

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБАЮЩИХ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ЭЛЕМЕНТА КРУГОВОГО КОЛЬЦА

¹Докукова Н. А., ²Кафтайкина Е. Н.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Иностранное общество с ограниченной ответственностью "Плэйтिका Бел", Минск

Введение. В авиастроении упругое круговое кольцо имеет большое практическое значение, поскольку оно является частью силовой конструкции оболочек – шпангоутом [1, 2]. Постановка задачи о его изгибе и кручении связана с выводом уравнений равновесия бесконечно малого элемента и зависимостей, объединяющих перемещения и деформации. Полученные расчетные законы смещений и углов закручиваний на основании используемых общих уравнений могут найти применение в проектировании как изолированных шпангоутов, так и шпангоутов, подкрепляющих тонкую обшивку.

Основная часть. Рассматривается кольцо радиуса R , находящееся в сложном нагруженном режиме. При его достаточно больших величинах круговая форма кольца может стать неустойчивой, тогда кольцо изогнется и примет новую некруговую форму. В общем случае исследуемого нагружения кольцо испытывает изгиб в своей плоскости, кручение в поперечных сечениях проволоочно-цилиндрического бесконечно малого элемента, продольное и радиальное растяжение – сжатие, рисунок 1.

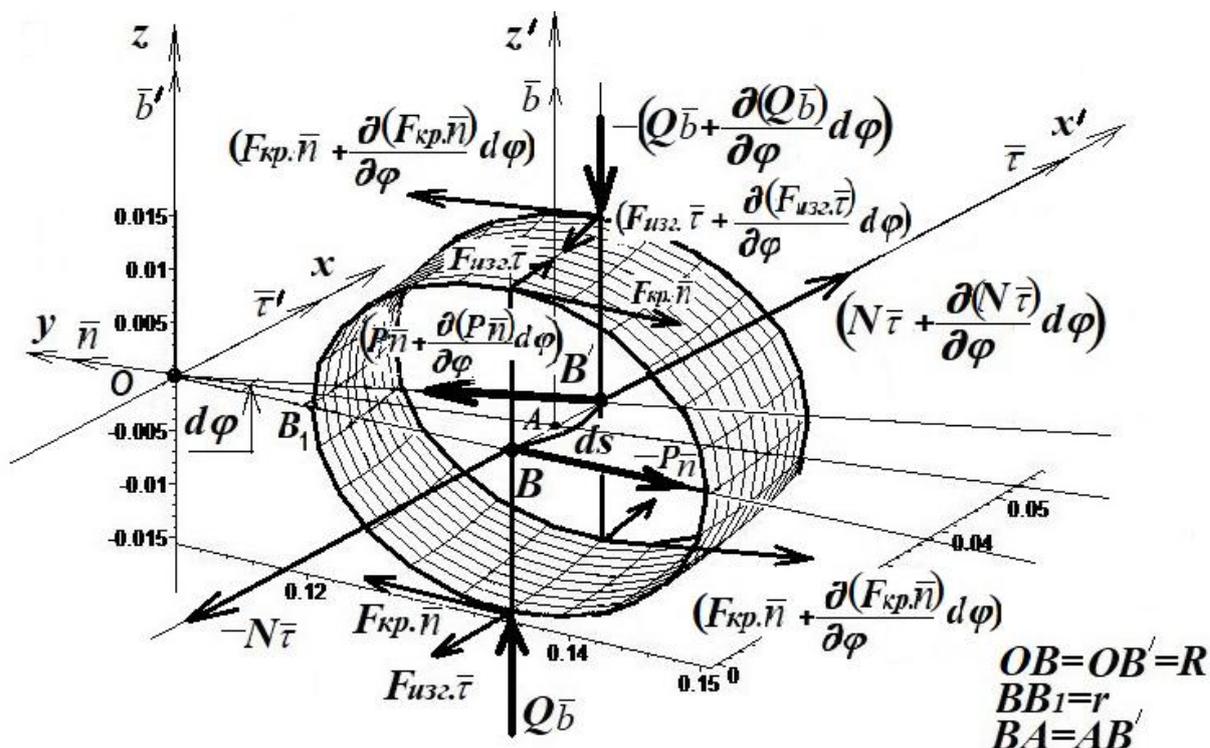


Рис. 1. Элемент кругового кольца ds в сложном нагруженном режиме

Вследствие специфического нагруженного состояния кольца в структуре его однородного упругого материала возникают продольная сила \bar{N} , перерезывающая \bar{Q} , радиальная растягивающая сила \bar{P} . Направления которых не будут изменяться во все

время наблюдения за кольцом. В поперечных сечениях кольца появляются изгибающие и крутящие моменты, изображенные на рисунке 1, в виде изменчивых взаимно противоположных пар сил. Для описания динамического напряженно-деформируемого состояния кольцевого элемента используется гипотеза плоских сечений при кручении и изгибе Бернулли – Эйлера и принцип Сен-Венана: поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси после ее деформации. Помимо гипотезы плоских сечений принимается допущение: продольные волокна балки при ее изгибе не надавливают друг на друга. Вследствие этого, единичные орты, вдоль которых направлены основные силы, не будут изменять своего направления и величины.

Положение поперечного сечения S кольца в процессе движения характеризуется смещением $x_3(\varphi, t)$ его центра тяжести из плоскости кольца и углом поворота сечения $x_4(\varphi, t)$, рисунок 2, а. В направлении силы \bar{P} возникает перемещение $v(\varphi, t)$, в направлении \bar{N} – $u(\varphi, t)$, рисунок 2, б.

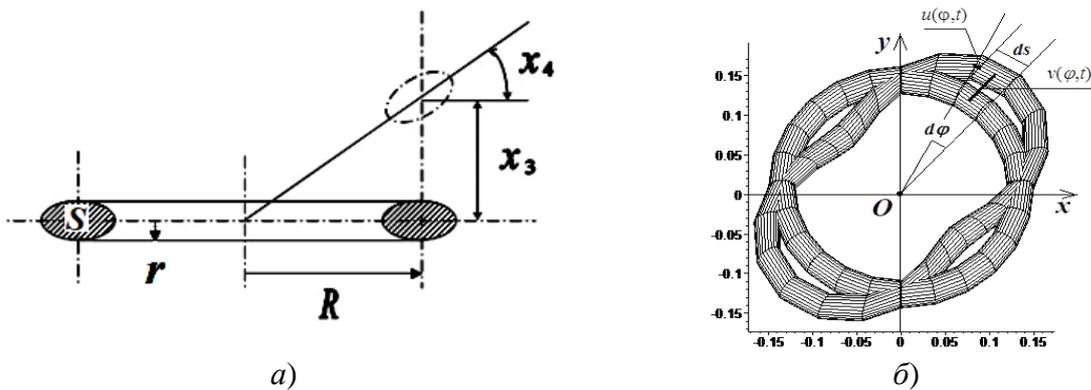


Рис. 2. Смещение $x_3(\varphi, t)$ центра тяжести сечения кольца из срединной плоскости кольца и угол поворота сечения $x_4(\varphi, t)$ на а, радиальное смещение элемента ds кольца $v(\varphi, t)$ и продольное $u(\varphi, t)$ на б

Для установления общих закономерностей моментов от перемещений и углов поворота рассматриваются пространственные формы равновесия кольца с линейными зависимостями относительно деформаций и смещений. Если $x_3(\varphi, t)$ постоянно по длине окружности, то кольцо смещается как жесткое и внутренние силы не возникают. Известно, что в этом случае в поперечных сечениях возникает крутящий момент [1, 2]

$$M_{кр1} = -\frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига, E – модуль Юнга, ν – значение коэффициента Пуассона для выбранного материала, GJ_k – крутильная жесткость сечения бруса, J_k – полярный момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести, $J_k = \frac{\pi D^4}{64}$, D – диаметр поперечного сечения кольца.

При переменном по длине кольца повороте на угол $x_4(\varphi, t)$ соседние сечения поворачиваются друг относительно друга, и возникает другой крутящий момент

$$M_{кр_2} = \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial x_4}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Если вторая производная $d^2 x_3/d\varphi^2$ отлична от нуля, то изменяется кривизна бруса и возникает изгибающий момент

$$M_{изг_1} = \frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2}, \quad (3)$$

где J_1 – момент инерции сечения относительно центральной оси, лежащей в плоскости кривизны, R – расстояние от начала координат $Oxuz$ до срединной линии кольца, r – радиус поперечного сечения.

Силовые факторы, обусловленные поворотом на $x_4(\varphi, t)$, приводят к осесимметричному изгибу кольца, причем в его сечениях возникает второй изгибающий момент

$$M_{изг_2} = \frac{EJ_1}{R^2} x_4. \quad (4)$$

Суммируя все перечисленные силовые зависимости (1–2) и (3–4), связанные с перемещением $x_3(\varphi, t)$ и поворотом $x_4(\varphi, t)$, получаются общие изгибающий и крутящий моменты:

$$M_{изг} = \frac{EJ_1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + x_4 \right), \quad (5)$$

$$M_{кр} = \frac{GJ_k}{R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} \right). \quad (6)$$

Для конкретизации поставленной задачи, вызванной специфическим нагрузочным режимом, рисунки 1–2. Следует составить уравнения равновесия бесконечно малого элемента ds бруса [3–10]. Для этих целей необходимо определить выражения моментов

для пар сил $(F_{изг.} \bar{\tau}, -F_{изг.} \bar{\tau})$, $(F_{кр.} \bar{n}, -F_{кр.} \bar{n})$, $\left(\left(F_{изг.} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{изг.} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{изг.} \bar{\tau} - \frac{\partial(F_{изг.} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$,

$\left(\left(F_{кр.} \bar{n} + \frac{\partial(F_{кр.} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{кр.} \bar{n} - \frac{\partial(F_{кр.} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$. Моменты рассматриваются относительно одной

точки, центра масс элемента ds кольца, точки A – начала координат естественного трехгранника $A\tau b$. Все моменты вычисляются по формуле $\bar{M}_A = [\bar{r}_A \times \bar{F}]$, где \bar{M}_A – момент силы \bar{F} относительно точки A ; \bar{r}_A – радиус-вектор из начала координат A до точки приложения силы; $M_{A\tau}, M_{An}, M_{Ab}$ – осевые моменты относительно соответствующих осей $A\tau, An, Ab$.

Рассмотрим момент изгибающий плоскость кольца от пары сил $(F_{u3z} \bar{\tau}, -F_{u3z} \bar{\tau})$, радиусы-векторы до каждой из которых $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$, рисунок 3, а,

$$\bar{M}_{u3z} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & r \\ F_{u3z} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & -r \\ -F_{u3z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{u3z} \bar{n} \quad (7)$$

Модуль изгибающего момента равен $|\bar{M}_{u3z}| = 2r F_{u3z}$, его векторная величина от первой пары сил $(\bar{F}_{u3z}, -\bar{F}_{u3z})$ сонаправлена вектору нормали $\bar{M}_{u3z} = M_{u3z} \bar{n}$

$$\bar{M}_{u3z} = (0; M_{u3z}; 0). \quad (8)$$

Противоположный ему момент от второй пары сил $\left(\left(F_{u3z} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{u3z} \bar{\tau} - \frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$ на рисунке 3, б. Для его вычисления необходимо

продифференцировать выражение $\frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi}$, используя известные свойства естественной

системы координат – репера Френе, смещающегося вслед за каждой рассматриваемой точкой кривой. Во всех точках регулярно параметризованной кривой можно построить подвижный, меняющийся от точки к точке, ортонормированный репер, состоящий из орта направленного вдоль касательной $\bar{\tau}$, орта нормали \bar{n} , перпендикулярного к касательной и орта бинормали \bar{b} , перпендикулярного первым двум. Нормалью кривой является прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания, лежащая в соприкасающейся плоскости к этой кривой, и направленная в сторону ее вогнутости.

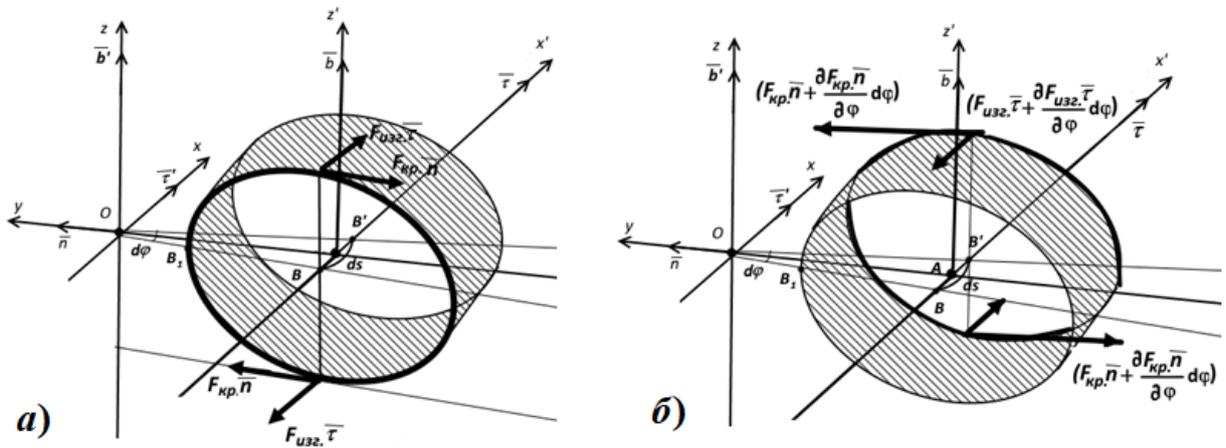


Рис. 3. Изгибающие и крутящие пары сил в сечении, содержащем точку В, на а и, содержащем точку В', на б

Единичные векторы $\bar{\tau}$, \bar{n} репера Френе показаны на рисунке 4, соответственно для касательной и главной нормали, при слежении за точками деформируемого состояния кольца вдоль ее кривой линии. Бинормаль во все время смещений точек сечений кольца и его деформирования перпендикулярна им обоим. При соответствующем выборе направлений этих векторов, известных величинах кривизны $k = 1/R$ и кручения $\chi = \left(\frac{d\bar{b}}{ds}, \bar{n}\right)$, выписываются производные ортов с использованием формул Френе, в которых $ds = R d\varphi$:

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{d\varphi} = -\bar{\tau} + \chi R \bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{d\varphi} = -\chi R \bar{n}. \quad (9)$$

Исходя из полученных формул можно вычислить приращение вектора $F_{u_{3z}} \bar{\tau}$ и найти координатную форму $\bar{F}'_{u_{3z}} = \left(F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u_{3z}} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right)$ в естественной системе $A \tau n b$

$$\bar{F}'_{u_{3z}} = F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u_{3z}} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi = F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \bar{\tau} + F_{u_{3z}} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (10)$$

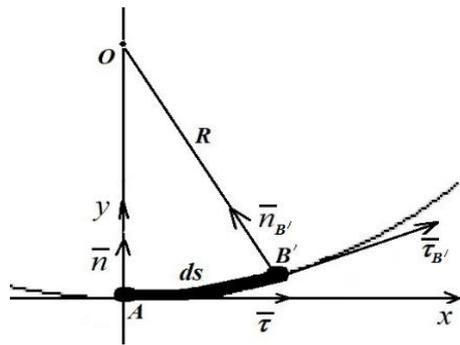


Рис. 4. Касательный и нормальный векторы $\bar{\tau}$, \bar{n} для элемента ds кольца

В общем виде сила, изгибающая плоскость кольца от второй пары, примет вид

$$\bar{F}'_{u_{3z}} = \left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial(F_{u_{3z}})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{\tau} + F_{u_{3z}} d\varphi \cdot \bar{n}, \quad (11)$$

при этом пара в координатной форме станет такой

$$\begin{aligned} \bar{F}'_{u_{3z}} &= \left(\left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \right); F_{u_{3z}} d\varphi; 0 \right), \\ -\bar{F}'_{u_{3z}} &= \left(- \left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \right); -F_{u_{3z}} d\varphi; 0 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Радиусы-векторы до каждой из этих сил: $\bar{r}_1 = \left(\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$. Аналогично предыдущим вычислениям (7) осуществляется расчет симметричного изгибающего момента от второй пары сил $\bar{M}'_{узз}$

$$\bar{M}'_{узз} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & r \\ -F_{узз} - \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi & -F_{узз} d\varphi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & -r \\ F_{узз} + \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi & F_{узз} d\varphi & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{узз} d\varphi \cdot \bar{\tau} - 2r \left(F_{узз} + \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (13)$$

Общий вектор изгибающего момента $\bar{M}'_{узз}$ в координатной форме имеет следующую зависимость:

$$\bar{M}'_{узз} = (M_{узз} d\varphi; -\left(M_{узз} + \frac{\partial M_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi \right); 0). \quad (14)$$

Аналогичные вычисления выполняются для крутящих моментов поперечных сечений S элемента объема ds кольца $\bar{M}_{кр} = (M_{кр\tau}; M_{крn}; M_{крb})$, $\bar{M}'_{кр} = (M'_{кр\tau}; M'_{крn}; M'_{крb})$. Для этого определяются координаты радиусов-векторов \bar{r}_1 , \bar{r}_2 до точек приложений первой пары сил $F_{кр} \bar{n}, -F_{кр} \bar{n}$. Тогда $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$. Вычисляется первый крутящий момент

$$\bar{M}_{кр} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & r \\ 0 & -F_{кр} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & -r \\ 0 & F_{кр} & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{кр} \cdot \bar{\tau}. \quad (15)$$

Если модуль крутящего момента равен $|\bar{M}_{кр}| = M_{кр} = 2r F_{кр}$, то векторная величина $\bar{M}_{кр} = M_{кр} \bar{\tau}$. В координатном виде выражение для момента $\bar{M}_{кр}$ от первой пары сил $(\bar{F}_{кр}, -\bar{F}_{кр})$, в котором $M_{крn} = 0$, $M_{крb} = 0$, получается

$$\bar{M}_{кр} = (M_{кр}; 0; 0). \quad (16)$$

Противоположный ему момент от второй пары сил $-\left(F_{кр} \bar{n} + \frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi, -F_{кр} \bar{n} - \frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right)$. Для его нахождения необходимо вычислить производную $\frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi}$, определить приращение вектора $F_{кр} \bar{n}$ и записать в координатной форме

$$\bar{F}'_{kp} = F_{kp} \bar{n} + \frac{\partial(F_{kp} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi = F_{kp} \bar{n} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \bar{n} + F_{kp} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (17)$$

В общем виде закручивающее элемент ds кольца усилие от второй пары примет вид

$$\bar{F}'_{kp} = -F_{kp} d\varphi \cdot \bar{\tau} + \left(F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{n} + \chi R F_{kp} d\varphi \cdot \bar{b}, \quad (18)$$

и в координатной форме будет таким

$$\bar{F}'_{kp} = \left(-F_{kp} d\varphi; F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi; \chi R F_{kp} d\varphi \right). \quad (19)$$

Противоположное ему усилие

$$-\bar{F}'_{kp} = \left(F_{kp} d\varphi; -F_{kp} - \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi; -\chi R F_{kp} d\varphi \right). \quad (20)$$

Радиусы-векторы до каждого из них $\bar{r}_1 = \left(\frac{ds}{2}; 0; -r \right)$ и $\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; 0; r \right)$. Вычислим симметричный крутящий момент второй пары сил, закручивающих противоположное сечение S элемента кольца ds .

$$\bar{M}'_{kp} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & -r \\ F_{kp} d\varphi & -F_{kp} - \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi & -\chi R F_{kp} d\varphi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & r \\ -F_{kp} d\varphi & F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi & \chi R F_{kp} d\varphi \end{vmatrix} = -2r \left(F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{\tau} - 2r F_{kp} \cdot d\varphi \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (21)$$

Алгебраическая величина момента будет равна $M_{kp} = 2rF_{kp}$. В координатной форме вектор \bar{M}'_{kp} примет вид:

$$\bar{M}'_{kp} = \left(- \left(M_{kp} + \frac{\partial M_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right); -M_{kp} d\varphi; 0 \right). \quad (22)$$

Выводы. На рисунке 5 изображена векторная схема приложенных изгибающих и крутящих моментов к элементу кольца ds , идентичная приведенной в [1].

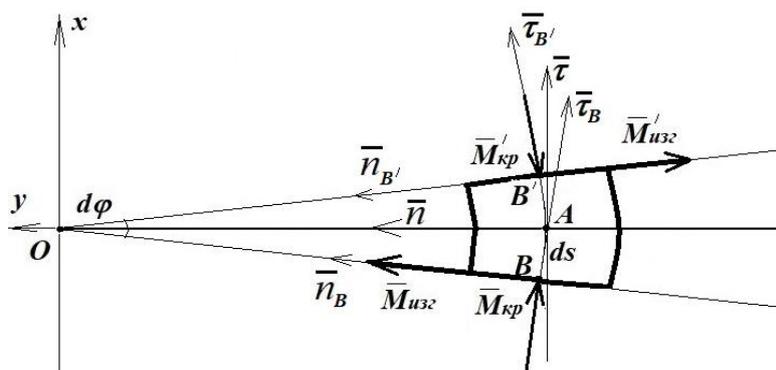


Рис. 5. Схема векторов изгибающих и крутящих моментов кругового элемента ds кольца

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
2. Бидерман В. Л. Поперечные колебания пружин// Расчеты на прочность. – М., 1962. – Вып.8. – С.256–270.
3. Dokukova N. A. and Konon P. N. General laws governing in mechanical vibratory systems / JEPT, 2006. – V. 79. – N. 4. – P. 824–831.
4. Докукова Н. А., Мартыненко М. Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук, 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
5. Мартыненко М. Д., Докукова Н. А., Бойко Л. И. О колебательных процессах в механических системах / Инженерно-физический журнал, 1999. – Т. 72 (3). – С. 491–494.
6. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Некоторые математические аспекты виброизоляции современных технических устройств // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Минск. – 2021. Выпуск – 36. – 6 с.
7. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование деформирований витков упругой цилиндрической пружины // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Минск. – 2021. Выпуск – 36. – 8 с.
8. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование динамического деформируемого состояния упругой цилиндрической пружины// Scientific collection “Interconf”, № 89. IV ISPC “Current issues and prospects for the development of scientific research”, 7–8 December, 2021. Orleans, France. – 14 с.
9. Докукова Н. А., Конон П. Н. Исследование двух физических моделей вязкой среды в задаче гидромеханической виброизоляции// Scientific collection “Interconf”, № 93. III ISPC “Scientific trends and trends in the context of globalization”, 21–22 December, 2021. Umeå, Sweden. – 15 с.
10. Высоцкий М. С., Докукова Н. А., Конон П. Н. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / Доклады Национальной академии наук Беларуси, 2006. – Т. 50. – С. 114–119.

Поступила: 31.03.2022