

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ Л. ПРАНДТЛЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ФЛАНЦУ, ЗАНИМАЮЩЕМУ ОБЛАСТЬ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

¹Сосенушкин Е. Н., ¹Кадымов В. А., ¹Яновская Е. А., ²Архипов А. А.

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный технологический университет «СТАНКИИ», Москва, РФ

²Публичное акционерное общество «Научно-производственное объединение «АЛМАЗ» имени академика А. А. Расплетина» – Территориально обособленное подразделение «Лианозовский электромеханический завод», РФ

Введение. Развитие математического аппарата механики деформируемого твердого тела направлено на получение определяющих соотношений и зависимостей в аналитическом виде для оценки давлений на контактных поверхностях, силовых и деформационных параметров, а также скоростей течения материальных точек анализируемых объектов с многосвязным контуром [1]. Читателю предлагается уточненная расчетная схема поковки фланца [2] (рисунок 1) без особых точек.

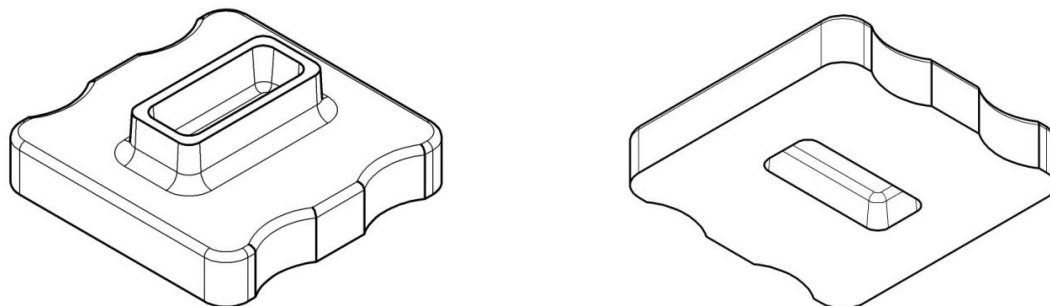


Рис. 1. Проекция фланца для соединения волноводов

Технологией изготовления подобных изделий традиционно является штамповка в холодном, полугорячем [2] и горячем [3, 4] состояниях в зависимости от механических характеристик материала фланца [5] и необходимой степени деформации при формоизменении.

Оценка энергосиловых параметров при деформировании сложных поковок проводится с помощью компьютерного 3D моделирования [6], либо одним из методов приближенного расчета теории пластичности [7–9].

При производстве некруглых поковок, имеющих ребра [10], необходимо учитывать эффект затекания металла в пазы штампа, формирующие тело ребер. Для анализа силовых и кинематических параметров исследуемого технологического процесса предлагается использовать осредненную по толщине теорию течения пластического слоя, представленного моделью «идеальной жидкости», в изложении А. А. Ильюшина [9]. Расчетную схему иллюстрирует рисунок 2, а математическая постановка задачи приведена ниже.

Постановка и решение краевой задачи. Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в многосвязной области $S(x, y)$, которая объединяет следующие подобласти:

$$S(x, y) = \cup_{i=1}^2 S_{ij}(x, y). \quad (1)$$

Уравнения краевой задачи (2–4) запишем в полярной системе координат в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\rho}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\varphi}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\rho \partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что компонента вектора скорости $v_\varphi \equiv 0$ во всей подобласти S_{13} . Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке $(a - r_1, b - r_1)$, где h_1 – толщина внешней подобласти, $\bar{v} = \bar{v}(\rho, \varphi)$, $\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h_1(t)}\right)$ – степень деформации по А. А. Ильюшину, которая после дифференцирования по времени примет вид:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt}. \quad (5)$$

Решение найдено для подобластей пластического течения расчетной схемы (см. рисунок 2, а) [1]. Однако подобласть S_{13} имеет другую схематизацию течения (рисунок 2, б), в которой отсутствуют особые точки с неоднозначностью решения.

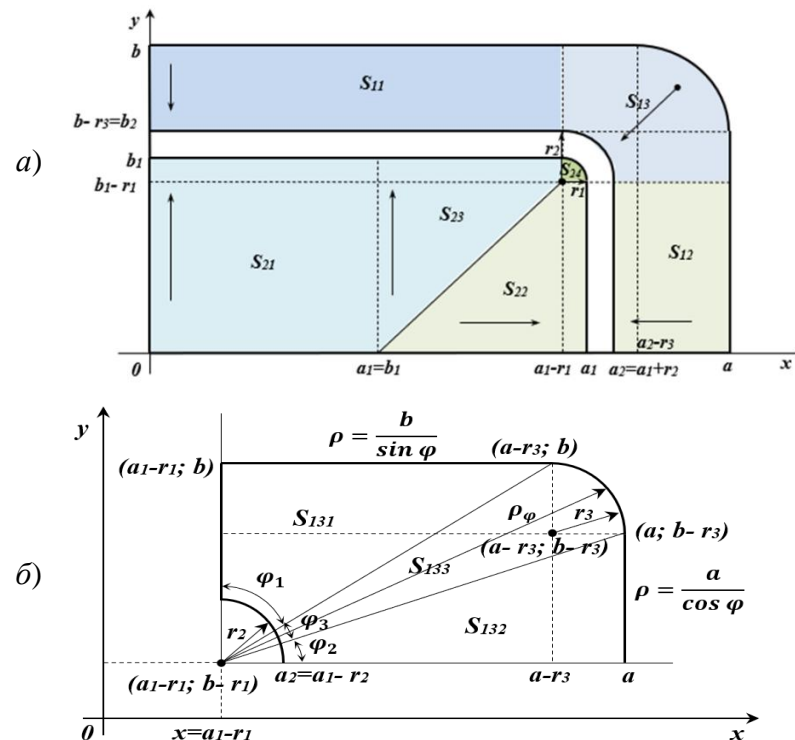


Рис. 2. Расчетная схема: а – участки поковки в I квадранте; б – разбиение подобласти S_{13}

Рассмотрим один из кинематически возможных вариантов течения пластического слоя в подобласти $S_{13} = \cup_{k=1}^3 S_{13k}$, разбив ее на три участка S_{131} , S_{132} , S_{133} . (см. рисунок 2, б). Границы участков представим неравенствами (6–8):

$$S_{131} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin\varphi} \\ \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b-r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. . \quad (6)$$

$$S_{132} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \end{array} \right. . \quad (7)$$

$$S_{133} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \\ \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b-r_1} \end{array} \right. . \quad (8)$$

Вид функции ρ_φ определим отдельно. Для этого опишем границу участка S_{133} , представленную четвертью окружности радиуса r_3 с центром в точке $(a-r_3, b-r_1)$. Уравнение окружности в декартовой системе координат

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Подставим новые переменные в уравнение окружности и приведем его к виду:

$$\begin{aligned} (\rho \cos\varphi - (a-r_3))^2 + (\rho \sin\varphi - (b-r_3))^2 &= r_3^2, \\ \rho^2 - 2\rho(a-r_3)\cos\varphi + (a-r_3)^2 - 2\rho(b-r_3)\sin\varphi + (b-r_3)^2 - r_3^2 &= 0, \\ \rho^2 - 2\rho((a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi) + ((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнение искомой границы в полярной системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= (a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi + \\ &+ \sqrt{((a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi)^2 - ((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В задаче принято условие полной пластичности на том основании, что касательное напряжение в слое $\tau_{\rho\varphi}$ мало по сравнению с нормальными напряжениями и им можно пренебречь, причем два нормальных напряжения в поперечном (вертикальном) сечении в начальном приближении можно считать равными $\sigma_\rho \approx \sigma_\varphi = -q$. Третье нормальное напряжение постоянно по толщине слоя, численно равно контактной давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности.

Перейдем к рассмотрению участка S_{133} с границами (8).

В качестве граничных условий на участке согласно расчетной схеме (см. рисунок 2, б) примем

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_\varphi, & v_\rho &= 0, \\ \rho &= r_2, & p &= 2\tau_s,\end{aligned}$$

подстановка которых в уравнения (2) и (3) исходной системы, приводит их к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0.$$

Решив эту систему и вычислив постоянную интегрирования, найдем давление на контактной поверхности участка:

$$p_{133} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2).$$

Из условия несжимаемости (4) получим радиальную компоненту вектора скорости течения

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{\rho_\varphi^2}{\rho} - \rho \right).$$

Силу деформирования, приходящуюся на участок S_{133} , найдем двойным интегрированием вычисленного контактного давления:

$$\begin{aligned}P_{S_{133}} &= \iint_{S_{133}} p_{S_{133}} \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} d\varphi \int_{r_2}^{\rho_\varphi} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2) \right) \rho \, d\rho = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \rho^3 + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \rho^2 \right) \Big|_{r_2}^{\rho_\varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (\rho_\varphi^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (\rho_\varphi^3 - r_2^3) \right) d\varphi.\end{aligned}$$

Для дальнейшего интегрирования проанализируем функцию ρ_φ (9), которая содержит различные нелинейные комбинации тригонометрических функций. Проанализируем значения функции ρ_φ^2 и ρ_φ^3 , где $\alpha_2(\varphi)$ и $\alpha_3(\varphi)$ – бесконечно малые функции более высокого порядка.

$$\begin{aligned}\rho_\varphi^2 &= 4((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right) + \\ &+ 2((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2) + \alpha_2(\varphi),\end{aligned}$$

и

$$\rho_{\varphi}^3 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{(a-r_3)^2 + (b-r_3)^2} \sin \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right) \right)^3 - 2\sqrt{2}((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2)^3 + \alpha_3(\varphi).$$

В выражениях для ρ_{φ}^2 и ρ_{φ}^3 заменим значения $\sin \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right)$ единицей. Эта замена возможна, так как значение аргумента приближается к $\frac{\pi}{2}$. Тогда выражение

$$P_{S_{133}} = \int_{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\operatorname{arctg} \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a-r_3)^2 + 2(b-r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a-r_3)^3 + (b-r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right) d\varphi.$$

для вычисления силы деформирования на участке S_{133} примет следующий вид

После интегрирования и подстановки пределов интегрирования получаем приближенное значение для силы деформирования на данном участке:

$$P_{S_{133}} = \left(\operatorname{arctg} \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1} - \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \right) \cdot \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a-r_3)^2 + 2(b-r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a-r_3)^3 + (b-r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right). \quad (10)$$

Полученный результат может быть использован для инженерных расчетов силовых параметров при деформировании поковок, имеющих участки, ограниченные дугами окружностей. В частных случаях при малых радиусах закругления угловых элементов рассматриваемый участок может вырождаться в линию раздела течения.

Вывод. Получены уточненные соотношения для оценки силовых и кинематических параметров при деформировании участка S_{133} , который не содержит особых точек, при затекании металла в ребра, расположенные по контуру прямоугольного отверстия в поковке, с закруглениями в местах сопряжения ребер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосенушкин Е. Н., Кадымов, В. А., Яновская, Е. А., Архипов, А. А., Гуреева, Т. В., Гусев, Д. С. Математическое моделирование затекания пластически деформируемого слоя в ребра / Е. Н. Сосенушкин [и др.] // Теоретическая и прикладная механика [Электронный ресурс]: международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет; редкол.: А. В. Чигарев (пред. редкол.). – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 184–189.

2. Сосенушкин Е. Н., Яновская Е. А., Архипов А. А. Математическое моделирование штамповки прямоугольного фланца с выдавливанием выступа // Вестник МГТУ «Станкин» №4 (51), 2019. С. 65–70.

3. Сосенушкин Е. Н. Разработка ресурсосберегающей технологии производства фланцевых поковок на универсальном оборудовании / Е. Н. Сосенушкин В. В. Белокопытов // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №3(11). – С.35–41.
4. Каплунов Б. Г. Патент №2352431 РФ Способ штамповки поковок фланцев воротниковых / Б. Г. Каплунов, В. М. Тяжелников, С. П. Зуев и др. ООО НПО «Интеграл». 10.10.2008.
5. Механические свойства легких сплавов при температурах и скоростях обработки давлением: Справ. издание. / П. Г. Микляев. – М.: Металлургия, 1994. – 288 с.
6. Бильчук М. В. Автоматизация этапов проектирования процессов закрытой горячей штамповки фланцевых поковок / М. В. Бильчук Е. Н. Сосенушкин Теория, моделирование, эксперимент [Монография]. М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2021. – 118 с.
7. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов/ В. А. Голенков С. П. Яковлев С. А. Головин и др. – М.: Машиностроение, 2013. – 442 с.
8. Воронцов А. Л. Теория штамповки выдавливанием / А. Л. Воронцов – М.: Машиностроение – 1, 2004. 721 с.
9. Ильюшин А. А. Труды (1946 – 1966). Т.2. Пластичность/ А. А. Ильюшин – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
10. Соломонов К. Н. Методика построения линии раздела течения металла для кусочно-линейного контура / К. Н. Соломонов, Н. И. Федоринин, Л. И. Тищук // Механическое оборудование металлургических заводов. 2016. № 1 (6). – С. 68–74.
11. Kadymov V. A. Modeling of the stamping process of box-type forging / V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya/ In the collection: Materials science, shape-generating technologies and equipment 2020. 2020. – P. 11002.
12. Кийко И. А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями / И. А. Кийко // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 1. – С. 15-26.

Поступила: 24.01.2022