действием динамических нагрузок, интенсивность которых настолько велика, что могут возникнуть пластические деформации. К настоящему времени выполнено достаточно большое количество исследований закономерностей распространения одномерных, двумерных и пространственных волн напряжений для различных вариантов сложного напряженного состояния, волн, вызванных многопараметрическими нагрузками, а также волн температурных напряжений [1]. Настоящая работа посвящена анализу процессов распространения двумерных продольно-пластических волн в однородном упругопластическом полупространстве $x_1 > 0$, к поверхности которого приложены постоянные во времени нормальные и касательные напряжения. В рассматриваемой плоской задаче отсутствуют составляющие вектора перемещения в направлении оси x_3 и касательные напряжения σ_{13} и σ_{23}. С учетом этого соответствующую систему разрешающих уравнений движения представим в следующем виде [1]:

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau}{\partial x_2},\ \rho\frac{\partial v_2}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}-\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}+\frac{\upsilon}{E}\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}=\frac{s\partial\Lambda}{\partial t},\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\upsilon}{E}\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}-\frac{1}{E}\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}=-\frac{s\partial\Lambda}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{2}{\mu}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{4\tau\partial\Lambda}{\partial t},\ \frac{4k^2E}{3\alpha(k)}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-s\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right)=\frac{2\tau\partial\tau}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь v_i - скорости перемещений, σ_i - нормальные напряжения, $\tau=\sigma_{12}$ - касательное напряжение, $s=2(\sigma_1-\sigma_2)/3$, ρ - плотность среды, E - модуль упругости, υ - коэффициент

Пуассона, $\mu = E/(2+2\upsilon)$ - константа Ламе, k - предел текучести. Величина $\partial\Lambda/\partial t$ выражена через функцию Губера - Мизеса $F = (\sigma_1 - \sigma_2)^2/3 + \tau^2 = k^2$ следующим образом [1]:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{3\alpha(k)}{4k^2 E}\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \frac{2\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial\sigma_2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\right),$$

где $\alpha(k)$ - функция, характеризующая упрочнение материала.

Начальные данные к системе уравнений (1) зададим на поверхности $z(t, x_1, x_2)$ и выполним замену переменных $g_i = z_i(t, x_1, x_2)$ и $g = z(t, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$ [2]. Подставляя переменные по переменным g_i и g, выраженные через переменные по переменным x_i и t в уравнения (1), получим систему неоднородных алгебраических уравнений относительно частных производных первого порядка по g. Из коэффициентов при этих производных составим определитель и приравняем его нулю. В результате будем иметь уравнение характеристик системы (1):

$$\det\left\|w_{ij}\right\| = 0, \qquad (2$$

где $w_{11} = w_{22} = \rho p_0$, $w_{13} = w_{31} = w_{25} = w_{52} = -p_1$, $w_{15} = w_{51} = w_{24} = w_{42} = -p_2$, $w_{33} = w_{44} = \dfrac{p_0}{E}$, $w_{34} = w_{43} = \dfrac{-\upsilon p_0}{E}$, $w_{36} = -w_{46} = s p_0$, $w_{55} = \dfrac{p_0}{\mu}$, $w_{56} = 2\tau p_0$, $w_{66} = -\dfrac{4k^2 E}{3\alpha(k)}$, $p_0 = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, $p_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}$, $p_2 = \dfrac{\partial z}{\partial x_2}$, остальные компоненты определителя равны нулю. Раскрывая определитель (2), после несложных преобразований получим:

$$\frac{p_0^4}{c_2^4} - \frac{2ap_0^2}{c_2^2} + b = 0. \qquad (3$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = \frac{\left(k^2\left(16 - 32p^2 + 15p^4\right) + 12\left(p^2 - 1\right)\alpha(k)\left(s^2 + \tau^2\right)\right)\left(p_1^2 + p_2^2\right)}{2p^2\left(k^2\left(3p^2 - 4\right) + 3\left(p^2 - 1\right)\alpha(k)\left(s^2 + \tau^2\right)\right)},$$

$$b = \frac{\left(3p^2 - 4\right)\left(4k^2\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 + 3\alpha(k)\left(2\tau p_1 p_2 + s\left(p_1^2 - p_2^2\right)\right)^2\right)}{p^2\left(p^2 - 1\right)\left(k^2\left(3p^2 - 4\right) + 3\left(p^2 - 1\right)\alpha(k)\left(s^2 + \tau^2\right)\right)},$$

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad p = c_1/c_2, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad \lambda = \frac{E\upsilon}{(1 - 2\upsilon)(1 + \upsilon)}.$$

Разделим обе части уравнения на d^4 ($d = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$). В результате получим уравнение относительно безразмерной скорости распространения пластических волн $v = V/c_2$ ($V = -p_0/d$ - скорость распространения поверхности характеристик [2]):

$$v^4 \hat{a} v^2 + \hat{b} = 0, \qquad (4$$

где коэффициенты $\hat{a}$ и $\hat{b}$ получаются из коэффициентов a и b заменой параметров p_1 и p_2 на направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности $n_1 = p_1/d$ и

$n_2 = p_2/d$. Отсюда будем иметь выражения для скоростей распространения медленных и быстрых пластических волн:

$$v = a - (-1)^i \sqrt{a^2 - b}. \tag{5}$$

Здесь индекс $i = 1$ соответствует скорости распространения быстрой пластической волны, $i = 2$ - скорости распространения медленной пластической волны.

Из формул (5) следует, что скорости распространения пластических волн зависят от угла наклона нормали к характеристической поверхности. Так, на рис. 1 представлены кривые скоростей пластических волн в полуплоскости $x_1 0 x_2$. При построении принимаем функцию $\alpha(k) = 3(k/k_0 - 1)^4$ [1], $k/k_0 = 0{,}97$, $s/k_0 = 1$, $\tau/k_0 = 0{,}7$.

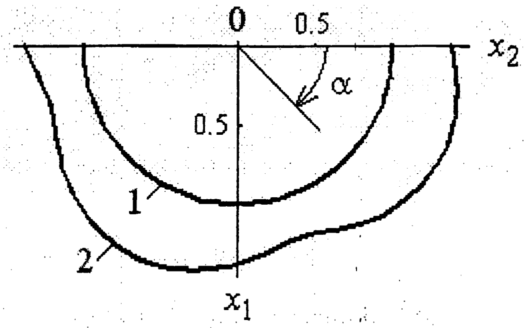

Рисунок 1 - Кривые скоростей пластических волн:
1 – быстрая пластическая волна, 2 – медленная пластическая волна

Найдем составляющие y_i шестикомпонентного левого собственного вектора уравнения $\sum_{i=1}^{6} w_{ij} = 0$, $i = \overline{1,6}$. После несложных преобразований будем иметь:

$$y_1 = \frac{p^2\left(sn_1\left(v^2 - n_1^2 - 7n_2^2\right) + \tau n_2\left(v^2 + 2n_1^2 - 4n_2^2\right)\right) + 4n_2\left(2sn_1n_2 + \tau\left(n_2^2 - n_1^2\right)\right)}{p^2v^2\tau n_1 + 4\left(1 - p^2\right)\tau n_1^3 - sn_2\left(8n_1^2 + p^2\left(v^2 - 7n_1^2\right)\right) + 2\tau\left(p^2 - 2\right)n_1n_2^2 + p^2sn_2^3},$$

$$\begin{aligned}
y_3 = \frac{\mu}{c_2q}\Big(& p^2sv^2\left(v^2 - n_1^2\right) + 2\left(3p^2 - 4\right)v^2\tau n_1n_2 - s\Big(\left(7p^2 - 8\right)v^2 + \\
& + 2\left(3p^2 - 4\right)n_1^2\Big)n_2^2 + 2\left(3p^2 - 4\right)\left(1 - 2\tau n_1n_2^3\right)\Big), \\
y_4 = -\frac{\mu}{c_2q}\Big(& s\left(v^2 - n_1^2\right)\left(8n_1^2 + p^2\left(v^2 - 6n_1^2\right)\right) - \\
& - 2\left(3p^2 - 4\right)\tau n_1n_2\left(v^2 - 6n_1^2\right) - sn_2^2\left(p^2\left(v^2 + 6n_1^2\right) - 8n_1^2\right)\Big),
\end{aligned} \tag{6}$$

$$y_5 = \frac{\mu}{c_2q}\Big(p^2v^4\tau - 4\left(p^2 - 1\right)\tau v^2n_1^2 + 2\left(3p^2 - 4\right)sn_1n_2\left(n_1^2 - n_2^2\right) -$$
$$-4\tau n_2^2\left(\left(p^2 - 1\right)v^2 - \left(3p^2 - 4\right)n_1^2\right),$$

$$y_2 = 1,\ y_6 = \frac{1}{2qc_2}\left(v^2 - n_1^2 - n_2^2\right)\left(4 + p^2\left(v^2 - 4\right)\right),$$

$$q = v\left(p^2\left(v^2\tau n_1 + sn_2^3\right) + 2\tau n_1\left(\left(p^2 - 2\right)n_2^2 - 2n_1^2\left(p^2 - 1\right)\right) - sn_2\left(8n_1^2 + p^2\left(v^2 - 7n_1^2\right)\right)\right).$$

Поскольку дифференциал от вектора-столбца $(v_1, v_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau, \Lambda)$ пропорционален левому собственному вектору $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ [1], можно записать следующие равенства:

$$\frac{dv_1}{y_1} = \frac{dv_2}{y_2} = \frac{d\sigma_1}{y_3} = \frac{d\sigma_2}{y_4} = \frac{d\tau}{y_5} = \frac{d\Lambda}{y_6}.$$

Отсюда в частном случае получим:

$$\frac{d\sigma_1 - d\sigma_2}{y_3 - y_4} = \frac{d\tau}{y_5}, \frac{d\sigma_1}{d\tau} = \frac{y_3}{y_5}. \quad (7)$$

Интегрируя уравнения (7) для каждого из выражений (5) скоростей распространения пластических волн v_i, будем иметь выражения, позволяющие выполнить построение двухпараметрического семейства пространственных кривых в трехмерном пространстве напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий,В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 308 с. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 806 с.

УДК 621.923.7

Мрочек Ж.А., Кожуро Л.М., Миранович А.В., Немизанский Ю.В.

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ ПОКРЫТИЕ – ОСНОВА

УО "Белорусский национальный технический университет"
УО "Белорусский государственный аграрный технический университет"
Минск, Беларусь

При восстановлении изношенных поверхностей деталей наплавкой в системе покрытие-основа возникают остаточные напряжения. Это происходит из-за протекания металлургических процессов образования покрытий, использования легирующих элементов, значительного теплового воздействия на основу, быстрого и неравномерного охлаждения наплавленной поверхности детали, а также последующей механической обработки [1].

Остаточные напряжения в системе покрытие-основа существенно влияют на усталостную прочность деталей при циклических нагрузках последних, оказывают определённое влияние на износостойкость рабочих поверхностей и их коррозионную активность.

Установлено [2 … 4], что остаточные напряжения сжатия могут быть полезны, и их обоснованно считают резервом повышения прочности деталей, а напряжения растяжения ослабляют и вызывают возникновение трещин, приводят к разрушениям.

Остаточные напряжения при формировании покрытий – это один из основных факторов, определяющих адгезию покрытия с основой. Однако измеряемая величина адгезии включает в себя величину остаточных напряжений, что не позволяет произвести их точную оценку, если это необходимо.

В свою очередь, следует отметить сложность задачи математического описания процесса формирования остаточных напряжений из-за его дискретного характера, наличия пор, различия физико-механических свойств материалов покрытия и основы, наличия переходной зоны покрытие-основа и т.д. Решение этой задачи вряд ли возможно в ближайшем будущем [5]. Именно это обстоятельство и определяет актуальность разработки инженерных методов