

ISSN 0134-9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 37

Минск
БНТУ
2022

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т 37

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Президиум редакции:

С. В. Харитончик, А. М. Маляревич, В. М. Трепачко, А. И. Сафонов,
В. В. Можаровский, С. А. Чижик, М. А. Журавков,
Ю. М. Плескачевский, С. С. Щербаков

Редакционная коллегия:

Ю. В. Василевич (председатель, главный редактор),
В. А. Чигарев (зам. председателя, уч. секретарь),
Т. Н. Микулик (редактор), И. С. Куликов, В. А. Акимов,
А. В. Савицкая (электронный макет, компьютерная верстка)

Адрес редакции:

220013, Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»
Тел.: (+375 17) 293 96 47, 292 74 25,
E-mail: smat@bntu.by, tmech@bntu.by

В сборнике представляются научные статьи по общей механике, теоретической и прикладной механике, механике материалов, механике сплошной среды, механике деформируемого твердого тела и смежным вопросам, научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов, специалистов исследовательских и научно-технических организаций.

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа, мехатроника, робототехника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Мехатроника», «Механика деформируемых тел», «Техническая механика» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов могут не совпадать с позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник полезен преподавателям высших учебных заведений, научно-инженерных работникам, аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов технических вузов.

Издание включено в перечень ВАК Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований.

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43

© Белорусский национальный
технический университет, 2022

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ ВИБРАЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ВЕРХНЕГО СТРОЕНИЯ ПУТИ ДЛЯ УСЛОВИЙ МЕТРОПОЛИТЕНА

¹Василевич Ю. В., ²Макеев С. В., ³Комиссаров В. В., ³Лапушкин А. С.,
³Гончаров Г. Р.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²ЗАО «ДОР-МПЗ», Минск

³Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Метро, как вид транспорта давно приобрел заслуженную популярность. Минский метрополитен постоянно увеличивает протяженность своих путей, появляются новые станции. Метро характеризуется своей быстротой, надежностью и экологичностью, что привлекает к его использованию все больше и больше людей крупных мегаполисов.

Однако, известно, что метрополитен неглубокого заложения является источником повышенного уровня шума и вибраций, вызываемых воздействием колеса и рельса. Источником вибраций и шума, а также ее усиления являются износ поверхности колес, жесткость рессорного подвешивания составов, стыки рельсов и др. Шум от приближающегося поезда метро, достигает на станции порядка 85 дБ. В свою очередь вибрация, передаваемая от колеса на рельс, передается на железобетонный свод тоннеля, и затем через грунт на близлежащие здания. В конечном итоге повышенная вибрация приводит к появлению трещин, разрушению фундаментов, а также негативно влияет на комфорт проживания и здоровье людей, находящихся в зоне воздействия этой вибрации.

Проблема снижения шума и вибрации является важной составляющей развития инфраструктуры метрополитена. Одним из методов защиты от шума и вибрации на существующих и вновь строящихся линиях метро, является виброизоляция верхнего строения пути. В этой связи возникает проблема рационального выбора конструкции рельсового основания, которая была бы не дорогой в производстве и эксплуатации, а с другой стороны имела бы набор характеристик, отвечающих современным требованиям по шуму, вибрации, прочности и надежности.

Виброзащита верхнего строения пути метрополитена. Известны деревянные шпалы, которые широко используют в качестве подрельсового основания пути метрополитена, обладающие рядом положительных качеств, а именно, обеспечивают хорошее вибро-шумопоглощение, мягкую передачу вибрации и обладают низкой электропроводностью [1].

Однако, в связи с повышенной влажностью в тоннелях, деревянные шпалы, несмотря на углубленное антисептирование, подвергаются гниению и их срок службы не превышает 15–20 лет. В виду мягкости древесины при регулярных динамических воздействиях (интенсивность движения поездов каждые 2–3 минуты в течение 20 часов в сутки) в местах крепления рельса к шпалам быстро появляются трещины и возникают проблемы с надежностью крепления. Деревянные шпалы условно можно принять за эталон по уровню эффективности виброгашения.

Известны также бетонные шпалы, которые имеют высокую прочность и долговечность по сравнению с деревянными шпалами [2]. Однако их использование приво-

дит к повышению жесткости конструкции, повышению шума и вибраций, что отрицательно влияет на тоннельные сооружения.

Эксплуатационные нагрузки на путь в метро ниже, чем нагрузки на железнодорожный путь общего назначения, поэтому при прокладке железнодорожного пути метро применяются полу шпалы, которые обладают рядом преимуществ по отношению к шпалам, например, так как их длина составляет примерно половину длины обычной шпалы, то стоимость полу шпалы гораздо ниже. Важным преимуществом полу шпалы, по сравнению со стандартной железобетонной шпалой, также является возможность с наименьшими временными и трудовыми затратами производить ремонт железнодорожного пути или проводить иные технологические работы. С учетом того, что эксплуатационные осевые нагрузки на путь метрополитена ниже, чем нагрузки на железнодорожный путь общего назначения, перспективы массового использования железобетонных полу шпал, или аналогичных им изделий, для возведения линий метро и трамвайных линий, представляются обоснованными. Однако и использование полу шпал из железобетона при прокладке пути в метро также приводит к повышенному шуму и вибрациям.

С учетом данного обстоятельства объектами исследования в данной работе являлись модификации конструкции верхнего строения безбалластного железнодорожного пути для метрополитенов, представленные бетонными блоками БОМ-В, разработанные на предприятии ЗАО «ДОР-МПЗ» (рисунок 1). Основным виброизолирующим элементом в конструкции блоков опорных с виброизоляцией является система из набора виброгасящих прокладок (7), которая обеспечивает требуемую жесткость опорного блока, а также соответствующий вертикальный прогиб связанного с ней рельса.

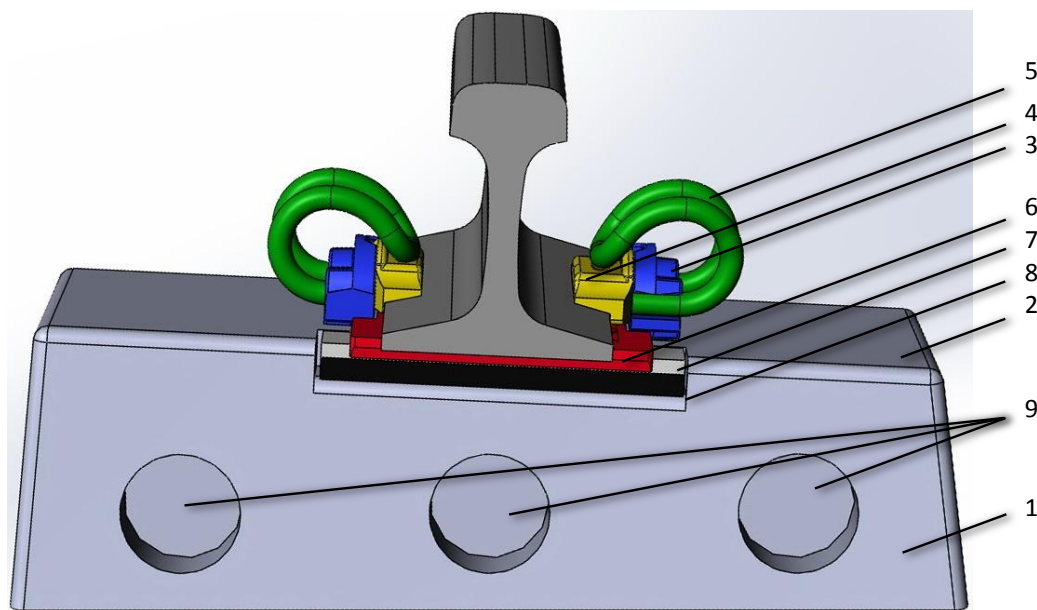


Рис. 1. Устройство бетонного блока БОМ-В: 1 – монолитный армированный железобетонный блок, переменный по длине сечения; 2 – наклонная часть (подуклонка рельсовой площадки) блока опорного; 3 – анкер; 4 – изолятор; 5 – клемма пружинная; 6 – подрельсовая прокладка; 7 – набор виброгасящих прокладок; 8 – выемка для установки набора виброгасящих прокладок; 9 – выемка для бетонирования и удержания от вырывания блока опорного

Испытания блоков БОМ-В производились при различных модификациях виброизолирующих слоев. В конструкцию вносились изменения по виду используемого мате-

риала, твердости виброизоляционных прокладок (50, 61, 65, 75 и 82 ед. твердости по Шору А), их толщины, материала опорной площадки, а также их комбинации.

Таким образом, вариативный ряд конструкций состоял из перечисленных наименований. Общая сводка подвергаемых циклическим испытаниям конструкций представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Вариативный ряд испытываемых конструкций

Обозначение конструкции	Количество виброгасящих прокладок, шт	Твердость виброгасящих прокладок, ед. по Шору А	Материал используемой опорной площадки
<i>БОВ-М 01</i>	<i>1</i>	<i>65</i>	<i>Металл</i>
<i>БОВ-М 02</i>	<i>1</i>	<i>65</i>	<i>Текстолит</i>
<i>БОВ-М 03</i>	<i>1</i>	<i>75</i>	<i>Металл</i>
<i>БОВ-М 04</i>	<i>1</i>	<i>75</i>	<i>Текстолит</i>
<i>БОВ-М 05</i>	<i>1</i>	<i>82</i>	<i>Металл</i>
<i>БОВ-М 06</i>	<i>1</i>	<i>82</i>	<i>Текстолит</i>
<i>БОВ-М 07</i>	<i>2</i>	<i>65+82</i>	<i>–</i>
<i>БОВ-М 08</i>	<i>2</i>	<i>ПУ50+ПУ50</i>	<i>Текстолит</i>
<i>БОВ-М 09</i>	<i>1</i>	<i>ПУ50</i>	<i>Металл</i>
<i>БОВ-М 10</i>	<i>1</i>	<i>ПУ50</i>	<i>Текстолит</i>
<i>БОВ-М 11</i>	<i>2</i>	<i>ПУ50+ПУ82</i>	<i>Металл</i>
<i>БОВ-М 12</i>	<i>1</i>	<i>61</i>	<i>Металл</i>

Натурные испытания по оценке колебаний передающихся на основание от моделируемого динамического воздействия подвижного состава метрополитена посредством циклического нагружения для разрабатываемой конструкции рельсового пути проводились в соответствии с СТБ ГОСТ Р 51399-2001 [1] по пп. 5–9.1.

Уровни вибрации определялись для случая циклического нагружения.

Для определения численных значений уровней вибрации проводилось измерение трехканальным датчиком с помощью виброметров «Октава 101-ВМ», «Октава Экофизика» в режиме автоматической регистрации среднеквадратичных уровней со временем усреднения 1 с. Канал датчиков вибрации были сориентированы по вертикальному направлению Z. Датчики вибрации крепились к исследуемой конструкции в соответствии с требованиями СТБ ИСО 5348-2001 «Вибрация и удар. Механическое крепление акселерометров» [4].

Обработка результатов измерений уровней вибрации проводится в лабораторных условиях на ПК с использованием программного обеспечения «Октава» и с помощью электронных таблиц MS Excel.

Циклическое нагружение производится с применением пульсатора сервогидравлической универсальной разрывной машины TC244.31A (рисунок 2). Подача и контроль испытательных параметров циклического нагружения производилась посредством программного комплекса Station Manager «MTS Flextest 40».

Измерения производились в контрольных точках, указанных на (рисунке 3). В качестве характерных точек принимались точки, расположенные на подошве рельса, верхней поверхности бетонного блока, металлической плите (основании) испытательного оборудования.

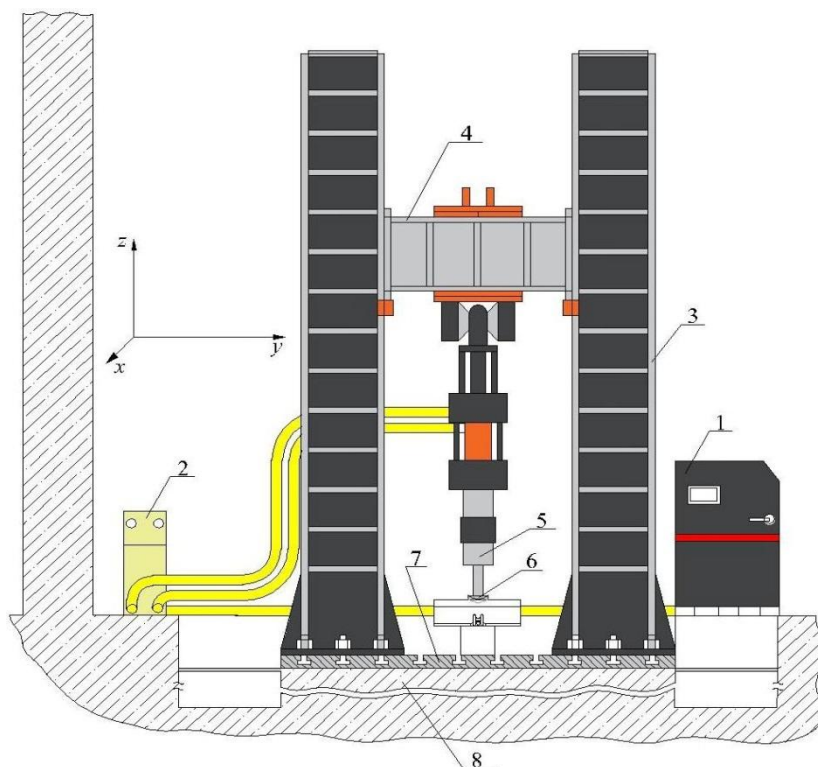


Рис. 2. Общий вид испытательной установки: 1 – насосная станция низкого давления; 2 – насосная станция высокого давления; 3 – стойка; 4 – балка с подвесным цилиндром-пульсатором; 5 – цилиндр-пульсатор; 6 – приспособление имитирующее контакт колеса и рельса; 7 – металлическая плита с пазами; 8 – железобетонное основание

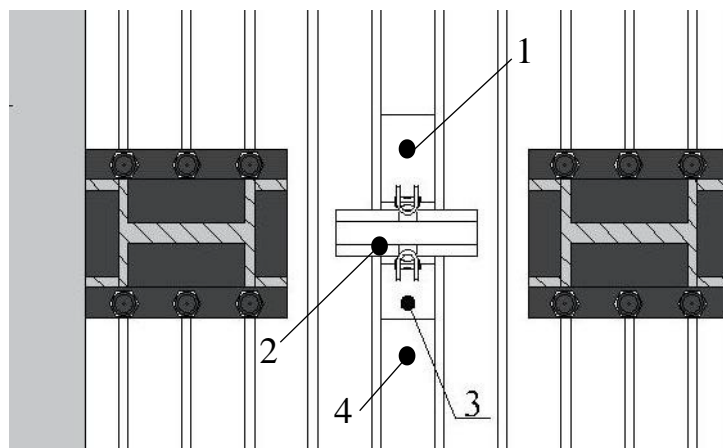


Рис. 3. Расположение контрольных измерительных точек

Воздействие циклической нагрузки передавалось через имитатор колеса подвижного состава (рисунок 4). В соответствии с ранее проведенными натурными измерениями на путях метрополитена на головку рельса прикладывалась нагрузка $40 \text{ кН} \pm 10 \text{ кН}$, как наиболее характерная для условий эксплуатации Минского метрополитена. Таким образом, в процессе испытаний минимальная нагрузка на головку рельса составляла 30 кН , а максимальная – 50 кН . Для анализа виброизоляции рассматриваемых вариантов конструктивного исполнения верхнего строения пути рассматри-

вались только колебания в вертикальной плоскости. Нагружение осуществлялось с частотой 10 Гц, что соответствует частоте прохода тележки подвижного состава метрополитена базой 2,1 м на максимальной скорости 80 км/ч (максимальная скорость движения подвижного состава в метрополитене).



Рис. 4. Имитация взаимодействия колеса и рельса на испытательной установке

Анализ литературных источников также показал, что при эксплуатации подвижного состава метрополитена наибольший спектр вибрации, как на поверхности грунта, так и на поверхности фундаментной плиты приходится на диапазон частот 31,5–63 Гц. В этой связи дополнительно испытания проводились в октановой полосе частот 31,5 Гц – на частотах 25 и 37,5 Гц и 63 Гц – на частотах 50 и 66,7 Гц.

В результате проведенной работы рассмотрена работоспособность по критериям виброгашения для широкого круга используемых элементов виброгасящего слоя на примере одной, неизменной конструкции блока при циклическом нагружении (характерном для нормального периода эксплуатации).

В результате проведенных циклических испытаний 12 вариантов конструктивного исполнения блоков получены данные по уровню виброгашений в исследуемом диапазоне частот (рисунок 5). Максимальные значения виброускорения наблюдаются на частотах нагружения.

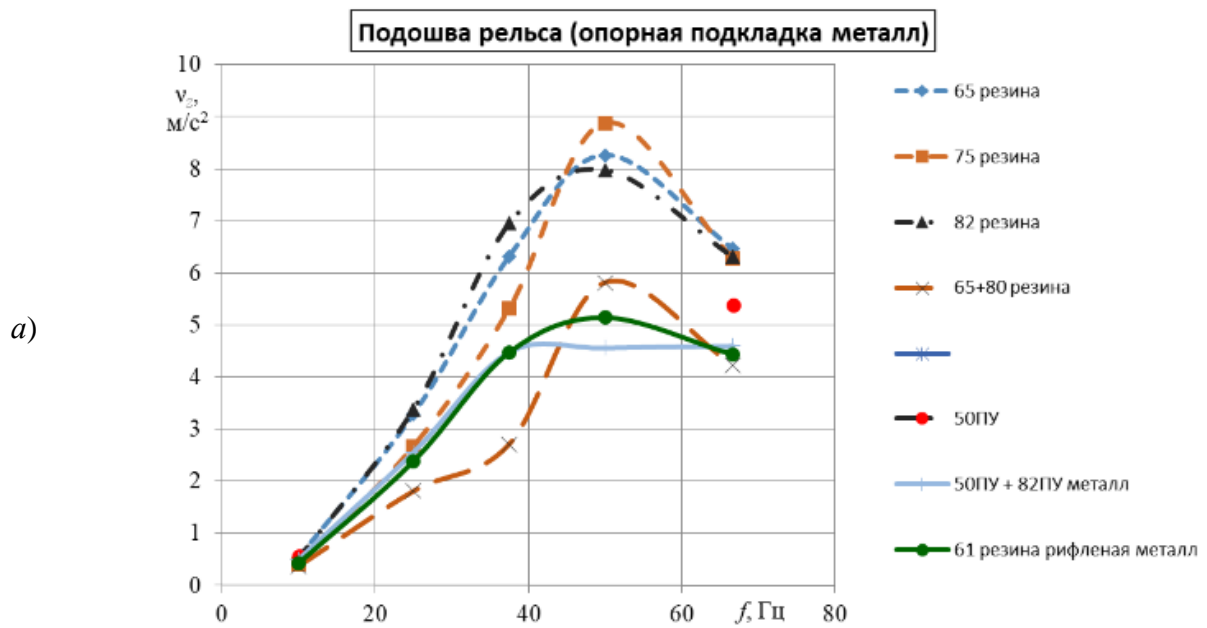


Рис. 5. Зависимости максимальных значений виброускорения от частоты нагружения (подошва рельса): а – опорная подкладка металл; б – опорная подкладка текстолит

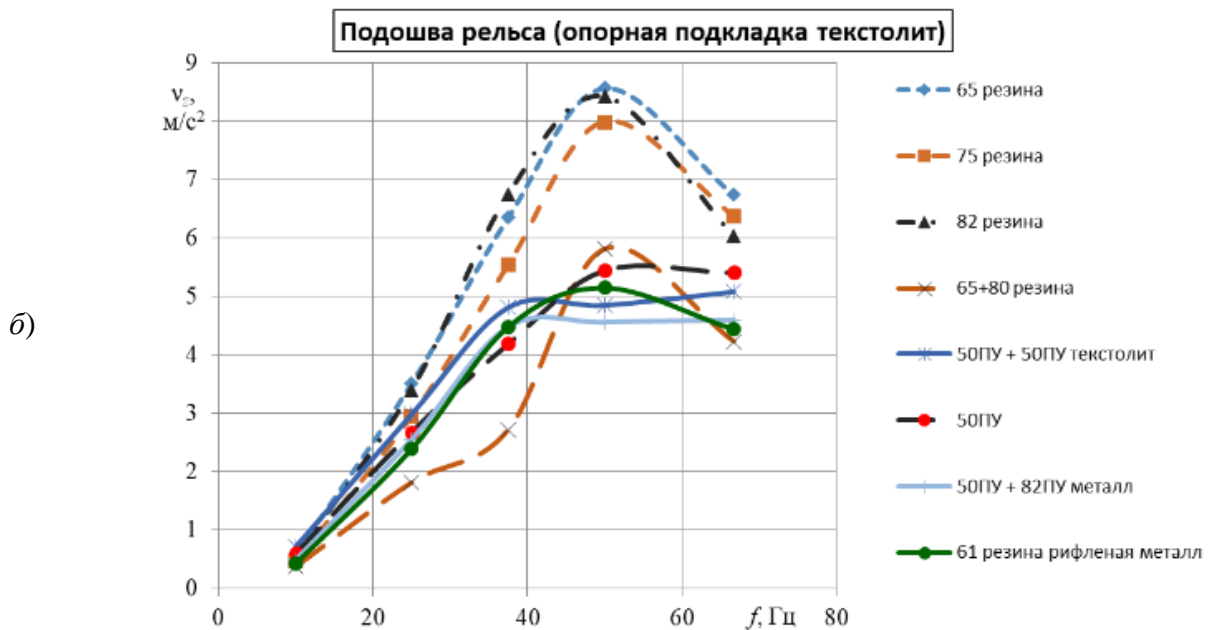


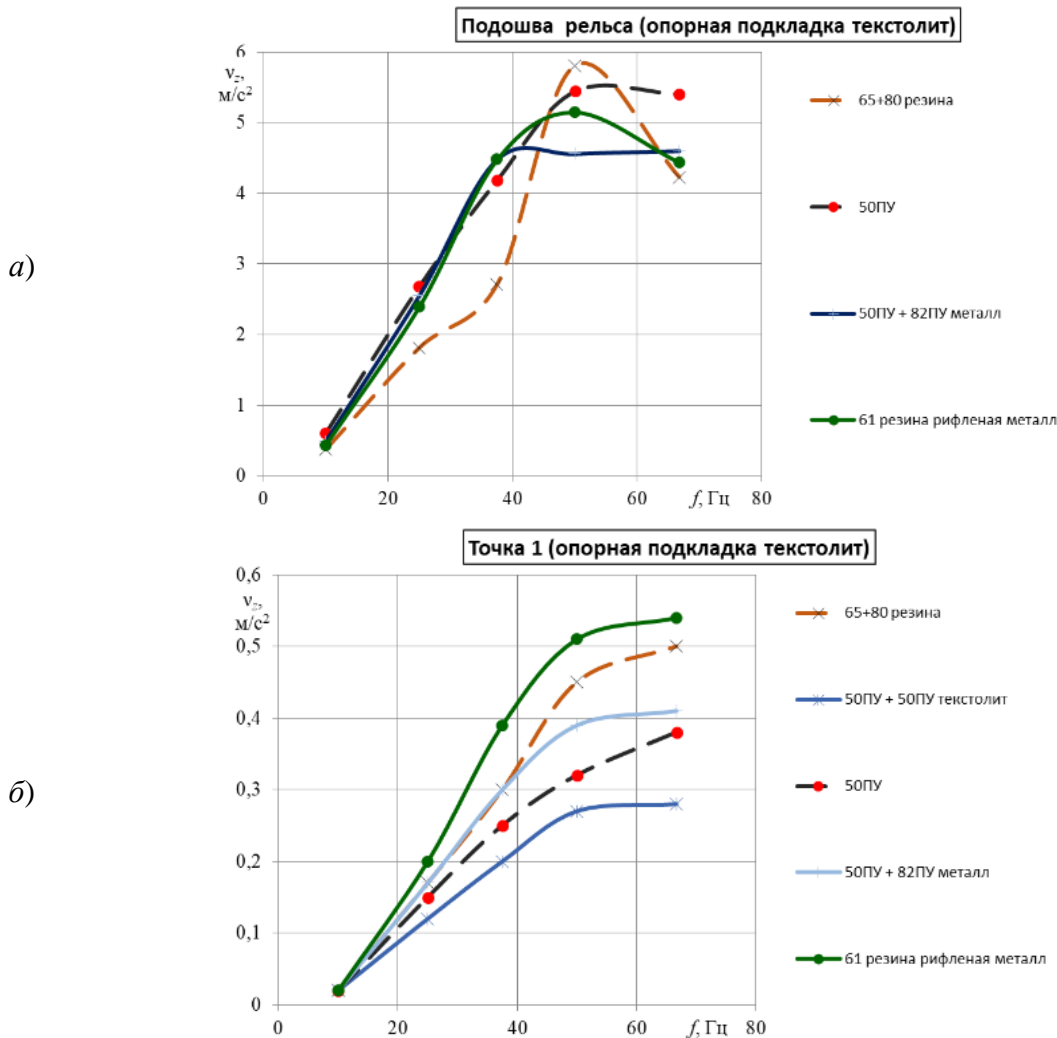
Рис. 5. (Продолжение) Зависимости максимальных значений виброускорения от частоты нагружения (подошва рельса): а – опорная подкладка металл; б – опорная подкладка текстолит

Анализ данных зависимостей показывает, что использование металлической опорной пластины или пластины из текстолита той же толщины не оказывает существенного влияния на результаты виброускорения при реализованном нагружении.

Т. е. можно констатировать, что испытанные резиновые прокладки одной конструкции имеющие различную твердость (65, 75, 82 по Шору) имеют сопоставимые показатели по критериям виброгашения. Таким образом, при реализованном режиме нагружения в различном диапазоне воздействующих частот механические характеристики

вибропрокладок одного конструктива не оказывают заметного влияния на снижение величин виброускорения.

Изменение конструкции блока путем увеличения толщины виброизолирующего слоя резиновых прокладок и совместное нагружение двух резиновых прокладок твердостью по Шору 82 и 65 ед. способствует снижению виброускорения во всем диапазоне частот нагружения в среднем до 50 % (см. рисунок 5 и 6).



Вариант блока с двумя виброизоляционными прокладками из мягкого по твердости полиуретана (50 единиц по Шору) при частоте 10 Гц способствует некоторому повышению вибрации на рельсе. Однако в диапазоне частот 31,5–63 Гц (наиболее характерных при эксплуатации подвижного состава метрополитена, когда наблюдается наибольший спектр вибрации на поверхности грунта и поверхности фундаментной плиты) наблюдается заметное снижение вибрации. Таким образом, изменение геометрии блока за счет увеличения толщины изолирующего слоя показывает, что мягкий слой лучше гасит высокочастотные колебания. Остается только установить предельные размеры изолирующего слоя с позиции жесткости всей несущей конструкции верхнего строения пути.

Схожие зависимости наблюдаются и для других удаленных от зоны приложения нагрузок контрольных точек (рисунок 7).

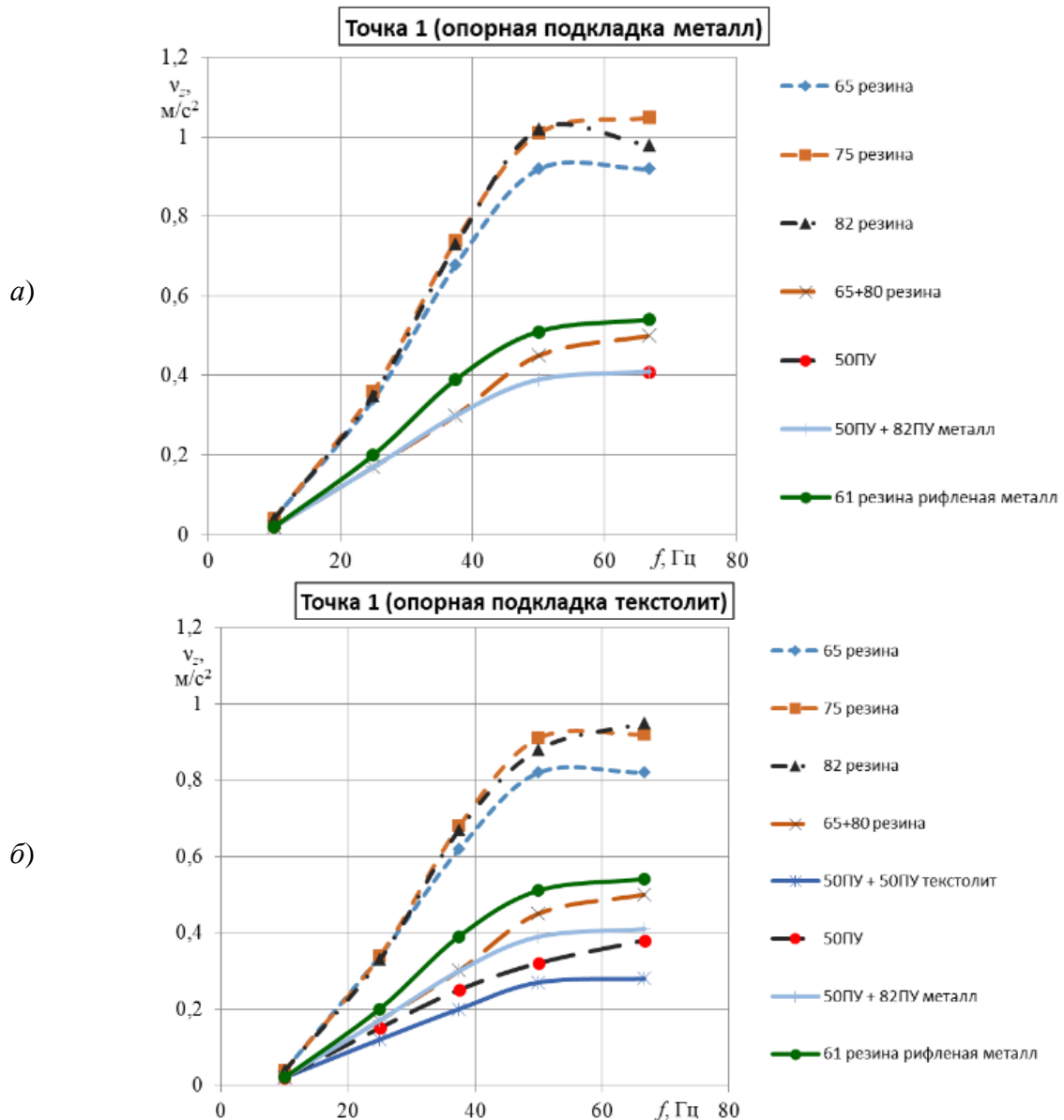


Рис. 7. Зависимости максимальных значений виброускорения от частоты нагружения (точка 1):
a – опорная подкладка металл; *б* – опорная подкладка текстолит

В этом случае начинает просматриваться тенденция по снижению виброактивности со снижением твердости резиновых прокладок одной конструкции. Эта же особенность наблюдается и для вариантов с увеличенной толщиной виброизолирующего слоя.

Выводы. 1. При реализованном режиме нагружения в различном диапазоне воздействующих частот механические характеристики вибропрокладок одного конструктива не оказывают заметного влияния на снижение величин виброускорения в зоне воздействия. При удалении от данной зоны наблюдается тенденция снижения виброактивности при снижении твердости элементов виброизолирующего слоя.

2. Использование металлической опорной пластины или пластины из текстолита той же толщины не оказывает существенного влияния на результаты виброускорения и характер зависимостей от прилагаемых частот.

3. Увеличение толщины виброизолирующего слоя приводит к снижению максимальных значений виброускорения на 30–40 % в зоне приложения нагрузки и до 50 % в точках конструкции удаленных от зоны источника вибрации.

4. Одновременное увеличение толщины и снижение твердости элементов виброизолирующего слоя в общем случае приводит к дополнительному снижению максимальных значений виброускорения, однако такие изменения ограничены жесткостью верхнего строения пути, при достижении которой может быть нарушена безопасность движения.

5. Простота конструкции блока БОМ-В, не требующая затрат на обслуживание, низкая стоимость и широкое распространение промежуточного рельсового скрепления СБ-3, на базе которого он сделан, позволяет рекомендовать для использования его на участках метрополитена с последующим проведением натуральных испытаний. Это позволит произвести их полную оценку по выбранным критериям и уточнить методику ускоренных лабораторных испытаний [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 22830-77. Шпалы деревянные для метрополитена. Технические условия.
2. ГОСТ 33320-2015. Шпалы железобетонные для железных дорог. Общие технические условия.
3. ГОСТ Р 51399-2001. Вибрация. Измерения вибрации внутри железнодорожных туннелей при прохождении поездов.
4. СТБ ИСО 5348-2001 «Вибрация и удар. Механическое крепление акселерометров».
5. ИСО 4866-90 Вибрация и удар. Вибрация зданий. Руководство по измерению вибрации и оценке ее воздействия на здание.
6. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
7. ГОСТ 31368.4-2008 «Вибрация. Измерения виброакустических передаточных характеристик упругих элементов конструкций в лабораторных условиях. Часть 4. Динамическая жесткость не опорных упругих элементов конструкции для поступательной вибрации».
8. ГОСТ Р ИСО 2017-2-2011 Вибрация и удар. Упругие системы крепления. Часть 2. Технические данные для применения систем виброизоляции для железнодорожного транспорта.

Поступила: 30.03.2022

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ ПРОХОДКУ ШАХТНОГО СТВОЛА В МНОГОСЛОЙНОМ СОЛЯНОМ МАССИВЕ НА БОЛЬШИХ ГЛУБИНАХ

Лопатин С. Н., Журавков М. А.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Научно-техническое сопровождение процесса проходки шахтных стволов является актуальной и сложной задачей, т. к. Республика Беларусь на сегодняшний день занимает одно из лидирующих мест в мире по добыче калийных солей и экспорту калийных удобрений [1]. Масштабы освоения новых участков месторождений калийных солей увеличиваются с каждым годом, а горные работы ведутся во все более сложных условиях [1].

При проходке ствола необходимо рассматривать комплекс научно-исследовательских задач, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния (НДС) горнотехнической системы «крепь ствола – вмещающий массив горных пород – околоствольные выработки». При моделировании проходки стволов следует учитывать множество факторов, таких как строение и структура вмещающего массива, тип околоствольных пород, наличие подземных водных источников в интервале проходки ствола, шаг (интервалы) проходки ствола и т. д. Одним из ключевых факторов при оценке прочности инженерной конструкции шахтного ствола является глубина, на которой находится рассматриваемый интервал породного массива. Вследствие этого, существует большая разница при построении модельных задач при проходке стволов на малых и больших глубинах.

Отдельные аспекты общей проблемы построения модельных задач для изучения НДС горнотехнической системы «крепь ствола – вмещающий массив горных пород – околоствольные выработки» применительно к условиям массивов соляных пород рассматривались в работах [2, 3]. Отметим, что весьма актуальной представляется проблема поиска и построения достоверных и адекватных относительно рассматриваемых условий критериев прочности массивов горных пород, что подчеркивается в работах многих исследователей (см., например, [4–9]). Дополнительно отметим, что математическое и компьютерное моделирование геотехнических систем является важной задачей современной геомеханики (см., например, [3, 10]).

Постановка задачи. В данной работе рассматривается моделирование процесса проходки шахтного ствола в многослойном массиве соляных пород на глубинах 1109–1135 м, а также исследуется состояние отдельных элементов геотехнической системы «крепь ствола – вмещающий массив горных пород». Диаметр ствола составляет 9 м. В работе представлены результаты исследований, связанные с оценкой нормальных смещений стенок шахтного ствола в направлении оси ствола. Максимально допустимое мгновенное нормальное смещение к оси ствола, согласно условию задачи, не должно превышать 5 мм. Кроме того, задачей моделирования является определение кратковременной прочности околоствольного массива горных пород. В качестве мер крепления массива предусмотрено использование анкерной крепи. Длина анкеров составляет 2 м. Проходка ствола выполняется поэтапно с шагом проходки, составляющим 5 м. Модельная схема решаемой задачи представлена на (рисунке 1). Физико-механические свойства горных пород, которые используются при выполнении модельных исследований, представлены в таблицах 1 и 2.

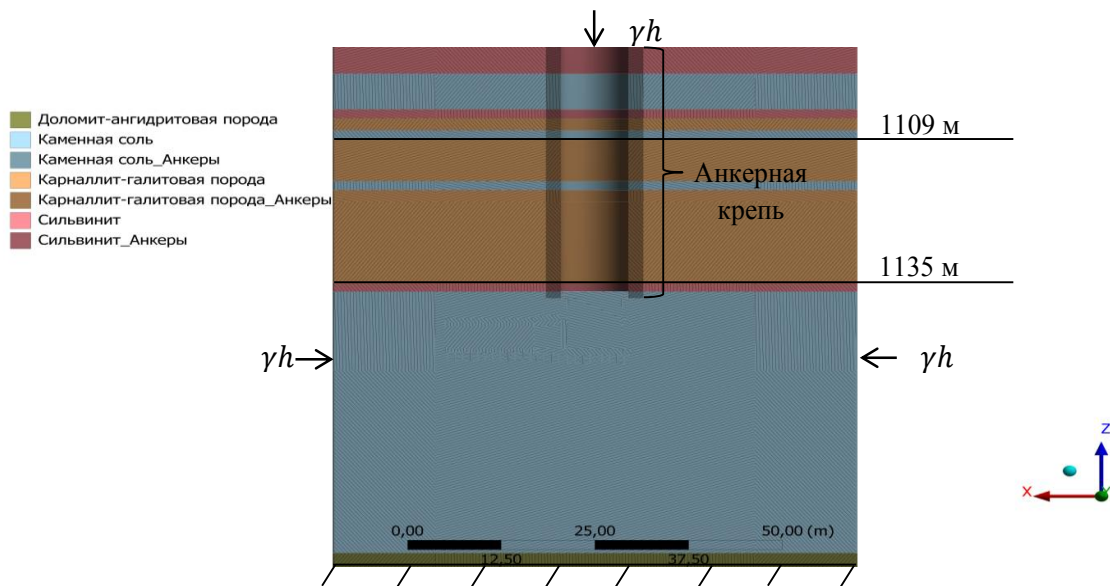


Рис. 1. Модельная схема решаемой задачи

Таблица 1 – Упругие свойства горных пород

Название породы	Плотность, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	Модуль упругости, МПа	Коэф. Пассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа
Сильвинит	2052	19085	0,21	2	37,2	2,8
Карналлит-галитовая порода	2280	24976	0,24	1,3	20,2	1,7
Каменная соль	2179	22797	0,19	1,8	22,8	2,9

Таблица 2 – Другие физико-механические свойства горных пород

Название породы	Угол внутреннего трения, град.	Структурное сцепление, КПа
Сильвинит	70	6,1
Карналлит-галитовая порода	61	3,1
Каменная соль	60	3,8

Основные гипотезы. Перед тем, как переходить к описанию модельной задачи, рассмотрим основные гипотезы и допущения, используемые при решении задачи. Для начала дадим определение понятию «большая глубина». В данной работе под большой глубиной мы понимаем глубину, на которой отношение структурного сцепления к соб-

ственному весу горного массива меньше или равно единице ($\frac{c}{\gamma h} \leq 1$). Глубины, на которых $\frac{c}{\gamma h} > 1$, считаются, соответственно, малыми [10].

Горизонтальное давление в массивах горных пород на малых глубинах считается по следующей формуле [10]:

$$P = \lambda \rho g h, \quad (1)$$

где $\lambda = \nu/(1 - \nu)$ – коэффициент бокового распора, ρ – плотность массива, g – ускорение свободного падения, h – рассматриваемая глубина.

При моделировании проходки на больших глубинах существенная разница заключается в том, что принимается $\lambda = 1$. Таким образом, на больших глубинах величина бокового давления значительно выше, чем на малых, и равна собственному весу породы на рассматриваемой глубине (массив находится в состоянии равномерного трехосного сжатия).

В рассматриваемом случае принимается, что слои породного массива считаются линейными изотропными средами.

По условию задачи в качестве мер крепления предусмотрено использование анкерной крепи по периметру ствола. Согласно проведенным ранее исследованиям [10], анкерная крепь может моделироваться путем увеличения модуля упругости и предела прочности околоствольного массива на сжатие в зоне действия анкеров (2 м).

Модельная задача. В качестве метода решения модельной задачи выбран численный метод конечных элементов (МКЭ). Следует отметить, что, хотя данная задача допускает построение аналитического решения [10], получение такого решения является весьма трудоемким процессом, особенно в упругопластической постановке с учетом образования поверхностей текучести в массиве. Применение численных методов позволяет значительно сократить время на решение задачи и получить результат с достаточной степенью точности.

Задача решается в упругопластической постановке с использованием закона Гука для изотропного тела (2) и модели Кулона-Мора (3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{E}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{E}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 + \frac{2C \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (3)$$

Здесь σ_1 и σ_3 – максимальное и минимальное главные напряжения соответственно, φ – угол внутреннего трения, C – структурное сцепление.

В качестве граничных условий задается нормальное внешнее давление величиной, соответствующей собственному весу вышележащих пород. Помимо этого к боковой границе модели прикладывается нормальное давление, рассчитываемое по формуле (1), с учетом того, что коэффициент бокового распора равен единице, поскольку на рас-

считываемом интервале $C \ll \gamma h$. Между слоями задается условие жесткого сцепления, поскольку взаимное скольжение слоев друг относительно друга не рассматривается. Кроме того, задача решается с учетом силы тяжести, что позволяет корректно учесть собственный вес массива (рисунок 1).

Несмотря на то, что по условию задачи требуется рассчитать прочность и оценить нормальные перемещения лишь в интервале 1109–1135 м, при моделировании рассматривался интервал 1095–1180 м. Таким образом, размеры модели составляют 85 м в высоту и 60 м в диаметре. Такой выбор размеров модели обусловлен тем, что это позволяет получить корректные поля распределений компонент НДС в массиве на всем интересующем нас интервале. В противном случае, если бы моделировался лишь интервал, обозначенный по условию задачи, граничные условия бы оказывали сильное влияние на компоненты НДС в массиве на границах модели, что, в свою очередь, негативно бы сказалось на точности решения поставленной задачи.

Задача решается последовательно с перестроением схем моделирования. На первом шаге рассчитывается начальное НДС нетронутого массива (до начала проходки). На данном шаге задача решается в полных напряжениях и полных перемещениях. Далее, НДС массива рассчитывается «пошагово» с учетом этапов проходки ствола. Под «этапом проходки» понимается пятиметровая проходка породной толщи с последующей установкой на пройденном интервале анкерной крепи. При этом задача решается в полных напряжениях и дополнительных перемещениях.

Результаты решения модельной задачи. На (рисунках 2–4) представлены некоторые результаты решения модельных задач.

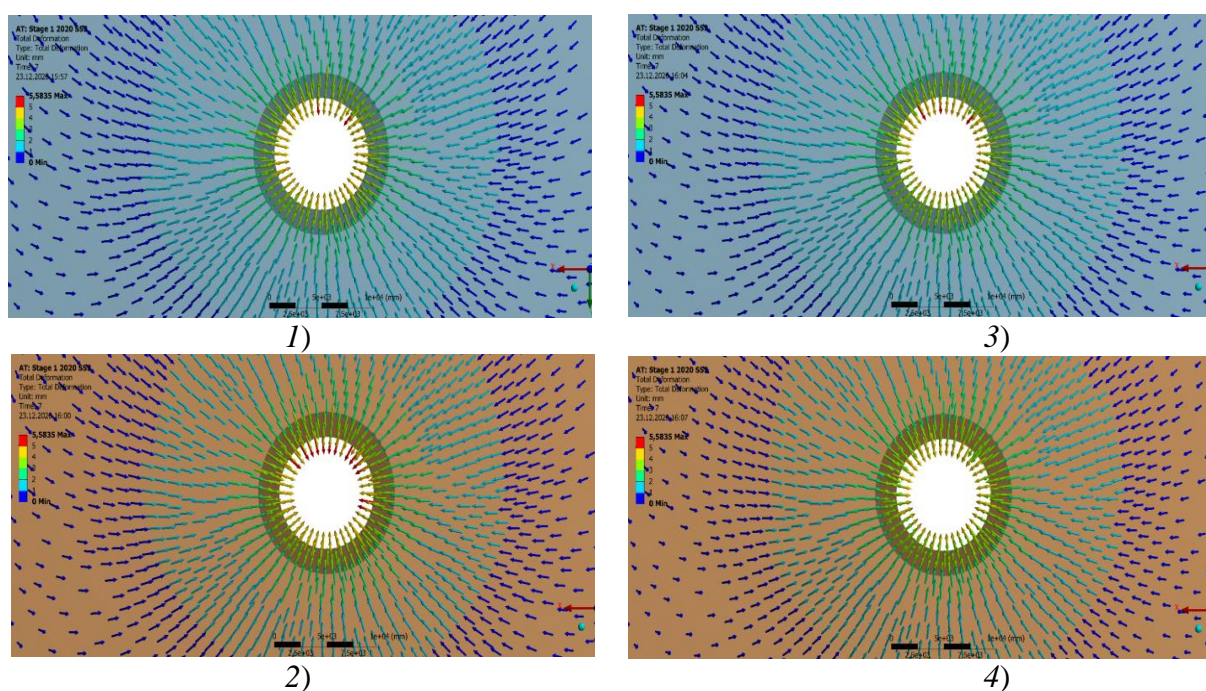


Рис. 2. Нормальные перемещения стенок ствола на различных глубинах: 1 – на глубине 1111,5 м в интервале залегания каменной соли, 2 – на глубине 1116 м в интервале залегания карналлит-галитовой породы, 3 – на глубине 1120 м в интервале залегания каменной соли, 4 – на глубине 1130 м в интервале залегания карналлит-галитовой породы

На (рисунке 2) приведены картины распределения нормальных перемещений некоторых слоев после проходки массива. На (рисунке 3) представлен график зависимости

сти нормальных перемещений от глубины. (Рисунок 3) характеризует прочность массива по критерию максимально допустимых нормальных перемещений [10]:

$$u_n \leq u_{lim}. \quad (4)$$

На (рисунке 4) представлены оценки прочности околоствольного массива согласно трем классическим теориям прочности.



Рис. 3. График зависимости нормальных напряжений от глубины

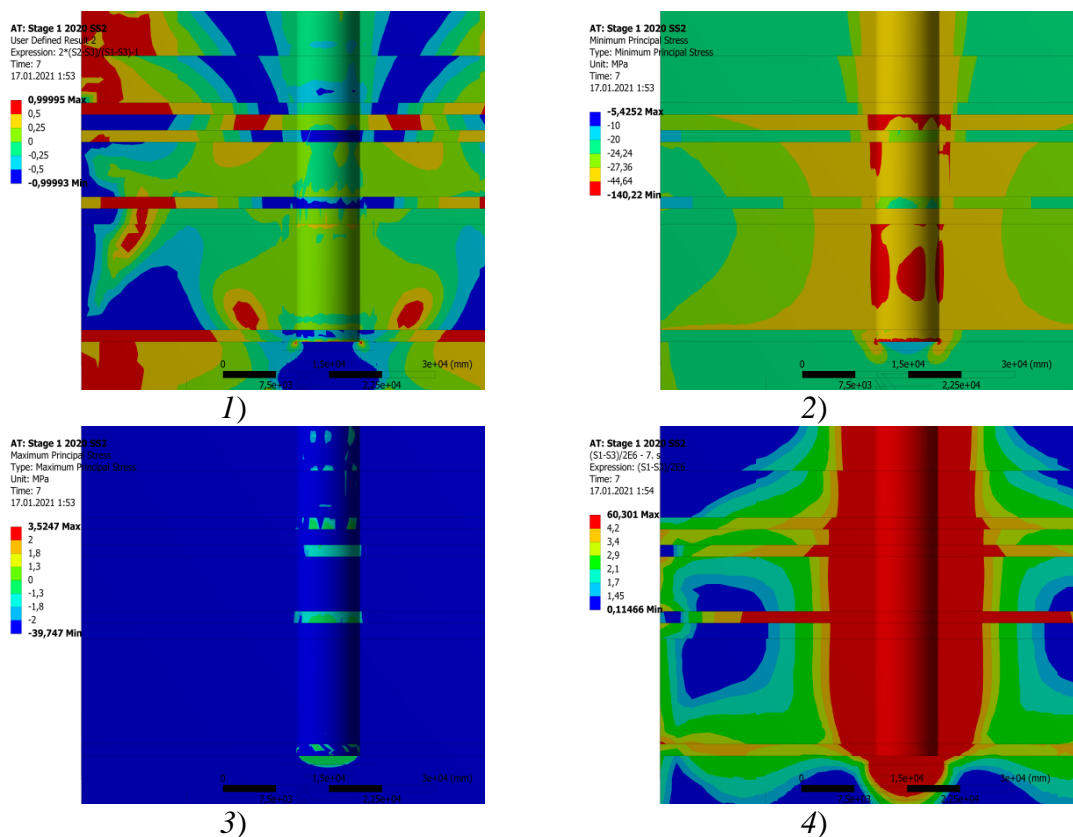


Рис. 4. Характеристики прочности массива по завершению всех этапов проходки: 1 – коэффициент Надаи-Лоде, 2 – по критерию сжимающих напряжений, 3 – по критерию растягивающих напряжений, 4 – по критерию сдвиговых напряжений

На (рисунке 4.1) представлено распределение коэффициента Надаи-Лоде в массиве, который позволяет определить тип НДС. Коэффициент Надаи-Лоде определяется следующей формулой:

$$\mu = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1. \quad (5)$$

Если значение коэффициента Надаи-Лоде $\mu \in [-1, -0.5]$, то имеет место состояние обобщенного растяжения (синие зоны на рисунке 4.1); если $\mu \in [0.5, 1]$, то имеет место обобщенное сжатие (красные зоны на рисунке 4.1); и, наконец, если $\mu \in [-0.5, 0.5]$, то имеет место обобщенный сдвиг (все остальные зоны на рисунке 4.1). После определение типа НДС производится оценка прочности массива по одному из следующих классических критериев, в зависимости от типа НДС в той или иной области околоствольного массива:

1. Критерий наибольших сжимающих напряжений [6]:

$$\begin{cases} |\sigma_3| \leq \sigma_c \\ \sigma_3 < 0 \end{cases}. \quad (6)$$

2. Критерий наибольших растягивающих напряжений [6]:

$$\begin{cases} |\sigma_1| \leq \sigma_t \\ \sigma_1 > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

3. Критерий наибольших касательных напряжений [6]:

$$\begin{aligned} \tau_{max} &\leq \sigma_{shear}, \\ \tau_{max} &= \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Заключение.

Построены модельные задачи и выполнены исследования НДС горнотехнической системы «крепь ствола – вмещающий массив горных пород», связанные с процессом проходки шахтного ствола в многослойном массиве соляных пород на глубинах 1109–1135 м. По результатам моделирования можно сделать вывод о том, что, согласно критерию максимально допустимых нормальных перемещений, разрушение околоствольного массива не происходит (рисунок 3). Анализ картины распределения коэффициента Надаи-Лоде показывает, что в массиве имеет место состояние обобщенного растяжения в интервалах залегания каменной соли и обобщенного сдвига на других интервалах в пределах рассматриваемых глубин (рисунок 4.1). Оценка состояния массива по соответствующим критериям в напряжениях показывает наличие значительных зон разрушения на всех слоях рассматриваемого интервала глубин (рисунок 4.2–4.4). Данный факт дополнительно подтверждает необходимость оценки прочности по различным критериям.

Кроме того, можно сделать вывод о том, что классические теории прочности не всегда точно оценивают прочность массивов горных пород, особенно на больших глубинах. Для оценки прочности горных пород следует пользоваться специальными геомеханическими критериями в напряжениях, описанными, например, в работах [5, 9 и др.], либо критериями в перемещениях, если известна величина максимально до-

пустимых смещений или деформаций массива в конкретном случае. Стоит отметить, что данная величина существенным образом зависит от решаемой задачи и типа подземного сооружения [10]. Величина максимально допустимых нормальных перемещений зачастую определяется на основе инженерных методик.

***Благодарность.** Работа выполнена в рамках НИР кафедры теоретической и прикладной механики БГУ №756/21 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники», ГПНИ «Конвергенция», задание 1.8.01.1.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Промышленность Республики Беларусь, 2020. Статистический сборник. / Нац. стат. комитет Респ. Беларусь; редкол.: И. В. Медведева [и др.]. – Минск: Национальный статистический комитет Республики Беларусь, 2020. – 52 с.
2. Журавков М. А., Оценка зон нарушения сплошности и разрушения в окрестности выработанного пространства М. А. Журавков, С. С. Хвесеня, С. Н. Лопатин // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2019. – Т. 6, № 2. – С. 103–107.
3. Zhuravkov M. A., Durability analysis of underground structures based on various creep models of the enclosing salt rock massif / M. A. Zhuravkov, S. S. Hvesenya, S. N. Lapatsin // E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 201. – 01007.
4. Konieczky H.. Failure criteria for rocks – an Introduction / H. Konieczky, M. A. Ismael. – Freiberg: Geotechnical Institute TU Bergakademie Freiberg, 2017. – 20 p.
5. Mehranpour, M. H Comparison of six major intact rock failure criteria using a particle flow approach under true-triaxial stress condition / M. H. Mehranpour, P.H.S. W.Kulatilake // Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources. – 2016. – № 2. – P. 203–229.
6. Gao, H. Discussion on strength criteria / H. Gao, Y. R. Zheng // Materials Research Innovations. – 2013. – Vol. 15. – P. 504-507.
7. Механика образования форм разрушения образцов горных пород при их сжати / Л. М. Васильев [и др.]; под ред. Л. М. Васильева. – Днепро: ИМА-пресс, 2018. – 176 с.
8. Норель, Б. К. Энергитические и временные критерии характеристики предельного состояния горных пород / Б. К. Норель, Ю. В. Петров, Н. С. Селютина. – Санкт-Петербург: СпБГУ, 2018. – 150 с.
9. Revuzhenko, A. F. Rock Failure Criteria Based on New Stress Tensor Invariants / A. F. Revuzhenko // Journal of Mining Science. – 2014. – Vol. 50, №3. – P. 437–442.
10. Компьютерное моделирование в геомеханике / М. А. Журавков [и др.]; под ред. М. А. Журавкова. – Мн.: БГУ, 2008. – 200 с.

Поступила: 26.02.2022

КОНТРОЛЬ СООРУЖЕНИЙ И МАШИН МЕТОДОМ ПАССИВНОЙ ИНФРАКРАСНОЙ ТЕРМОГРАФИИ

¹Мойсейчик Е. А., ¹Василевич Ю. В., ²Можаровский В. В., ¹Мойсейчик А. Е.,
³Неумержицкая Е. Ю.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

³Академия последипломного образования, Минск

Введение. Во всех структурных частях сооружений, машин и механизмов происходит потеря энергии, проявляющаяся через тепловыделение, связанное с деформированием элементов объекта и трением в его частях. Внешними признаками этого является нагрев узлов и деталей машин.

Нормальная работа сооружения, машины характеризуется установившимся режимом теплообмена между их элементами и наружной средой в процессе эксплуатации. При таком режиме работы количество выделяемого тепла равно количеству тепла, рассеиваемого элементами в окружающее пространство. Переход в аварийный режим работы характеризуется неустановившимся теплообменом и повышением поверхностной температуры T_n . Изменение T_n зависит от конструкции узла, наличия дефектов в нем, нагрузки на узел, температуры и других факторов среды и может изменяться в широких пределах.

Выделяющееся при деформировании тепло создает поле температур соответствующих изделий. Величины поверхностных температур можно рассматривать в качестве диагностического параметра для оценки технического состояния структурных частей, узлов и деталей. Для одних объектов температура и ее изменение напрямую количественно отображает внутренний процесс в контролируемом элементе (изменение напряженного состояния деформируемого элемента и др.), в других случаях (температура масла в узле машины, температура шины и т. д.) соответствующая зависимость имеет корреляционную природу. Так как нагретые тела излучают тепловую энергию в инфракрасном волновом диапазоне, то проявление соответствующих температурных поверхностных полей может производиться с использованием методов компьютерной инфракрасной термографии [1]. При этом температурные поля фиксируются дистанционно, в виде термофильма, а его отдельные кадры (термограммы) отображают распределение температуры точек поверхности в конкретный момент времени. Анализ температурных полей и сопоставление его результатов с данными конечно-элементного термомеханического расчета в ряде случаев приводит к значительному сокращению затрат на экспериментальные испытания. Такая технология теплового контроля позволяет достоверно выявлять опасные зоны в стальных изделиях, находить дефекты, контролировать их развитие, зарождение разрушения.

При компьютерных технологиях проектирования машин и сооружений значительную часть средств и времени занимают натурные испытания запроектированных объектов. К сокращению затрат ресурсов приводит замена натуральных испытаний виртуальными [2]. Виртуальные испытания производятся над моделями объекта, которые не являются полностью идентичными натурному объекту. Для обеспечения адекватности модели натурному изделию при ее создании можно использовать данные по адекватности отдельных элементов модели и объекта. Актуально приложение дистанционного теплового контроля при испытаниях опытных образцов машин, исследовании долговечности изделий [2], планировании ремонтов [3].

Целью настоящей статьи является демонстрация возможностей дистанционной инфракрасной термографии применительно к композитным элементам машин и стальным элементам конструкций.

Термография композитных элементов машин. Автомобильные шины являются наиболее ответственными деталями машин, обеспечивающими их активную безопасность. В процессе эксплуатации на шину действует сложная система динамических нагрузок, являющихся результатом взаимодействия дороги и автомобиля. Эти воздействия вызывают в элементах шины повторяющиеся большие перемещения и деформации. Для различного типа шин (легковые, грузовые, крупногабаритные) характерны индивидуальные типы нагрузок и условия их работы. Для легковых шин – высокие скорости движения и относительно небольшие нагрузки. Шины грузовых автомобилей воспринимают высокие нагрузки при длительном движении, предельные скорости движения и значительные температуры саморазогрева шины. Крупногабаритные и сверх крупногабаритные шины характеризуется предельными режимами нагрузок и воздействий. Автомобили с такими шинами предназначены для работы вне дорог с твердым покрытием (карьерные и др. дороги). При эксплуатации требуется учитывать особые условия их работы (ограничение скоростного режима движения, дополнительное время для остывания шин, повышенная вероятность порыва шин).

Конструктивно шина представляет собой предварительно-напряженную композитную конструкцию, состоящую из резиновых деталей разной жесткости и резинокордных слоев (каркас, брекер, усиливающие элементы).

В пневматических шинах существуют зоны концентрации напряжений (конструктивных, технологических, эксплуатационных). В этих заранее неизвестных зонах возникают усталостные дефекты, приводящие к преждевременным разрушениям в процессе эксплуатации. По данным [4] значительное число пневматических шин в процессе эксплуатации выходит из строя в результате усталостных разрушений (причины выхода: усталостные разрушения – 34 %; механические повреждения – 34 %; износ – 13 %; прочие отказы – 19 %).

Тепловое состояние шины при ее движении определяется многими факторами (размерами и геометрией рисунка протектора, упругими, гистерезисными, тепловыми характеристиками исходных материалов, внутренним давлением, вертикальной нагрузкой, скоростью, температурой окружающей среды и дороги, тепловыми характеристиками, шероховатостью и влажностью опорной поверхности) [5]. Температура шины оказывает значительное влияние на ее сопротивление качению и срок службы [5–7]. Нагрев шины при качении происходит в основном в результате внутреннего трения в элементах шины. Внешнее трение шины о дорожное покрытие также превращается в тепло и вызывает ускоренный износ протектора.

Анализ эксплуатации крупногабаритных шин показал, что основным критерием их работоспособности является температура разогрева каркаса, подканавки и протектора, которая при нормативных режимах эксплуатации карьерных автосамосвалов достигает 110–130 °С. Такая температура вызывает ускоренную термодеструкцию материала шин [4, 8].

На (рисунке 1) показано изменение температуры шин карьерного автосамосвала БелАЗ-75131 с пневматическими шинами размерности 3, зафиксированное дистанционным инфракрасным термометром Raytek-МТ6 с базовой погрешностью измерений $\pm 0,1$ °С [8].

Авторами работы [8] установлено, что при средней скорости движения автосамосвала $V_{cp} = 17$ км/ч и средней температуре окружающего воздуха $t_{cp} = 20$ °С наибольшее количество теплоты выделяется в середине брекерного слоя шины и на его краях, а общая величина теплообразования в шине распределяется по ее основным элементам

следующим образом: протектор (включая подканавочный слой) – около 50 %; каркас – от 12 до 33 %; брекерный слой – от 7 до 15 %; боковины и примыкающий к ним борт – от 5 до 25 %.

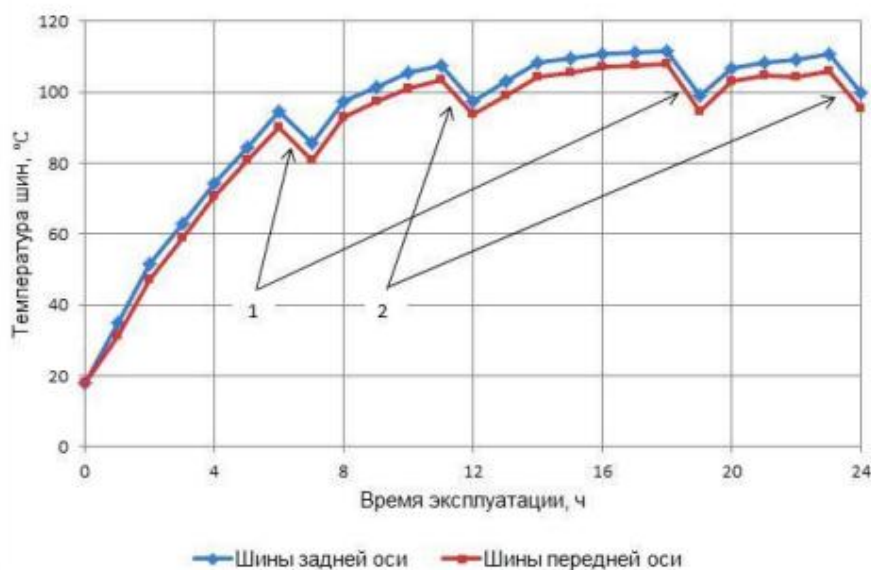


Рис. 1. Нагрев шин при эксплуатации карьерного автосамосвала БелА3-75131 [8]: 1 – перерыв на обед; 2 – перерыв на пересменку

Теплообразование при деформировании стальных изделий определяется механизмом и скоростью деформирования и физико-химическими процессами в зонах локализации деформаций.

Процесс теплообразования в стали при ее упругом, упруго-пластическом, пластическом деформировании и разрушении можно качественно отобразить схемой (рисунок 2). Теплообразование в стали (рисунок 2) изменяется от ее охлаждения (стадия 1) до заметного нагрева при развитии пластических деформаций (стадии 2, 3). При этом изменяется макроструктура стали, растет повреждаемость ψ (рисунок 2, а), в материале происходят экзотермические твердотельные физико-химические реакции, инициированные пластическим деформированием. При упругом деформировании (стадия 1) происходит охлаждение стали (не больше 1 °C). При этом линейная зависимость $\Delta T-\epsilon$ наблюдается при напряжениях σ , меньших предела пропорциональности σ_p . Выше σ_p начинаются отклонения от линейной зависимости, увеличивающиеся при напряжениях в стали, превышающих предел упругости σ_e (рисунок 2, б). Параллельно в выделенном объеме материала увеличивается число линий скольжения, в которых развиваются пластические деформации (рисунок 2, в). При напряжениях, превышающих предел текучести σ_y , линии скольжения заполняют весь выделенный объем. Работа пластического деформирования превращается в тепло и инициирует экзотермические физико-химические реакции в деформированном слое. Поэтому при деформировании выделенного объема (рисунок 2, в) изменение его средней температуры (ΔT_d) будет зависеть от стадии деформирования.

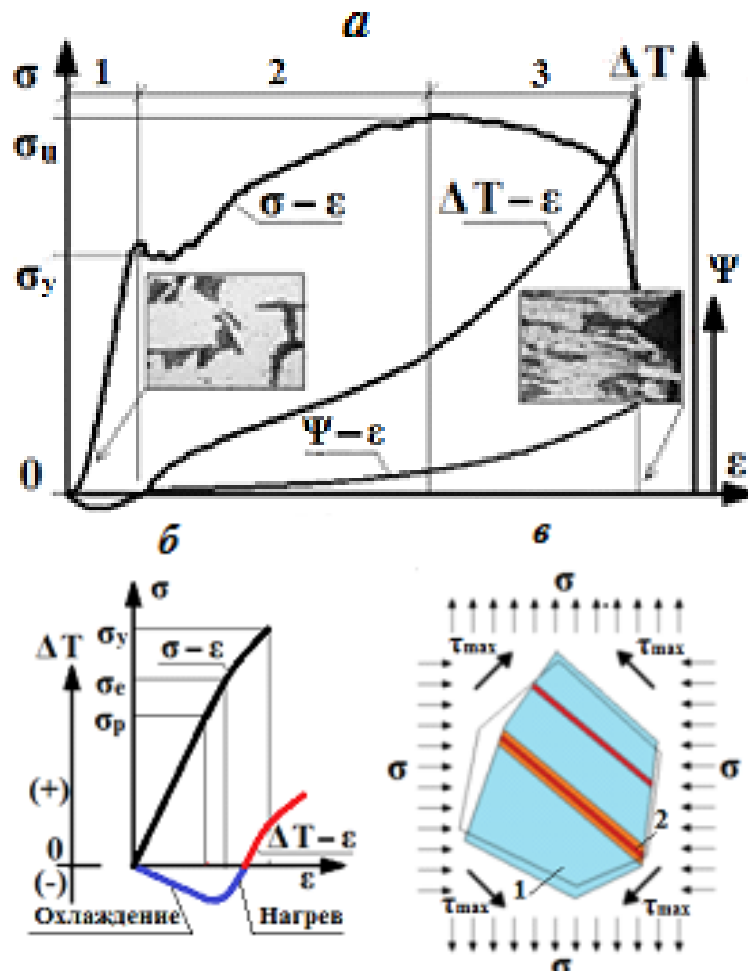


Рис. 2. Взаимосвязь между диаграммами растяжения, теплообразования, повреждаемости (а, б) и зоны охлаждения: а – диаграммы растяжения ($\sigma - \epsilon$), нагрева ($\Delta T - \epsilon$) и развития повреждаемости ($\psi - \epsilon$); б – нагрев–охлаждение при упругом деформировании (участок 1); в – участок стержня с зонами упругого охлаждения (1) и нагрева в полосе сдвига (2), (1, голубой цвет) и нагрева (2, красный цвет) контролируемого объема стального изделия

Если допустить, что доля пластически деформированного материала в выделенном объеме в текущий момент времени равна n , а упруго деформированного – $(1 - n)$, то ΔT_d определится по выражению

$$\Delta T_d = (1 - n) \cdot \Delta T_e + n \cdot (\Delta T_p + \Delta T_r), \quad (1)$$

где ΔT_e , ΔT_p , ΔT_r – соответственно, изменение температуры выделенного объема за счет упругой, пластической деформаций и экзотермических твердотельных физико-химических реакций. В первом приближении можно принять $n = 1$ (при $\sigma \geq \sigma_y$) и $n = 0$ (при $\sigma < \sigma_y$).

Изменение температуры деформируемых участков изделий в соответствии с формулой (1) происходит при возрастающей или убывающей во времени квазистатической, переменной, динамической нагрузке на изделие и при возникновении в нем внутренних тепловых источников, инициированных деформацией. Внутренние источники тепловой стимуляции могут действовать непрерывно или в отдельные периоды функционирования объектов пассивного теплового контроля. Наиболее часто это происходит в периоды пуска-наладки, испытаний, кратковременных технологических циклов и в аварий-

ных ситуациях. В такие периоды работы изделий в их элементах происходит диссипация энергии в форме тепла, а содержащиеся в объекте контроля дефекты становятся активными, выделяют или поглощают тепловую энергию, и их можно диагностировать в пассивном режиме. Отсюда следует, что диагностирование объекта контроля в пассивном режиме должно производиться при инициировании в нем тепловых источников в результате технологического функционирования и поэтому на него затрачивается меньше ресурсов, чем при активном режиме.

Особенности теплообразования и разрушения листовых элементов с дефектами [9–11]. Проследим развитие такого разрушения при термографировании растянутых образцов из стали Ст.3 с характерными для стальных строительных конструкций конструктивно-технологическими дефектами. Для этой цели конструкцию образцов в настоящем и следующих разделах принимаем такой, чтобы в процессе эксперимента полосы сдвига могли зарождаться у моделей дефектов. Размеры образцов и скорость их деформирования должны позволять фиксировать нагрев поверхности тепловизионным методом от начала приложения нагрузки до разрушения образца. В эксперименте образцы нагружались растягивающим усилием в машине «Р-100» с записью диаграммы «нагрузка-удлинение». Испытания и обработка данных проводились в соответствии с требованиями ГОСТ 1497. Деформирование образцов отображалось в термофильме компьютерным термографом «ИРТИС-2000», а результаты обрабатывались программным пакетом IRTIS. На рисунках 3–7 показаны виды образцов и кинетика изменения температуры их поверхности в процессе нагружения (при начальной температуре металла 7,6 °С).

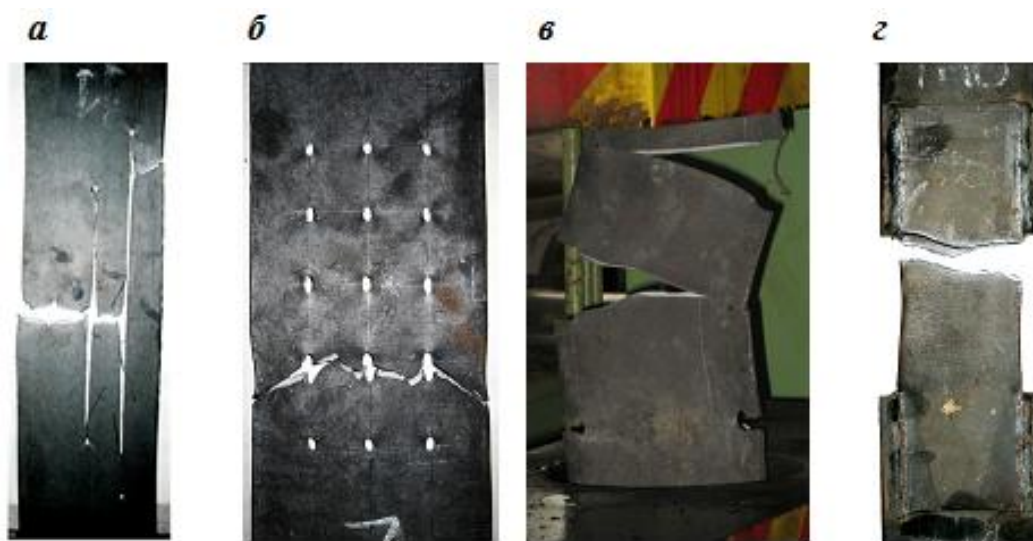


Рис. 3. Виды образцов *а, б, в, г* после разрушения

Пластины с отверстиями и продольными разрезами. На рисунке 4 представлены кадры термофильма образца из листа толщиной 10 мм, рабочая зона которого разделена продольными разрезами на три полосы (конструкция образца показана на рисунке 3, *а*). При этом наиболее узкая полоса с одной стороны ограничена свободной кромкой, образованной гильотинной резкой, а с другой стороны разрез выполнен на длину 300 мм. Средняя полоса ограничена с двух сторон разрезами. В третьей, наиболее широкой, полосе просверлено отверстие диаметром 4 мм.

На кадрах термофильма (рисунк 4) прослеживаются все стадии развития деформаций в образце. Отверстие приводит к частичному сковыванию деформаций. Видно, что пластины без отверстия нагреваются быстрее и до более высокой температуры. В

окрестности отверстия деформации развиваются под углом 35–40 °С к горизонтальной оси. К моменту зарождения разрушения полосы без отверстия имеют температуру поверхности, на 3–4 °С превышающую температуру рабочей зоны полосы с отверстием. Разрушение зарождается в полосе, ослабленной отверстием. После разрыва полосы с отверстием происходит дополнительный разогрев гладких полос и их разрушение. Из термограмм (рисунка 4) следует, что температура в наиболее нагретых точках монотонно растет в процессе нагружения, а в момент зарождения и развития разрушения она скачкообразно повышается примерно на 4 °С и после разрыва за доли секунды падает на (10–11) °С. Из эксперимента следует, что стержни различной податливости нежелательно включать по параллельной схеме в состав растянутых элементов стальных конструкций.

На рисунках, 3, б и 5 показана **пластина с группой отверстий** диаметром 8 мм. Аналогично этой пластине работают листовые элементы болтовых и заклепочных соединений. На кадрах термофильма (рисунок 5) прослеживается кинетика и особенности температурного поля поверхности образца при растяжении. Деформации в образцах этой формы развивались при нагружении с небольшим эксцентриситетом, что прослеживалось по растрескиванию окалины. При испытании образца было видно, что в предельном состоянии возникает два потенциально опасных сечения (наклонное и нормальное относительно растягивающего усилия). В двух наиболее нагретых точках (кадр 95, рисунок 5) температура повышается монотонно до зарождения трещины в их окрестностях, а в момент разрушения происходит скачок температуры поверхности на 10–25 °С (большая величина соответствует точке, ближе расположенной к очагу разрушения). В упругой стадии образцы на десятые доли градуса охлаждаются. Данные термографии и картина растрескивания окалины выявляют на поверхности образца полосы сдвига, имеющие более высокую температуру, чем примыкающий металл. Полосы сдвига разделяют образец на блоки с более низкой температурой, чем в полосе сдвига, т. е. сталь образца при деформировании приобрела неоднородность (деформационную анизотропию).

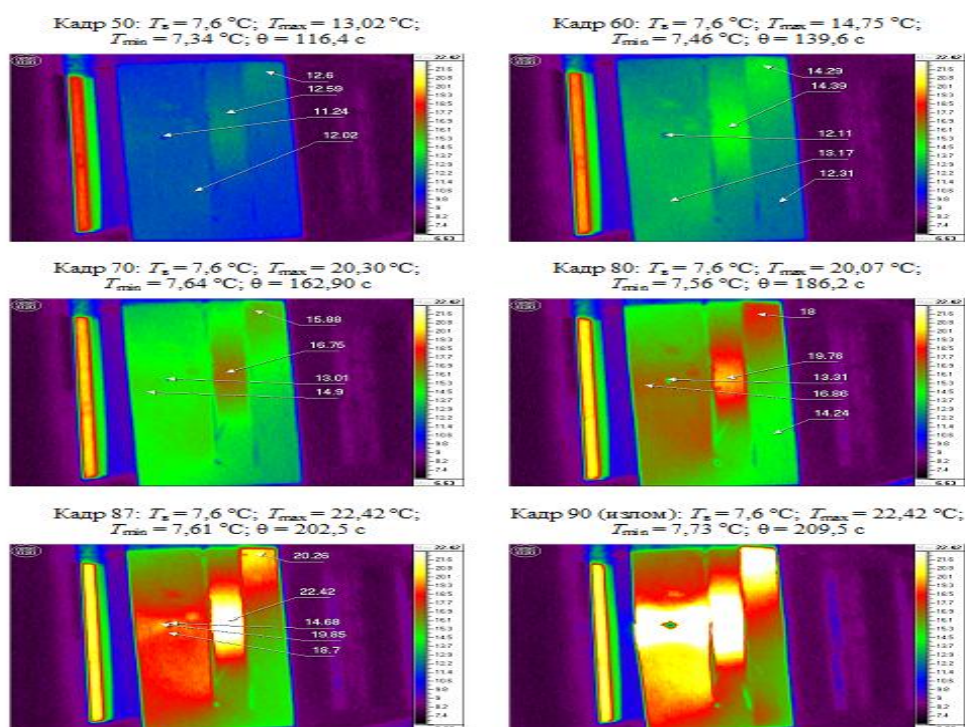


Рис. 4. Кадры термофильма растяжения образца (а), рисунок 3

Пластина с боковыми вырезами. Такая пластина толщиной 18 мм и данные ее термографии при растяжении показаны на (рисунок 3, в). В начальной стадии нагружения пластины изотермы приближались к окружностям, но с ростом растягивающих напряжений произошел лучеобразный «выброс» тепла к противоположному боковому вырезу. Моментальная температура поверхности достигает 70 °С. Разрушение происходит по ослабленному сечению, с хрупким изломом. После пересечения ослабленного сечения образца магистральной трещиной тепло волной рассеивается на упругие зоны образца. В отдельных точках поверхности наблюдался скачок температуры на 25 °С.

Кадры термофильмов нагружения образцов выявили, что в упругой стадии в материале образцов с боковыми надрезами зарождаются полосы сдвига, направление которых соответствует наибольшим сдвигающим напряжениям. Ширина полос росла с увеличением нагрузки. Полосы сдвига при деформировании являлись источниками теплообразования. При возникновении свободных поверхностей при росте зародившейся трещины температура поверхности образца значительно возростала.

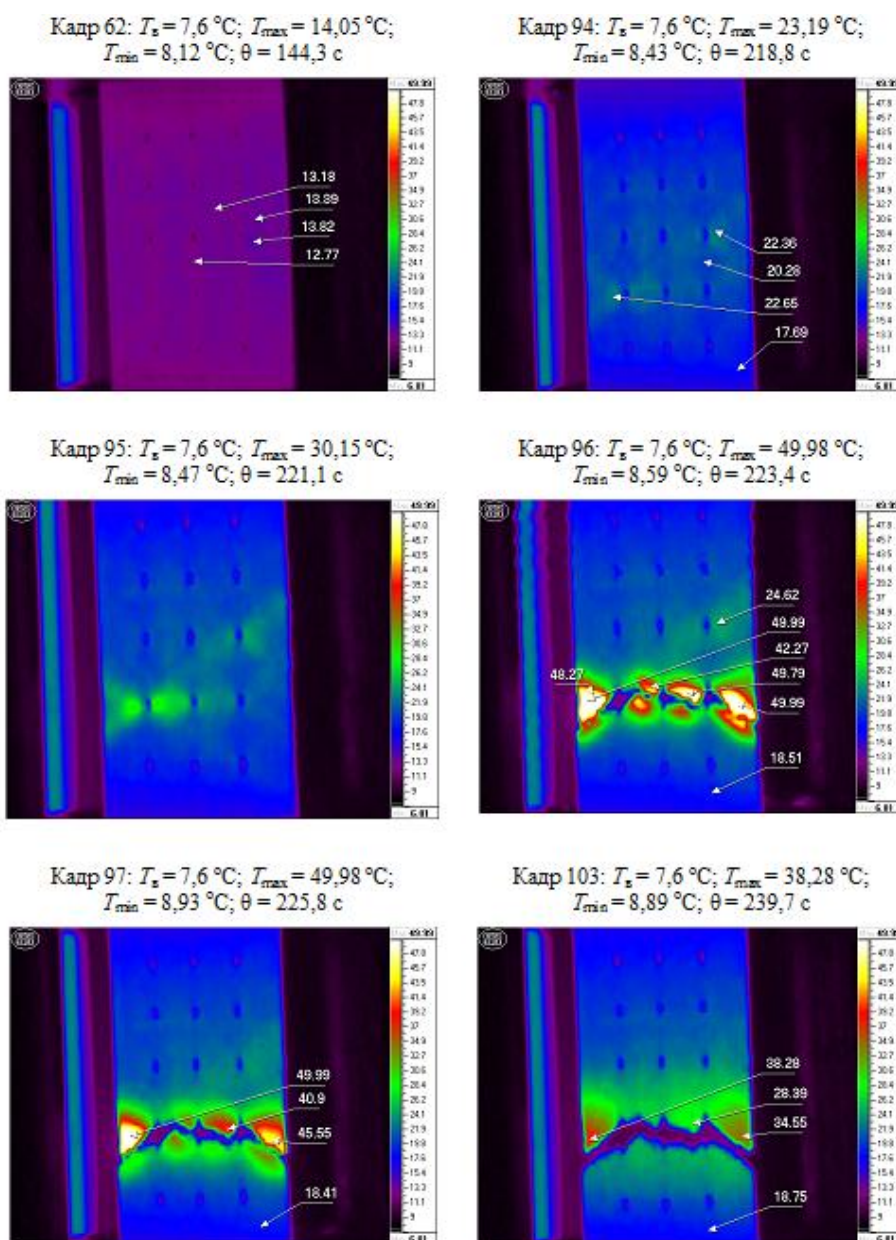


Рис. 5. Кадры термофильма растяжения образца (б), рисунок 3

При вязком разрушении образцов толщиной 6 и 12 мм с боковыми вырезами температура поверхности достигала в стадии долома 88 °С. Видимо, причиной такой аномалии температуры является недостаточное быстроедействие тепловизора. Приведенные кадры термофильмов показали, что при нагружении всех образцов происходило деформационное структурирование материала на блоки, размеры и форма которых определяются видом и расположением дефектов.

Квазихрупкое разрушение пластин с боковыми вырезами. Возможность появления вязкого, квазихрупкого или хрупкого изломов определяется напряженно-деформированным состоянием блока, в котором зародилась начальная трещина, и его тепловым состоянием (рисунок 6).

В образце, показанном на рисунке 6, разрушение начало развиваться сколом у надреза 6, а затем произошел хрупкий отрыв по сечению 3–4 с очагом в начальной трещине у дефекта 3.

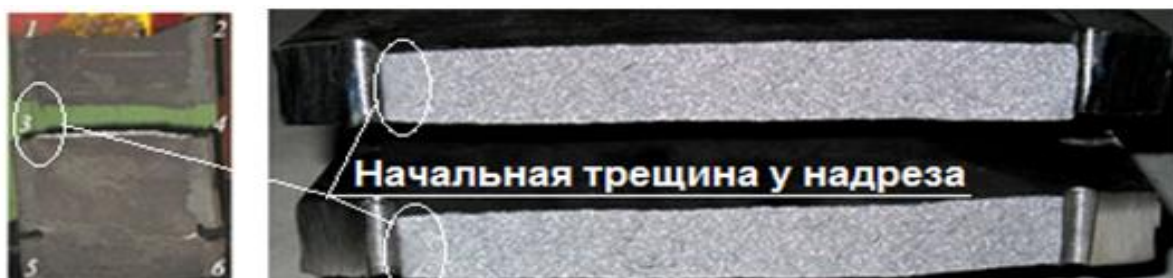


Рис. 6. Вид образца из стального листа толщиной 18 мм и его хрупкого излома

Распространение трещины произошло по диагонали 3–4 ромбовидного блока, ограниченного полосами скольжения (кадры 25–40, рисунок 7).

Быстрому развитию начальной трещины у надреза 3 (рисунок 6) предшествовал «проскок» полос деформирования от надрезов 6 и 2 к надрезу 3 и их наложение в окрестности начальной трещины у дефекта 3. Кадры термофильма (рисунок 7) показывают, что при хрупком разрушении повышение температуры в изломе значительно меньше, чем при вязком.

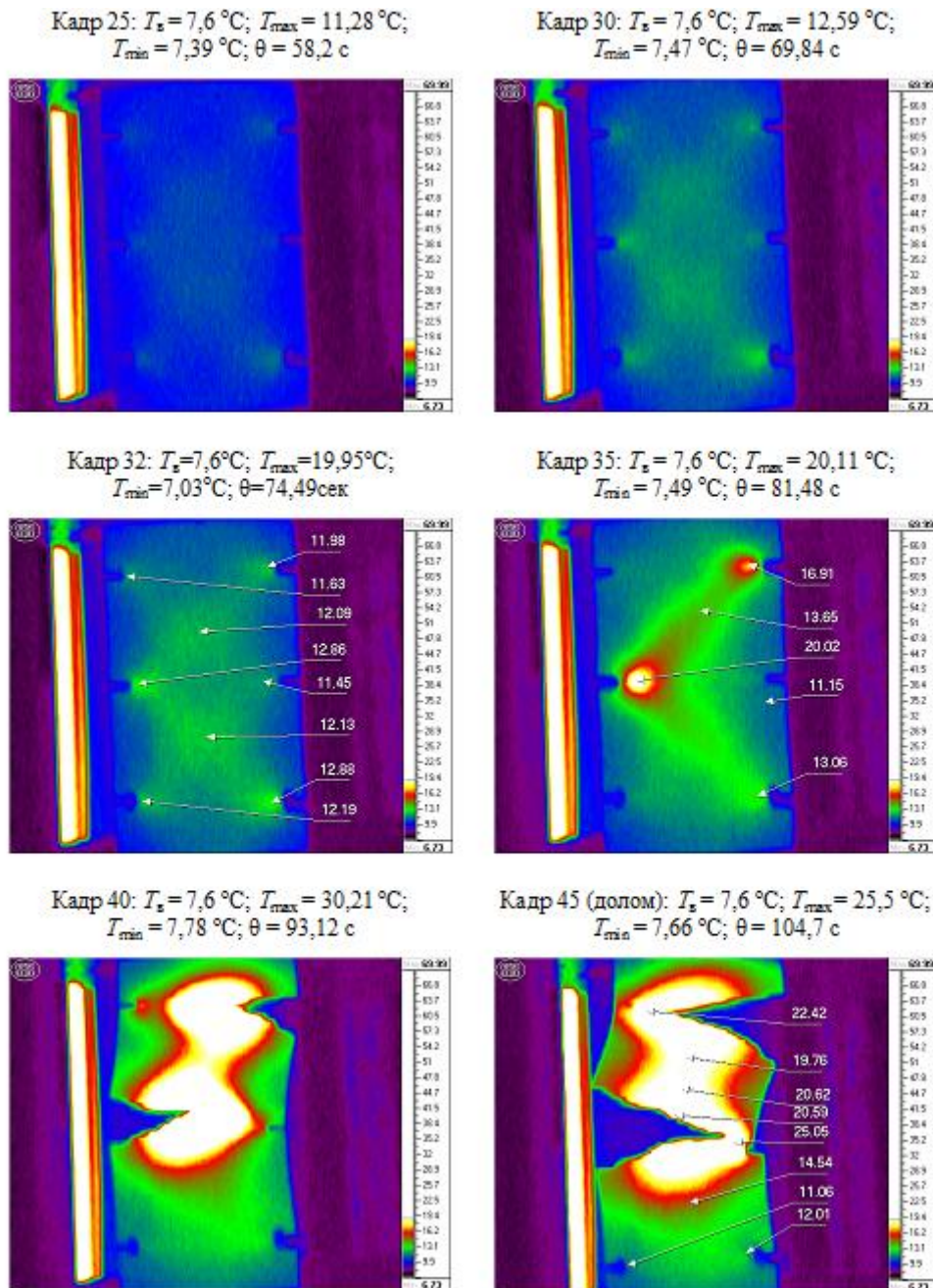


Рис. 7. Кадры термофильма растяжения образца (в), рисунок 3

Заключение.

1. Показано, что при работе композитных и стальных элементов сооружений и машин в них происходит деформационное теплообразование, отображением которого является температурное поле поверхности изделий.

2. Температурное поверхностное поле можно фиксировать и исследовать методами инфракрасной компьютерной термографии.

3. Величины поверхностных температур деформируемых элементов следует рассматривать в качестве диагностического параметра и использовать для оценки технического состояния структурных частей, узлов и деталей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов, В. П. Инфракрасная термография и тепловой контроль / В. П. Вавилов. – 2-е изд. – М.: Спектр. – 2013. – 575 с.
2. Высоцкий, М. С. Научное обеспечение компьютерного проектирования и виртуальных испытаний автотракторной техники/ М. С. Высоцкий, С. В. Харитончик, А. В. Шмелев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 3 (20) – 4 (21). – С.19 – 29.
3. Эксплуатация и ремонт крупногабаритных шин / Э. С. Скорняков, Э. Н. Кваша, А. А. Хоменя, В. П. Бойков. – М.: Химия, 1991. – С. 128.
4. Соколов, С. Л. Расчетно-экспериментальные методы исследования напряженно-деформированного состояния и циклической долговечности пневматических шин: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры / С. Л. Соколов // Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН. – М., 2011. – 56 с.
5. Кнороз, В. И. Работа автомобильной шины / В. И. Кнороз, Е. В. Кленников, И. П. Петров и др. – Под ред. В. И. Кнороза. – М.: «Транспорт». – 1976. – 238 с.
6. Стариков, В. М. Лабораторные исследования тепловых полей при деформации шины, взаимодействующей с твердой плоской опорой, при комбинированном нагружении / В. М. Стариков, Т. А. Тарасова // Молодой ученый. 2021. №21 (363). С. 45–49. URL: <https://moluch.ru/archive/363/81261>.
7. Dimitrov, Kalin. Thermographic analysis of tires during chassis dynamometer test / Kalin Dimitrov, Iliyan Damyanov // Proc. 27–th National Conference with International Participation "TELECOM 2019", October 30 – 31, 2019, Sofia, Bulgaria.
<https://yandex.by/search/?text=Thermographic+analysis+of+tires+during+chassis+dynamometer+test&clid=2411726&lr=157>
8. Горюнов С. В. Разработка методики прогнозирования долговечности крупногабаритных шин карьерных автосамосвалов: автореферат диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.05.06 / Горюнов С. В.// ФГБОУ ВО «КузГТУ им. Т. Ф. Горбачева». – Кемерово, 2021. – 24 с.
9. Moysychik, E. A. Analyzing patterns of heat generated by the tensile loading of steel rods containing discontinuity-like defects / E. A. Moysychik, V. P. Vavilov // International Journal of Damage Mechanics. – 2018. – Vol. 27. – Iss. 6. – P. 950–960.
10. Moysychik, E. A., Vavilov V. P., Kuimova M. V. Nondestructive testing of steel and constructions by using the phenomenon of deformation heat release // Journal of Nondestructive Evaluation. – 37 (2), [28]. DOI: 10.1007/s10921-018-0482-4.
11. Василевич, Ю. В. Расчетное обоснование использования свойств препрегов в условиях производства изделий из композиционных материалов / Ю. В. Василевич и др. // Избранные труды Всероссийской конференции по проблемам науки и технологий. – М.: РАН. – 2019. – 299 с.

Поступила: 26.02.2022

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СОЛЕОТВАЛА ИЗ ГАЛИТОВЫХ ОТХОДОВ В УСЛОВИЯХ СКЛАДИРОВАНИЯ ШЛАМОВ ГИДРОНАМЫВОМ НА ТЕЛО СОЛЕОТВАЛА

Николайчик М. А., Климкович Н. М.

Белорусский Государственный Университет

Введение. Известно, что при формировании солеотвалов используются в основном слабые грунты, которые, в свою очередь, могут использоваться в качестве основания только путем постепенного нагружения слоями отходов небольшой высоты. Наиболее подходящим способом такого нагружения является гидронамыв, поскольку при этом солеотходы растекаются по большим площадям, высота слоя может быть выбрана любая, обеспечивающая безопасность работ [1].

Технология гидронамыва состоит в следующем. Солеотходы на солеотвал попадают через конвейеры и сбрасываются в приемную воронку, расположенную на бровке солеотвала. В эту же воронку попадает рассол из рассолосборника. Образовавшаяся пульпа из воронки по лотку, установленному на откосе солеотвала, попадает в солеотвал. Солеотходы оседают, а рассолы стекают в рассолосборник, откуда снова идут на приготовление следующей пульпы. По мере намыва управление площадью намыва производят с помощью создания вала из намытых солеотходов, для чего обычно привлекаются бульдозеры [2].

На сегодняшний день привлечение численного и компьютерного моделирования при решении задач геомеханики и геотехнологии достаточно распространено, так как это позволяет выполнять большой объем численных операций и визуализировать результат для каждого элемента рассматриваемой математической модели [3]. Например, оценка прочности и устойчивости конструкций шламохранилищ при складировании жидких отходов и их последующей консолидации является актуальной задачей и нашла решение в области конечно-элементного моделирования [4].

Целью данного исследования являлась оценка возможности ведения работ по гидронамыву галитовых отходов на тело солеотвала без формирования шламохранилищ, огражденных системой дамб. При оценке напряженно-деформированного состояния исследуемой системы учитывалась консолидация намытых шламов с течением времени, а также фактическое состояние солеотвала на момент начала работ.

Постановка задачи. На свободную неровную поверхность упрочненных солеотходов (абсолютные высотные отметки варьируются от 217 до 256 м), расположенных на песке, который, в свою очередь, находится на упругом основании (рисонок 1), послойно намываются жидкие галитовые отходы. Сначала идет заполнение поверхности затвердевших отходов до ее самой высокой отметки 256 м (первый этап). Затем послойно намывается шлам высотой по 1,5 м под углом 45° к поверхности земли до отметки 271 м (второй этап).

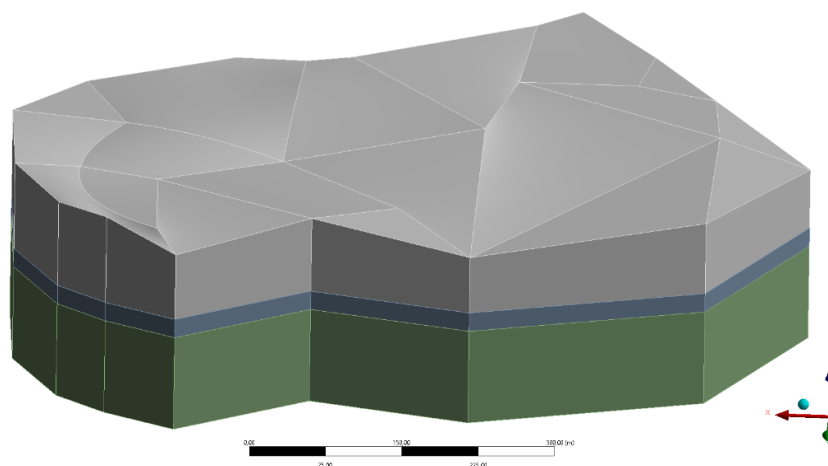


Рис. 1. Трехмерная модель солеотвала до намывки шлама

Геомеханическая модель рассматриваемой задачи сводится к изучению состояния поверхности затвердевших отходов в условиях намывки новых слоев шлама.

Физико-механические свойства намываемого и упрочненного шлама, а также песка и упругого основания отображены в таблице 1.

Таблица 1 – Физико-механические свойства материалов

Параметр	Намываемый шлам	Упрочненный шлам	Песок	Основание
Время упрочнения t , мес	0	Более 12	–	–
Модуль упругости, МПа	5	500	40,7	1000
Коэффициент Пуассона	0,49	0,3	0,4	0,4
Угол внутреннего трения, град	50	35,3	37,5	–
Структурное сцепление, МПа	0,01	0,764	0,0012	–
Предел прочности на сжатие, МПа	0,25	0,5–3,0	3,5	–
Плотность, кг/м ³	1300	2000	1840	2300

Граничные условия. Итак, основная цель исследования состоит в изучении НДС солеотвала при намывке новых слоев шлама. Все объекты исследуемой системы рассматриваются как линейно-деформируемые однородные тела. При решении предполагалось, что после упрочнения солеотходов имеет место полное сцепление ярусов по всем контактным поверхностям. Области сцепления намываемого шлама с упрочненными отходами также рассматривались в предположении жесткого контакта. Условие полного сцепления также реализуется между упрочненными солеотходами и слоем песка, а также между слоем песка и упругим основанием. Учитывалась последовательность намывки слоев в большом временном интервале и упрочнение предыдущих слоев к моменту намыва следующей партии отходов. Задача решалась в полных напряжениях, т. е. на каждом последующем шаге к напряжениям, вычисленным на текущем шаге, добавлялись напряжения, полученные на предыдущем шаге.

Упругое основание считается неподвижным на его нижней границе (условие жесткого закрепления). Граничные условия на боковой поверхности упругого основания, песка и упрочненных солеотходов принимаются в виде ограничения нормальных перемещений на данных поверхностях. Задача решалась с полем силы тяжести. Граничные условия расчетной модели представлены на рисунке 2.

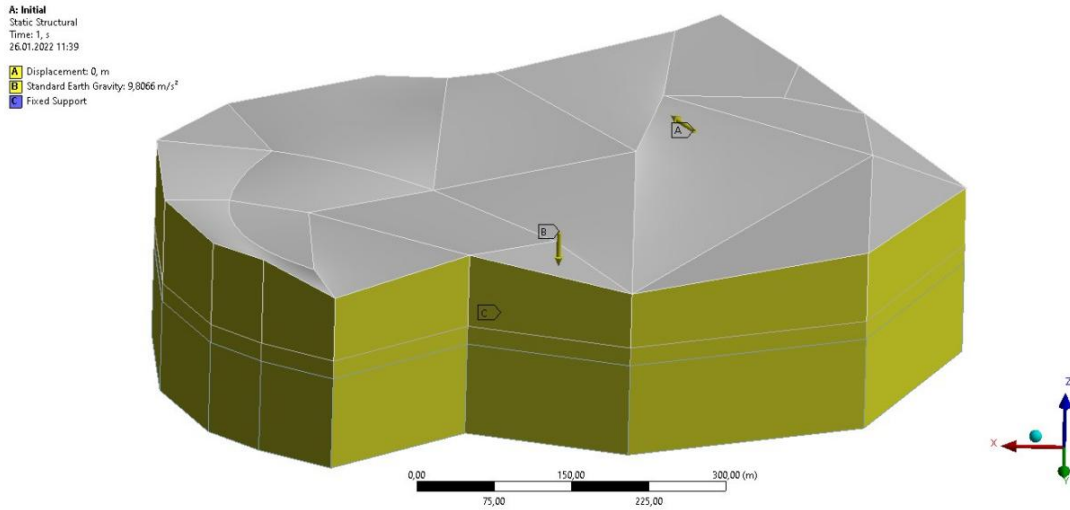


Рис. 2. Граничные условия при расчете начального НДС солеотвала

Оценка прочности. В качестве критериев для оценки прочности каждого узла конечно-элементной сетки использовались критерий прочности Кулона-Мора (1) [4] и энергетический критерий прочности (2) [3], которые в главных напряжениях записываются следующим образом:

$$\sigma_1 - (2\lambda + 1)\sigma_3 \leq \sigma_{press}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_{press}, \quad (2)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – соответственно максимальное, среднее и минимальное главные нормальные напряжения, $\lambda = \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$, φ – угол внутреннего трения пород, σ_{press} – предел прочности пород при одноосном сжатии.

Начальное НДС, заполнение поверхности затвердевших отходов до ее верхней отметки. При решении задачи на первом этапе необходимо провести расчет первоначального НДС солеотвала, а уже потом намываемых слоев шлама.

Исследовалось состояние солеотвала при намывке на его свободную поверхность шлама до его самой высокой отметки, составляющей 256 м. Оценивать результаты моделирования внутри модели будем в 4 характерных сечениях (рисунок 3).

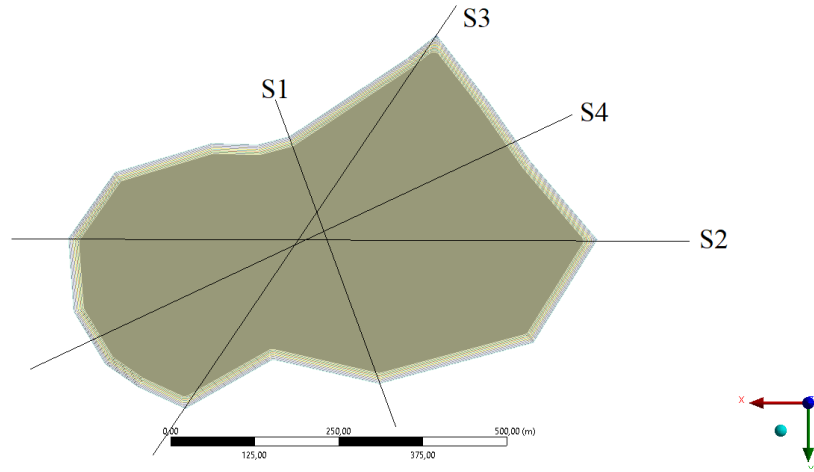


Рис. 3. Разбиение конечно-элементной модели на 4 сечения

На рисунках 4 и 5 в качестве примера приведены результаты моделирования для 1-го и 4-го сечений.

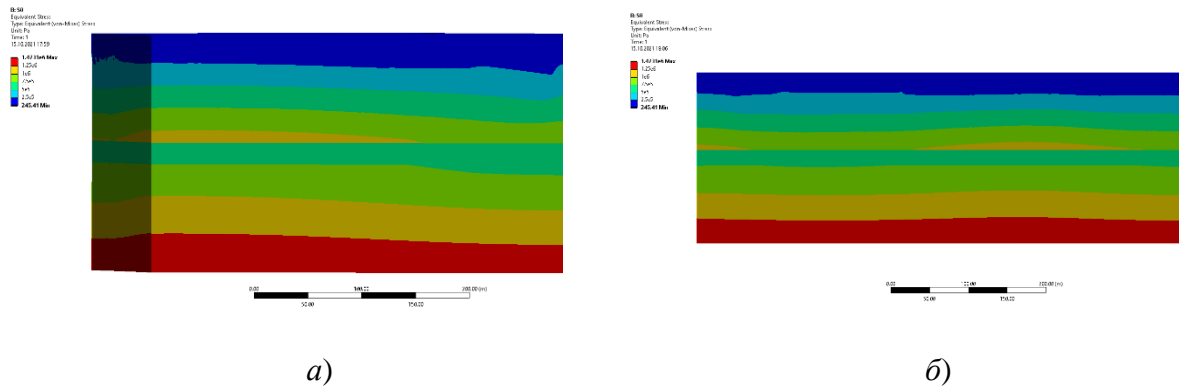


Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений после заполнения солеотвала шламом до отметки 256 м: *а* – для 1-го сечения; *б* – для 4-го сечения

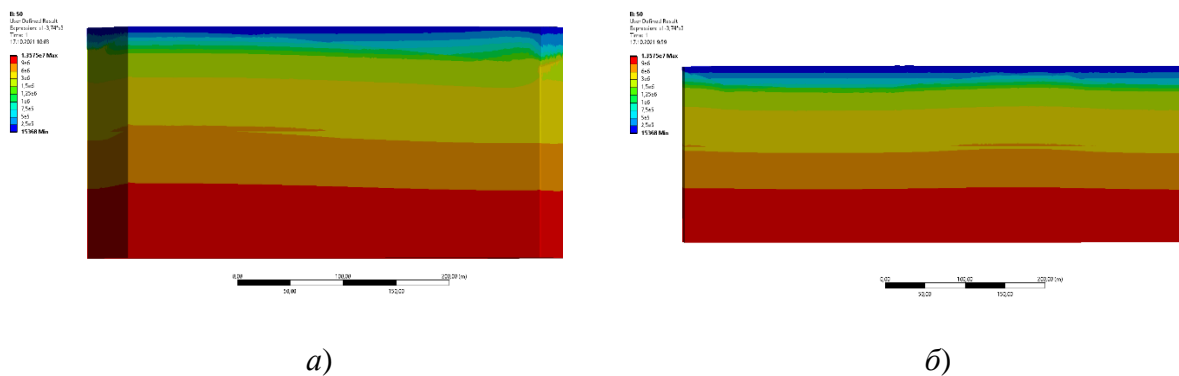


Рис. 5. Распределение характеристик прочности по критерию Кулона-Мора после заполнения солеотвала шламом до отметки 256 м: *а* – для 1-го сечения; *б* – для 4-го сечения

Результаты моделирования начального НДС солеотвала и после намывки на него шлама до его самой высокой абсолютной отметки 256 м. представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования начального НДС солеотвала и после его заполнения шламом до отметки 256 м

Параметр	До намыва	После выравнивания
Максимальное значение интенсивности напряжений, МПа	1,431	1,473
Максимальное значение характеристик прочности по Кулону-Мору, МПа	13,182	13,575
Максимальные вертикальные перемещения, м	0,74	1,36

На данном этапе моделирования видно, что, по принятым критериям для оценки прочности, в теле солеотвала зон предельного состояния не формируется.

Намывка до 5-го слоя шлама. Исследовалось состояние солеотвала при последовательной намывке на его верхний затвердевший слой отходов 5-ти слоев шлама высотой по 1,5 м. каждый до отметки 263,5 м. На рисунках 6 и 7 приведены результаты моделирования после намывки 5-го слоя для сечений 2 и 3.

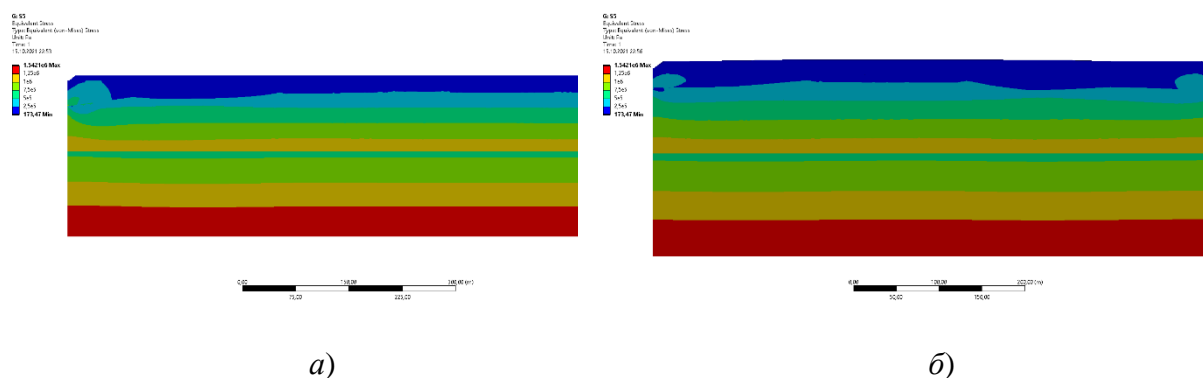


Рис. 6. Распределение интенсивности напряжений после намывки 5-го слоя шлама на солеотвал до отметки 263,5 м: а – для 2-го сечения; б – для 3-го сечения

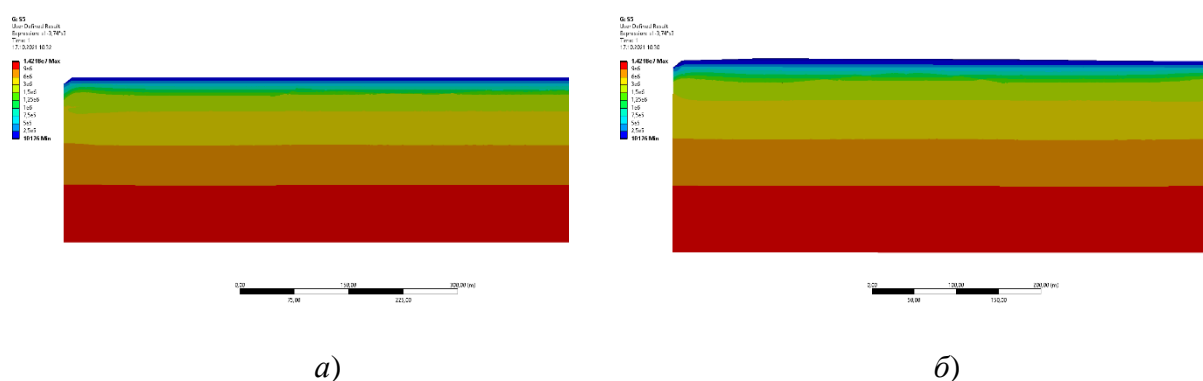


Рис. 7. Распределение характеристик прочности по критерию Кулона-Мора после намывки 5-го слоя шлама на солеотвал до отметки 263 м: а – для 2-го сечения; б – для 3-го сечения

Результаты моделирования намывки на солеотвал каждого из 5-ти слоев шлама приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты моделирования намывки до 5-го слоя шлама включительно

Параметр	1-ый слой	2-ой слой	3-ий слой	4-ый слой	5-ый слой
Максимальное значение интенсивности напряжений, МПа	1,5039	1,5138	1,5234	1,5328	1,5421
Максимальное значение характеристик прочности по Кулону-Мору, МПа	13,866	13,957	14,046	14,133	14,218
Максимальные вертикальные перемещения, м	0,11	0,014	0,014	0,013	0,013

Как следует из расчетов, максимальные значения интенсивности напряжений и характеристик прочности Кулона-Мора в солеотвале не достигают предела прочности, а значит можно говорить о том, что на данном этапе моделирования солеотвал способен выдержать вес вышележащих слоев шлама.

Намывка до 10-го слоя шлама. Рассмотрим состояние солеотвала при последовательной намывке на его поверхность еще 5-ти слоев шлама высотой по 1,5 м каждый до отметки 271 м. На рисунках 8 и 9 приведены результаты модельных расчетов после намыва и затвердевания на поверхности солеотвала 10-го слоя шлама для сечений 1 и 3.

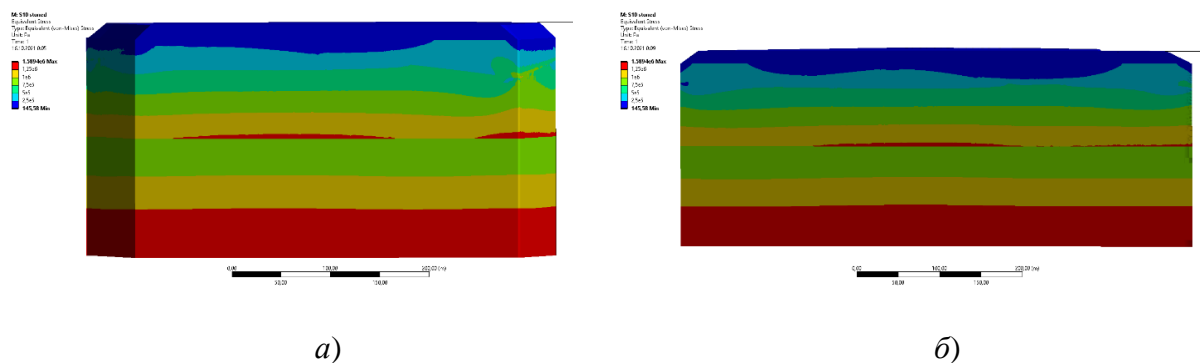


Рис. 8. Распределение интенсивности напряжений после затвердевания 10-го слоя шлама в солеотвале на отметке 271 м: *а* – для 1-го сечения; *б* – для 3-го сечения

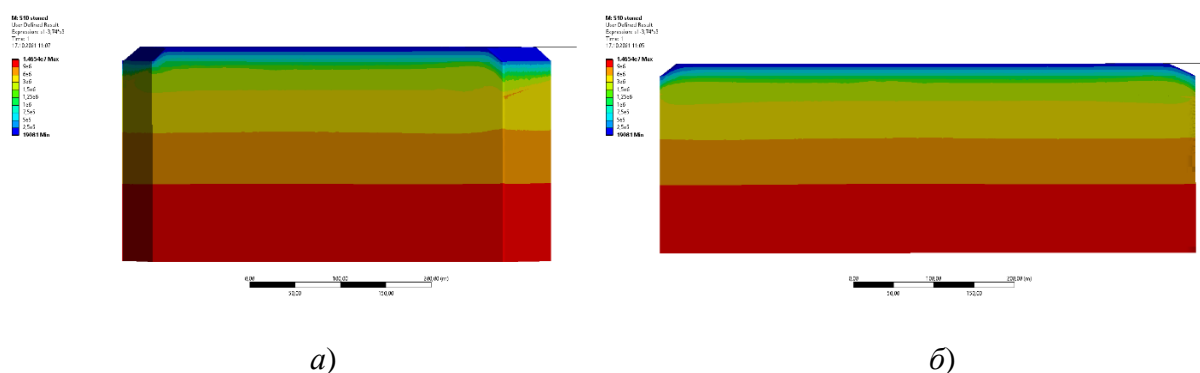


Рис. 9. Распределение характеристик прочности по критерию Кулона-Мора после затвердевания 10-го слоя шлама в солеотвале на отметке 271 м:
а – для 1-го сечения; *б* – для 3-го сечения

Результаты моделирования намывки на солеотвал 5-ти слоев шлама, начиная с 6-го по 10-ый, приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты моделирования намывки с 6-го по 10-ый слой шлама включительно

Параметр	6-ой слой	7-ой слой	8-ой слой	9-ый слой	10-ый слой
Максимальное значение интенсивности напряжений, МПа	1,5511	1,5599	1,5686	1,5771	1,5862
Максимальное значение характеристик прочности по Кулону-Мору, МПа	14,301	14,383	14,462	14,54	14,624
Максимальные вертикальные перемещения, м	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013

По результатам моделирования можно сделать вывод о том, что после намыва 10-ого слоя шлама на поверхности солеотвала предельное состояние не достигается. Рассмотрим динамику роста максимальных значений характеристик прочности Кулона-Мора, так как их значения наиболее близки к предельным значениям на сжатие, каждое значение отличается от предыдущего приблизительно на 0,08 МПа, откуда следует, что для достижения предела на сжатие необходимо намывать на поверхность солеотвала еще не менее 50 слоев шлама. Значит, на данном этапе моделирования, модель солеотвала будет иметь устойчивое неопредельное напряженно-деформируемое состояние.

Заключение. Рассмотрена задача исследования прочности солеотвала из галитовых отходов при последовательном гидронамыве на него 10-ти слоев шлама. Обобщенная оценка напряженно-деформируемого состояния системы «шлам-затвердевшие солеотходы-слой песка-упругое основание» определялась путем изучения максимальных значений интенсивности напряжений и характеристик прочности по Кулону-Мору в соответствии с энергетическим критерием прочности и Кулона-Мора.

Результаты исследования показывают, что данная конструкция солеотвала способна сохранять свое устойчивое состояние при намыве на него 10-ти слоев шлама при условии полного затвердевания намываемых слоев и условия жесткого контакта между всеми составляющими системы с коэффициентом запаса прочности не менее 2. При этом усадка (максимальные вертикальные перемещения) составят примерно 2,33 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кологривко А. А. Складирование глинисто-солевых шламов при расширении солеотваов на отработанных шламохранилищах // Известия ТулГУ. Науки о Земле. – 2016 – Вып. 2 – С. 23–27.
2. Борзаковский Б. А. Технология гидронамыва солеотвала на калийных предприятиях Верхнекамья // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006 – С. 191–195.
3. Компьютерное моделирование в геомеханике / М. А. Журавков, О. Л. Коновалов, С. И. Богдан, П. А. Прохоров, А. В. Крупоедов // Минск: БГУ, 2008 – С. 188–200.
4. Zhuravkov M. A., Zubovich V. S. Rock mass stability and shifting. People's Friendship University of Russia. Moscow, 2009. – 439 p.

Поступила: 30.01.2022

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ИЗ ПОЛИМЕРОВ И КОМПОЗИТОВ

¹Можаровский В. В., ¹Кузьменков Д. С., ²Василевич Ю. В.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский национальный технический университет, Минск

1. Современные подходы при создании математических и механических моделей расчета.

Совершенствование конструкций современной техники в строительстве сопровождается сменой конструкционных материалов. В различных технических системах на место традиционных металлов и сплавов приходят композиционные материалы. На современном уровне развития математических моделей расчета напряженно-деформированного состояния труб из композиционных материалов имеется обширная литература, но в то же время возникает необходимость создания новых компьютерных программ расчета. Таким образом, актуальность работы определяется применением в инженерной практике строительства труб из композиционных материалов и необходимостью разработки современных методов определения их напряженно-деформированного состояния.

Обычно анализ напряженно-деформированного состояния производится в предположении однородности механических, в частности прочностных, свойств материала конструкции или какого-либо изделия, или сооружения. Однако некоторые конструкционные, строительные и другие виды материалов являются неоднородными уже вследствие условий их изготовления. Так, неоднородность бетонов, пластмасс и металлов или сплавов возникает в результате неравномерности их созревания, полимеризации или остывания соответственно. В частности, непрерывная неоднородность механических свойств композитного материала возникает в сосудах и трубопроводах АЭС (корпуса реакторов, главные циркуляционные трубопроводы, трубы отвода и коллектора парогенераторов и другие), которые эксплуатируются в течение длительного срока службы под воздействием высокого внутреннего давления в высокотемпературных, коррозионных и радиационных условиях, что приводит к неоднородным механическим свойствам материала по толщине этих конструкций. Таким образом, актуальность работы определяется применением в инженерной практике строительства труб из композиционных материалов и необходимостью разработки современных методов определения их напряженно-деформированного состояния.

1.1. Обзор методов расчета цилиндрических труб из композитов.

Трубы из композиционных материалов широко применяются в трубопроводных системах, в том числе слоистые трубы, которые широко применяются в различных отраслях народного хозяйства. Расчет композиционных труб в основном строится по теории упругости анизотропного тела. В последнее время начали применять слоистые трубы из композиционных материалов. Создание и развитие новых расчетных методов для исследования напряженно-деформированного состояния труб из композитов с учетом их структурных особенностей, а также разработка на их основе автоматизированных программных комплексов, осуществляющих учет, контроль и диагностику трубопроводных систем различного назначения, способствуют повышению их безопасности и эксплуатационной надежности. Проведем краткий анализ современных исследований в области расчета цилиндрических труб слоистой структуры. Детальная разработка схем

и расчетов для композитов слоистых систем на основании теории анизотропной упругости дана в [3, 7, 10] и на основании теории слоистых систем – например, в [1, 2, 4–6, 15]. Пагано в [15] представил общее решение для анизотропного цилиндра в виде рядов Фурье. Расчет оболочки, нагруженной внутренним давлением и образованной намоткой полимерных пленок, рассматривается в [14]. Расчеты выполнены с использованием пакета MathCad. Группой авторов в [4–5, 8–12] проводился анализ расчета упругих напряжений в слоистых трубах. Проверка полученных результатов производилась с использованием коммерческих программ, реализующих МКЭ. Конечно-элементная программа ABAQUS использовалась в работах [4, 6]. В [4] представлены алгоритм и исследования распределения напряжений в трубах из слоистого композиционного материала, поведение волокнистого композиционного материала определялось на основе новых информационных технологий. В расчетных примерах рассматривались цилиндры, сосуды и резервуары цилиндрической формы [9]. Для разработки математических моделей используем математическую теорию упругости анизотропной среды, применяя концепцию макромеханики. При этом необходимо, при определении параметров расчета использовать характеристики материалов: объемное содержание волокон в матрице, модули упругости, коэффициент Пуассона и пределы прочности в разных направлениях.

В проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел и расчета слоистых конструкций из новых армированных полимеров можно выделить несколько важных аспектов:

- оценка влияния внешних воздействий (силовых, механических, воздействия температурных полей и т. д.) при производстве и эксплуатации трубопроводных систем слоистой структуры;

- использование в современных конструкциях новых композитов и армированных полимеров с учетом физико-механических характеристик материала, эксплуатационных условий функционирования исследуемых объектов;

- разработка современных систем оценки и диагностирования, прогнозирования состояния систем трубопроводов на базе новых компьютерных технологий.

2. Математические алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических труб из полимеров и композитов.

Рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре (математическая модель), заключенном в податливую оболочку, нагруженном внутренним давлением (рисунок 1). Внутренний слой (т. е. сам цилиндр) состоит из волокнистого материала. Необходимо определить НДС в слоистой трубе. На современном этапе развития техники все чаще в системе строительства теплоснабжения (рисунок 2.1) стали появляться трехслойные полимерные и композитные трубы, которые необходимо рассчитывать на НДС с учетом силовых, температурных, реологических и других факторов. В связи с этим, рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре, заключенном в податливую оболочку и полиуретановой теплоизоляцией, нагруженном внутренним давлением. аналогично [15], строим решение для трехслойной трубы.

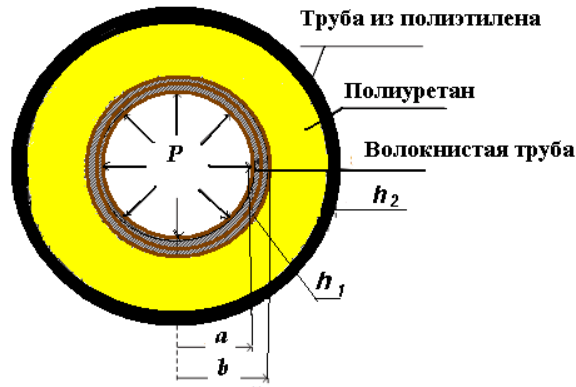


Рис. 2.1. Модель для расчета цилиндра в податливой оболочке под действием внутреннего давления

2.1. Волокнистый цилиндр в податливой оболочке под действием внутреннего давления. Алгоритм и программная реализация решения задачи.

Рассмотрим задачу о бесконечно длинном упругом цилиндре (математическая модель), заключенном в податливую оболочку, нагруженном внутренним давлением (рисунок 2.1). Внутренний слой (т. е. сам цилиндр) состоит из анизотропного материала. Примем, что поведение оболочки и наполнителя описывается уравнениями теории упругости. Для рассматриваемой задачи имеем уравнения: равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

геометрические

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad (2.1)$$

физические

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z; \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как материал цилиндра (т. е. внутреннего слоя) – волокнистый, то для него справедливы эти формулы. Здесь σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ – компоненты тензора напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат, a_{ij} – коэффициенты в законе Гука, $i, j = \overline{1, 3}$. На основании вышеприведенных уравнений, получим уравнение равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

Расчет напряжений в трубе из функционально-градиентного материала с податливой оболочкой и теплоизоляцией.

Так как материал цилиндра (т. е. внутреннего слоя) – функционально-градиентный, то для него справедлива формула [4, 16]:

$$E(r) = E_0 r^\beta, \quad -2 \leq \beta \leq 2.$$

Для упругой задачи связь между напряжением и деформацией имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta, \\ \sigma_\theta &= C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \left(\frac{E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta, \\ C_{12} &= \left(\frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta. \end{aligned}$$

Из решения уравнения равновесия найдем перемещение, а затем – и напряжения. Следует отметить, что для наполнителя и оболочки физические уравнения будут:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2G_1\varepsilon_r + \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= 2G_1\varepsilon_\theta + \lambda_1(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \end{aligned}$$

Здесь коэффициент λ для случая плоского напряженного состояния (ПНС) имеет вид $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-\nu)}$, а для плоского деформированного состояния (ПДС) – $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-\nu)}$. В дальнейшем будем иметь в виду, что G_1 и λ_1 относятся к материалу цилиндра, а G_2 и λ_2 – к материалу наполнителя и G_3 и λ_3 – к материалу оболочки, ν – коэффициент Пуассона. Таким образом, с учетом формулы (2.1), имеем:

для трубы наполнителя

$$\begin{aligned} u_r^1 &= A_1 r^{k_1} + B_1 r^{-k}, \\ \sigma_r^1 &= C_{11}\varepsilon_r^1 + C_{12}\varepsilon_\theta^1 = C_{11}(A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) + \\ &\quad C_{12}(A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}), \\ \sigma_\theta^1 &= C_{12}\varepsilon_r^1 + C_{11}\varepsilon_\theta^1 = C_{12}(A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) + \\ &\quad C_{11}(A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}); \end{aligned} \tag{2.2}$$

для наполнителя

$$\begin{aligned} u_r^2 &= A_2 r + B_2 \frac{1}{r}, \\ \sigma_\theta^2 &= (2G_2 + 2\lambda)A_2 + 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_r^2 &= (2G_2 + 2\lambda)A_2 + 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

для оболочки

$$\begin{aligned}
 u_r^3 &= A_3 r + B_3 \frac{1}{r}, \\
 \sigma_\theta^3 &= (2G_3 + 2\lambda)A_3 + 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2}, \\
 \sigma_r^3 &= (2G_3 + 2\lambda)A_3 + 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $m_{12} = \frac{1}{2}(-\beta \pm \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\nu^*})$, $\nu^* = \frac{\nu}{(1-\nu)}$, постоянные A_i, B_i определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned}
 u_{r/r=b}^1 &= u_{r/r=b}^2, & u_{r/r=b+h1}^2 &= u_{r/r=b+h1}^3, \\
 \sigma_{r/r=b+h1}^2 &= \sigma_{r/r=b+h1}^3, & \sigma_{r/r=a}^1 &= -p, \\
 \sigma_{r/r=b+h2}^3 &= 0, & \sigma_{r/r=b}^1 &= \sigma_{r/r=b}^2.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из граничных условий составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 6×6 для нахождения неизвестных коэффициентов $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$. Матричным методом решаем полученную СЛАУ. Определенные коэффициенты подставляем в уравнения (2.1) для нахождения напряжений и перемещений в трубе.

При расчете трубы из волокнистого материала аналогично решаем такую же задачу приняв закон Гука в виде (2.2), а перемещение будет

$$\begin{aligned}
 u_r^1 &= A_1 r^{k_1} + B_1 r^{-k}, \\
 \text{где } k &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}}, \quad A_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad A_{12} = \frac{-c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad A_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\
 c_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad i, j = \overline{1,2}.
 \end{aligned}$$

На основании исходных данных по формуле (2.4) определяем необходимые коэффициенты для случая волокнистого материала. Из граничных условий (2.5) составляем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения неизвестных коэффициентов $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$. Матричным методом (методом Гаусса или любым другим) решаем полученную СЛАУ. Полученные коэффициенты подставляем в уравнения (2.2–2.4) для определения напряжений и перемещений в трубе.

Разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет напряжений и перемещений для трубы в податливой оболочке с полиуретановой теплоизоляцией (материал цилиндра – волокнистый).

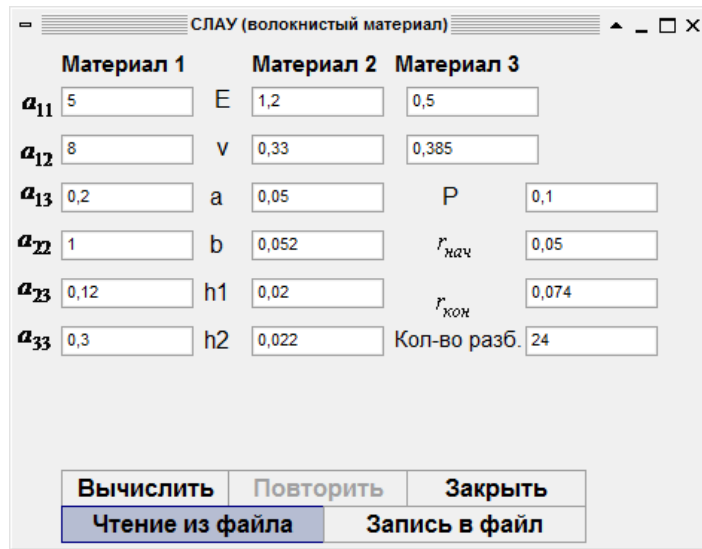


Рис. 2.2. Главное окно программы (для наглядного примера)

На рисунке 2.3 приведены результаты расчета тестового примера. Для граничных значений (на границе двух слоев) выводятся искомые характеристики для двух материалов. Также вывод результатов возможен и в графическом виде, по нажатию на кнопку «график» будет построен график зависимости $\sigma_{\theta}^{(k)}$, $u_r^{(k)}$ от r .

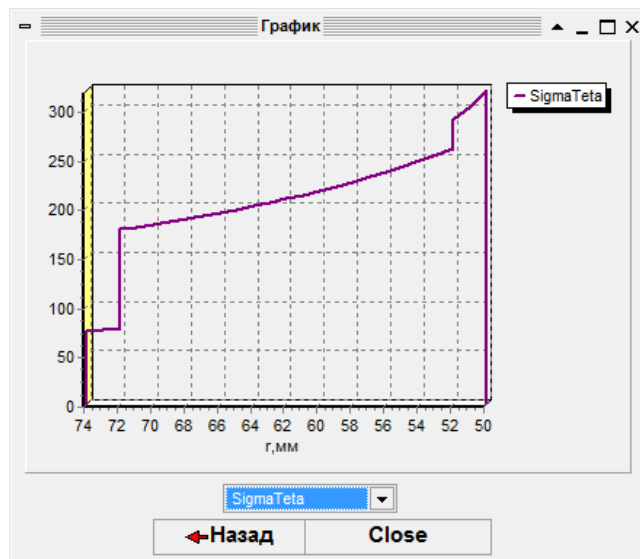


Рис. 2.3. График зависимости $\sigma_{\theta}^{(k)}$, от r

Основные напряжения $\sigma_{\theta}^{(k)}$ сконцентрированы в нижнем слое трубы; начиная с середины изоляции, перемещения $u_r^{(k)}$ резко затухают. Для полной картины исследования напряженно-деформируемого состояния конструкции трубы необходимо рассчитать τ_{\max} и эквивалентные напряжения.

3. Алгоритм определения численных результатов по расчету на прочность слоистых труб.

Рассмотрим многослойную трубу из композитных материалов. На трубу действует внутреннее давление p_0 . Необходимо определить напряжения и перемещения, воз-

никающие в многослойной трубе. При расчете НДС трубопроводов и систем трубопроводов из-за сложной геометрии и особенностей конструкционного строения стенок труб, а также в связи с необходимостью моделирования слоистых тел, применяется, конечно-элементный анализ в двухмерных постановках.

Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая расчет напряжений и перемещений многослойных труб из композиционных материалов. Программа реализована в среде Delphi в виде многооконного приложения. Реализована возможность записи и чтения из файла всех вводимых характеристик. Предусмотрена возможность выбора интервала по r и количества разбиений по r , просчитано множество различных примеров (различные материалы, давление и т. д.). Разбиение расчетной области, производится нерегулярной сеткой, треугольными конечными элементами. Увеличение количества конечных элементов (процедура дробления) в местах концентрации напряжений позволяет достичь наибольшей точности при расчетах. Разработанный программный комплекс позволяет свободно варьировать материалами покрытия труб и их характеристиками и показывает хорошие результаты. Программа не только определяет напряжения и перемещения слоистых труб, но и проверяет использованные в трубах материалы слоев ($E_x, E_y, G_{zz}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \alpha_x, \alpha_y$) на прочность.

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_{\text{пр}} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

где $\sigma_{\text{доп}}$ – допустимое напряжение.

После расчета всех напряжений и перемещений перед выводом результатов в табличном виде выводиться текстовое сообщение с информацией о том, подходит ли данный материал, исходя из допускаемого напряжения (рисунок 3.1).

Показатель	Требования	Расчет. значения	Результат
Плотность тепловой изоляции, кг/куб.м.	не менее 60	61.0000	Соответствует
Прочность ППУ при сжатии, МПа	не менее 0.15	0.1600	Соответствует
Водопоглощение ППУ, %	не более 10	10.0000	Соответствует
Объемная доля закрытых пор ППУ, %	не менее 88	90.0000	Соответствует
Прочность на сдвиг в оевом напр., МПа	не менее 0.12	0.1400	Соответствует

Вывод: Соответствует ГОСТу!

Рис. 3.1. Сравнение с ГОСТ

Описанную методику и разработанный программный комплекс можно легко применить на другие трубопроводные системы, использующие новые материалы (в том числе и композиционные).

Программная реализация.

Разработан алгоритм и создана программа (рисунок 3.2), реализующая расчет напряжений и перемещений многослойных труб из композиционных материалов.



Рис. 3.2. Главное окно программы

Заключение.

На основе новых информационных технологий разработаны численные методы расчета напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (в том числе трубопроводов) из новых армированных материалов, а также слоистых цилиндрических труб, находящейся под действием внутреннего давления с учетом влияния внешних факторов и процессов нагружения. Предложены алгоритмы вычисления напряжений в слоистой трубе, сделаны расчеты технических примеров. Предлагаемый программный комплекс может найти применение в машиностроении, энергетике при подборе материалов для конструкций с элементами в виде труб из композитов и полимеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел / В. И. Андреев. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2002. – 288 с.
2. Василевич, Ю. В. Математическое моделирование, экспериментальные исследования, расчет на прочность и жесткость труб и резервуаров из композиционных материалов с учетом неоднородности, анизотропии, концентраторов напряжений / Ю. В. Василевич, В. В. Можаровский // Сборник трудов V Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике, Минск, 26–28 октября 2011 г. // Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси. – Минск, 2011. – т. 2. – С. 4–8.
3. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела. / С. Г. Лепницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Можаровский, В. В. Реалізація розрахунку напружень багатосарових труб / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки. – Киев, 2015. – № 5. – С. 173–178.
5. Можаровский, В. В. Влияние дефекта (трещины) на напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы из композита / Можаровский В. В., Марьин С. А. // Материалы. Технологии. Инструменты. – Гомель, 2015.– № 2. – С. 19–25.

6. Можаровский, В. В. Создание и работа программного комплекса контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / Можаровский В. В., Марьина Н. А. // Информационно-компьютерные технологии 2010: материалы V Международной научной конференции, Житомир, 20–22 мая 2010 г. / Житомирский государственный университет. – Житомир, 2010. – С. 5–7
7. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
8. Bhaskar K. Three-dimensional analysis of a cross-ply cylindrical shell subjected to a localized circumferential shear force / K. Bhaskar, N. Ganapathysaran // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2002. – Vol. 79, Issue 7. – P. 519–524.
9. Gao X. L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory / X. L. Gao // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, Issue 23. – P. 6445–6455.
10. Hyer M. W. Hydrostatic Response of Thick Laminated Composite Cylinders / M. W. Hyer // Jnl.Reinforced Plastics and Composites. – 1988. – Vol. 7. – P. 321–330.
11. Kim Y. J. Reference stress based approach to predict failure strength of pipes with local wall thinning under single loading / Y. J. Kim, D. J. Shim, H. Lim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 194–201.
12. Mohareb M. Plastic interaction relations for pipe sections / M. Mohareb // J. Eng. Mech. ASCE. – 2002. – Vol. 128, Issue 1. – P. 112–120.
13. Mohareb M. Plastic resistance of pipe sections – an upper bound solution eb / M. Mohareb // J. Struct. Eng. ASCE. – 2003. – Vol. 129, Iss 1. – P. 41–48.
14. Shim D. J. Failure strength assessment of pipes with local wall thinning under combined loading based on finite element analyses / D. J. Shim, J. B. Choi, Y. J. Kim // ASME J. Pressure Vessel Technol. – 2004. – Vol. 126, Issue 2. – P. 179–183.
15. Pagano N. J. Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens / N. J. Pagano // Journal of Composite Materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 360–378.
16. Tutuncu N. Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu, M. Ozturk //Composites: – 2001. – Vol. 32 – P. 683–686.

Поступила: 30.03.2022

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

¹Степаненко Д. А., ²Бунчук К. А.

¹*Белорусский национальный технический университет*
²*РИУП «Научно-технологический парк БНТУ «Политехник»*

С учетом широкого применения ультразвуковой техники и технологии в инженерии, медицине, научных исследованиях и других сферах деятельности человека важными научно-практическими задачами являются разработка и совершенствование экспериментальных и теоретических методов определения эксплуатационных параметров ультразвуковых колебательных систем (УЗКС). Основными характеристиками УЗКС, которые необходимо учитывать при разработке и эксплуатации, являются собственные частоты колебаний и механическая добротность. Собственные частоты выбираются с учетом области применения УЗКС и требований к габаритным размерам, в частности, при разработке УЗКС для применения в хирургии правильный выбор рабочей частоты позволяет обеспечить селективность рассеяния биологических тканей в ходе операции, например, обеспечить рассеяние костной ткани при сохранении целостности нервных и сосудистых структур [1]. Повышение собственных частот позволяет снизить габаритные размеры УЗКС, что важно для практических приложений, требующих миниатюризации инструмента, таких как микрохирургия и сварка компонентов изделий микроэлектронной техники [2, 3]. Механическая добротность характеризует потери энергии в УЗКС, в частности, потери, связанные с тепловыделением в результате внутреннего трения: для достижения максимального КПД УЗКС должна обладать высокой механической добротностью. Механическая добротность связана с шириной резонансных пиков амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) УЗКС, что позволяет определять ее путем анализа АЧХ, полученной экспериментальным или расчетным путем. Увеличение механической добротности приводит к обратно-пропорциональному уменьшению ширины пиков АЧХ.

Собственные частоты колебаний и механическая добротность УЗКС обычно определяются путем анализа ее частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ) и круговой диаграммы проводимости с помощью анализаторов электрического импеданса, однако такой метод, несмотря на свою точность, быстродействие и простоту реализации, требует использования дорогостоящего оборудования и применим только для УЗКС, содержащих активные пьезоэлектрические или магнитострикционные элементы, осуществляющие преобразование электрической энергии в энергию механических колебаний. В качестве альтернативного метода, который является применимым для пассивных элементов УЗКС, в частности, волноводов и концентраторов, в данной статье рассматривается интегральный метод свободных колебаний (ИМСК). Данный метод является простым в реализации и не требует применения дорогостоящих измерительных приборов.

Основной областью применения ИМСК является неразрушающий контроль, где он используется для выявления внутренних дефектов технических объектов по изменениям собственных частот их колебаний [4, с. 125]. Суть метода состоит в возбуждении колебаний контролируемого объекта путем кратковременного ударного воздействия с широкой спектральной полосой частот, регистрации этих колебаний и их последующем

спектральном анализе. Частотные составляющие спектра ударного воздействия, соответствующие собственным частотам колебаний объекта, будут подвергаться резонансному усилению, что позволяет по зарегистрированной АЧХ колебаний объекта определить совокупность его собственных частот. Ударное воздействие может создаваться с помощью специальных инструментальных молотков для модального анализа, оснащенных встроенным датчиком силы, либо с помощью свободно падающих или приводимых в движение сжатым воздухом сферических ударных элементов [5–7].

Для оценки эффективности применения ИМСК для оценки эксплуатационных параметров УЗКС была рассмотрена задача определения собственных частот колебаний и механической добротности УЗКС с пьезоэлектрическим активным элементом, используемой для ультразвуковой микросварки (рисунок 1).



Рис. 1. УЗКС для ультразвуковой микросварки

Для проведения измерений УЗКС закреплялась на стойке в вертикальном положении с помощью предусмотренного в ее конструкции крепежного фланца. Ударная нагрузка прикладывалась к выходному сечению концентратора УЗКС с помощью шарика из закаленной хромистой стали ШХ15 радиусом 1,6 мм, свободно падающего по вертикальной направляющей, выполненной из стеклянного капилляра. Колебания УЗКС, возникающие в результате ударного воздействия, преобразовывались в электрический сигнал с помощью являющихся частью конструкции УЗКС пьезоэлектрических элементов, а электрический сигнал записывался с помощью запоминающего цифрового осциллографа. Форма зарегистрированного сигнала представлена на рисунке 2.

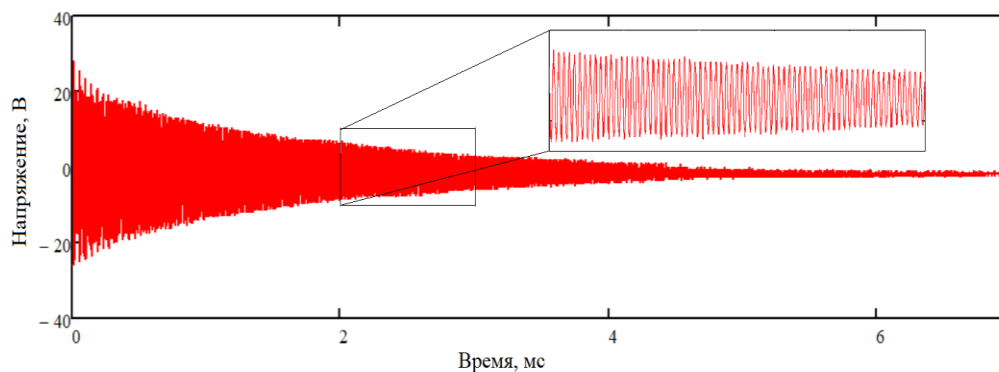


Рис. 2. Форма сигнала, генерируемого пьезоэлектрическим элементом УЗКС

Сигнал характеризуется экспоненциальным затуханием, скорость которого зависит от механической добротности УЗКС. На АЧХ сигнала (рисунок 3) наблюдается резонансный пик на частоте 71,7 кГц, соответствующей первой собственной частоте продольных колебаний УЗКС. Пики, соответствующие собственным частотам продольных колебаний высших порядков, не наблюдаются вследствие ограниченного частотного диапазона ударного воздействия.

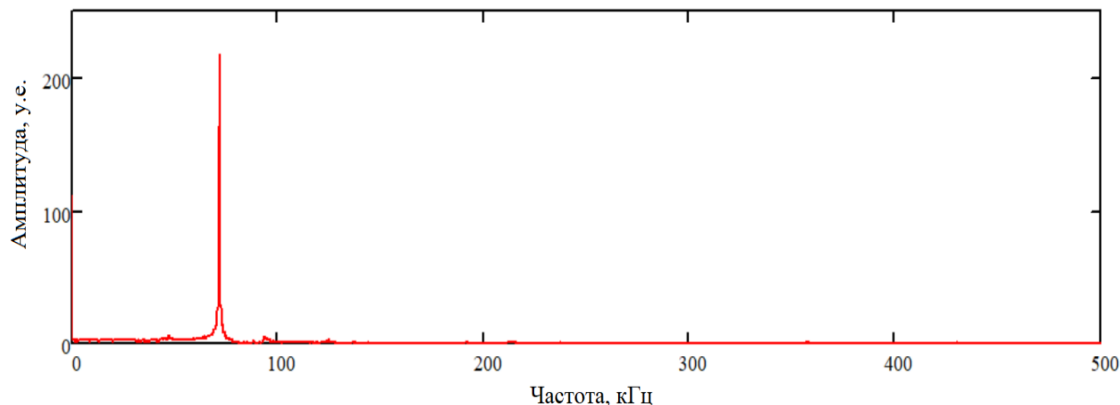


Рис. 3. АЧХ сигнала, генерируемого пьезоэлектрическим элементом УЗКС

Добротность УЗКС определялась путем выделения огибающей сигнала, генерируемого пьезоэлектрическим элементом, с последующей аппроксимацией ее формы экспоненциальной функцией: более подробное объяснение алгоритма расчета приводится далее при описании методики применения ИМСК для исследования кольцевых ультразвуковых концентраторов. Расчетное значение добротности УЗКС составило около 440.

Для проведения сравнительного анализа полученных результатов были определены АЧХ и ФЧХ той же УЗКС с помощью анализатора электрического импеданса PV80A (Wuxi MQ Ultrasonic Electrics, Китай) (рисунок 4).

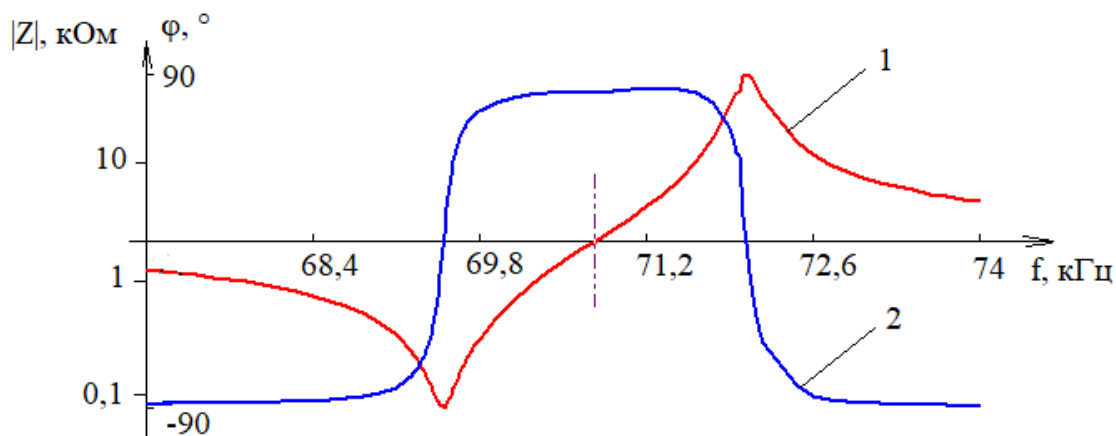


Рис. 4. АЧХ (кривая 1) и ФЧХ (кривая 2) УЗКС, зарегистрированные с помощью анализатора импеданса

Значение добротности, определенное с помощью анализатора импеданса, составило около 400, то есть отклоняется от значения добротности, определенного с помощью ИМСК, на 10 %. Значение собственной частоты колебаний 71,7 кГц, определенное

с помощью ИМСК, с высокой точностью (с погрешностью, не превышающей 0,5 %) соответствует частоте антирезонанса, определенной с помощью анализатора импеданса и составившей 72,0 кГц. Таким образом, из сравнительного анализа результатов измерений, проведенных двумя методами, можно сделать вывод, что ИМСК позволяет получать достаточно точные оценки эксплуатационных параметров УЗКС.

Так как, согласно полученным экспериментальным данным, ИМСК позволяет определять ограниченный набор собственных частот УЗКС, зависящий от частотного диапазона ударного воздействия, то была рассмотрена задача определения параметров ударного воздействия, обеспечивающих возбуждение колебаний УЗКС в заданном частотном диапазоне. Согласно разработанном Герцем теории соударения упругих тел длительность контакта при соударении сферического ударного элемента с упругим полупространством определяется выражением [8]

$$t_c = \frac{4,53r}{v_0^{0,2}} \left(\frac{4\rho(\delta_1 + \delta_2)}{3} \right)^{0,4}, \quad (1)$$

где r – радиус ударного элемента, ρ – плотность материала ударного элемента, v_0 – скорость ударного элемента в момент соударения, δ_1 и δ_2 – упругие параметры материалов ударного элемента и полупространства, связанные с их модулями упругости E_i и коэффициентами Пуассона μ_i выражением

$$\delta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i}. \quad (2)$$

Выражение (1) может быть использовано для приближенной оценки длительности контакта в случае, когда масса и радиус кривизны поверхности объекта измерения значительно больше соответствующих параметров ударного элемента.

Основным параметром, влияющим на длительность контакта, является радиус r ударного элемента: длительность контакта менее чувствительна к модулю упругости E_1 (твердости ударного элемента) и имеет малую чувствительность к скорости v_0 . На практике возбуждение колебаний в широкой полосе частот обеспечивают путем использования ударных элементов малого радиуса из твердых материалов, например, закаленной стали или рубина [5]. Временной профиль возникающей при ударе импульсной силы хорошо описывается полуволновой синусоидальной функцией [8]

$$F(t) = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right) \text{rect}\left(\frac{2t - t_c}{2t_c}\right), \quad (3)$$

где F_0 – амплитудное значение силы, $\text{rect}(\cdot)$ – прямоугольная функция.

Модуль спектральной плотности функции (3) (АЧХ ударного импульса) будет определяться выражением

$$|\tilde{F}(f)| = \frac{F_0}{\pi f_0} y\left(\frac{f}{f_0}\right), \quad (4)$$

где $f_0 = 1 / 2t_c$, а функция $y(x)$ определяется формулой

$$y(x) = \frac{1}{1-x^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right). \quad (5)$$

Путем построения графика функции $y(x)$ можно убедиться, что полуширина АЧХ ударного импульса на уровне -3 дБ составляет

$$\Delta f = 1,189f_0 = 1,189 / 2t_c. \quad (6)$$

Выражение (6) может быть использовано для оценки частотного диапазона ударного воздействия.

Одним из актуальных направлений развития ультразвуковой техники и технологии является разработка новых типов УЗКС. В частности, усиление колебаний по амплитуде может осуществляться как с помощью стержневых концентраторов в виде стержней с изменяющейся по длине продольной жесткостью, так и с помощью кольцевых концентраторов с изменяющейся по длине окружности изгибной жесткостью, преимуществами которых по сравнению со стержневыми концентраторами являются малые габаритные размеры и простота изготовления [9]. В заключительной части статьи рассматриваются особенности применения ИМСК для определения эксплуатационных параметров кольцевых концентраторов.

В отличие от УЗКС, представленной на рисунке 1, кольцевые концентраторы не имеют крепежных элементов, расположенных в узловой плоскости колебаний, в связи с чем при их испытаниях необходимо имитировать свободные граничные условия путем установки концентратора на подвесе в виде горизонтальной нити. Ударное воздействие создавалось с помощью шарика из стали ШХ15 радиусом 1,6 мм, свободно падающего с высоты 50 мм, что согласно формуле (6) обеспечивает возбуждение колебаний в частотном диапазоне $\Delta f = 53,6$ кГц. Для регистрации отклика концентратора при ударном воздействии использовался пленочный пьезоэлектрический датчик на основе поливинилиденфторида (ПВДФ) модели FDT1-052K (TE Connectivity, США), крепление которого обеспечивалось с помощью цианакрилатного клея. Общая толщина датчика составляет 85 мкм, что обеспечивает гибкость и возможность конформной установки датчика на поверхностях сложной формы. Основным достоинством датчиков на основе ПВДФ является широкий частотный диапазон, достигающий десятков МГц. Так как датчик измеряет усредненное по длине значение деформаций, то при их распределении по косинусоидальному закону разрешимыми будут являться только собственные формы колебаний, длина волны λ которых удовлетворяет условию $\lambda \geq 2L$, где L – длина активной части датчика, откуда можно определить порядок n собственных форм:

$$n \leq \left\lfloor \frac{\pi R}{L} \right\rfloor, \quad (7)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа, R – радиус цилиндрической поверхности концентратора, на которой закреплен датчик.

При $R = 22,75$ мм и $L = 30$ мм (стандартная длина датчика) получим $n \leq 2$, то есть датчик стандартной длины не способен к разрешению собственных форм колебаний высших порядков. В связи с этим стандартный датчик был укорочен до длины 5 мм, обеспечивающей разрешение собственных форм до 14-го порядка.

Схема конструкции опытного образца кольцевого концентратора, использованного при проведении исследований, представлена на рисунке 5.

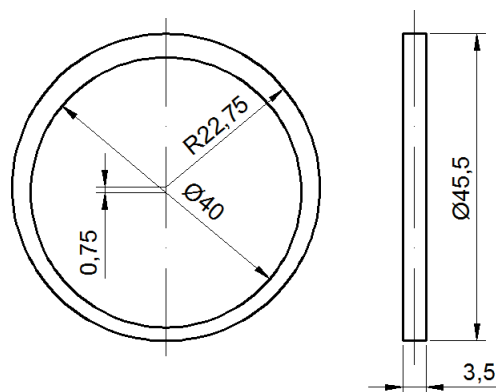


Рис. 5. Схема конструкции кольцевого концентратора

Вследствие эксцентричного взаимного расположения внешней и внутренней цилиндрических поверхностей концентратор имеет изменяющуюся по длине окружности изгибную жесткость и благодаря этому обеспечивает усиление колебаний по амплитуде.

АЧХ сигнала, генерируемого пьезоэлектрическим датчиком в ответ на вызванные ударным воздействием колебания концентратора, представлена на рисунке 6.

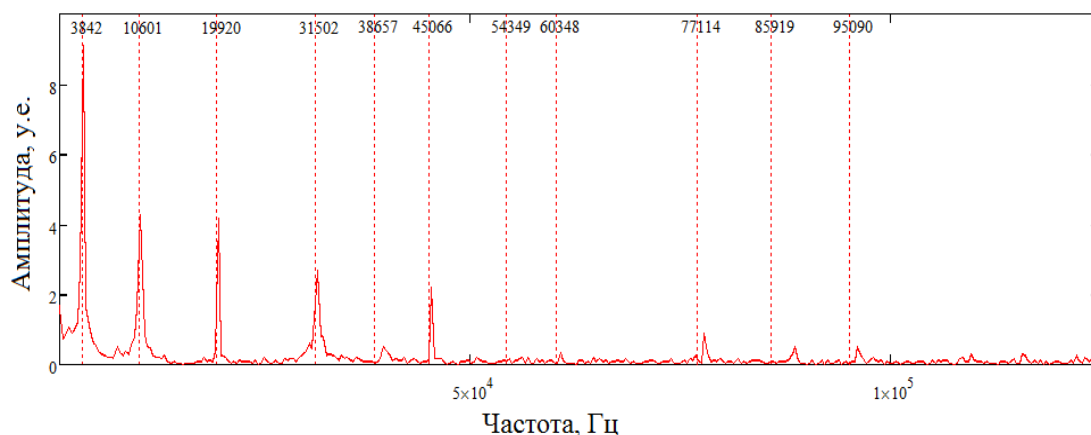


Рис. 6. АЧХ сигнала, генерируемого пьезоэлектрическим датчиком

Значения частот, указанные на рисунке и отмеченные вертикальными линиями, представляют собой теоретические значения собственных частот колебаний, определенные с помощью метода гармонического баланса. Относительное отклонение экспериментальных значений собственных частот от их теоретических значений составляет от 0,04 до 2,2 %.

В отличие от колебаний УЗКС, представленной на рисунке 1, колебания кольцевого концентратора имеют многомодовый характер, что проявляется в виде множества резонансных пиков на АЧХ. Каждая из собственных форм колебаний характеризуется своим собственным значением механической добротности, в связи с чем огибающая генерируемого датчиком сигнала не может быть описана с помощью единой экспоненциальной функции и имеет место так называемое мультиэкспоненциальное затухание колебаний. Для определения механической добротности для каждой из собственных форм колебаний использовался метод синхронной демодуляции, схема реализации которого представлена на рисунке 7.

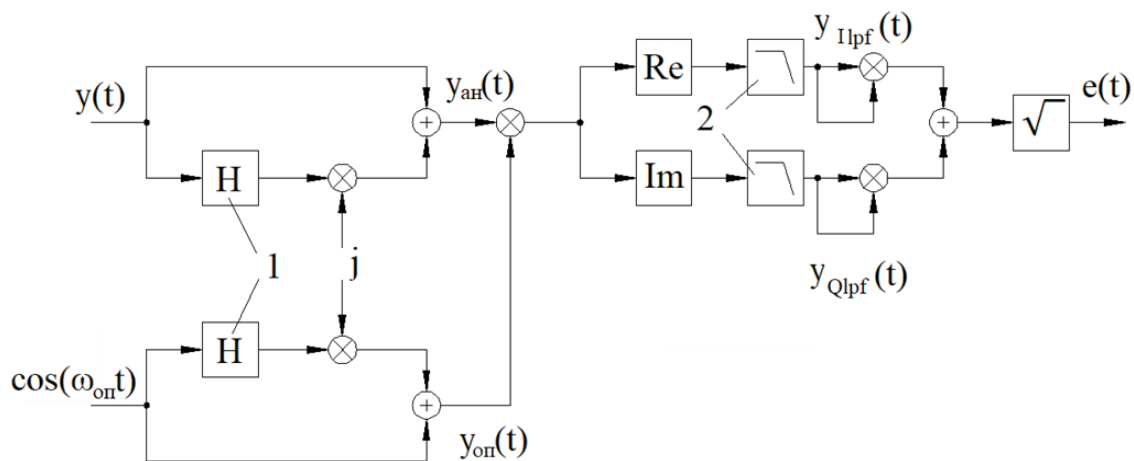


Рис. 7. Схема реализации метода синхронной демодуляции

Из сигнала $y(t)$, генерируемого пьезоэлектрическим датчиком, с помощью фильтра Гильберта 1 формируется комплексный аналитический сигнал

$$y_{\text{ан}}(t) = y(t) + \frac{j}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (8)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши, j – мнимая единица.

Затем аналитический сигнал умножается на комплексный опорный сигнал, мнимая часть которого является преобразованием Гильберта косинусоидального сигнала $\cos(\omega_{\text{оп}}t)$, круговая частота $\omega_{\text{оп}}$ которого должна быть как можно ближе по величине к одной из круговых собственных частот колебаний концентратора ω_k :

$$y_{\text{оп}}(t) = \cos(\omega_{\text{оп}}t) - j \sin(\omega_{\text{оп}}t). \quad (9)$$

Медленно меняющаяся составляющая произведения $y_{\text{ан}}(t) y_{\text{оп}}(t)$ определяется с помощью фильтров 2 нижних частот и позволяет рассчитать огибающую $e_k(t)$ частотной составляющей сигнала, соответствующей собственной частоте ω_k .

Для каждой собственной частоты колебаний определялась постоянная времени τ_k , характеризующая скорость затухания соответствующей ей составляющей сигнала, для чего производилась аппроксимация расчетной огибающей $e_k(t)$ экспоненциальной функцией

$$e_{\text{app } k}(t) = e_{0k} \exp(-t / \tau_k), \quad (10)$$

что равносильно линейной аппроксимации зависимости $\ln(e_k(t))$.

Добротность для k -й собственной формы рассчитывалась по формуле

$$Q_k \approx 0,5 \omega_k \tau_k, \quad (11)$$

справедливой при условии $\tau_k \gg T$, где $T = 2\pi / \omega_k$ – период колебаний.

Описанный алгоритм обработки сигнала был реализован в программе MathCad, а полученные с его помощью результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты расчета эксплуатационных параметров концентратора

Порядок моды колебаний	Собственная частота, кГц	Постоянная времени, мс	Добротность
1	3,86	64,4	780
2	10,61	15,3	510
3	19,96	11,1	700
4	31,61	12,6	1250

Как видно из таблицы, концентратор обладает высокими значениями добротности во всем исследованном диапазоне собственных частот.

На основе вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. ИМСК позволяет достаточно точно определять основные эксплуатационные параметры УЗКС без использования сложных и дорогостоящих измерительных приборов.

2. Показана возможность контроля диапазона регистрируемых с помощью ИМСК собственных частот колебаний путем изменения параметров ударного воздействия, в первую очередь радиуса используемого для возбуждения колебаний ударного элемента.

3. Разработана методика определения значений добротности, соответствующих каждой из собственных частот колебаний, при возбуждении многомодовых колебаний УЗКС, основанная на применении метода синхронной демодуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoigne, D. J. Piezoelectric osteotomy in hand surgery: first experiences with a new technique / D. J. Hoigne [et al.] // *Biomedcentral Musculoskeletal Disorders*. – 2006. – Vol. 7. – Article 36.

2. Lal, A. Silicon microfabricated horns for power ultrasonics / A. Lal, R. M. White // *Sensors and Actuators A*. – 1996. – Vol. 54. – P. 542–546.

3. Ланин, В. Л. Повышение качества микросварных соединений в интегральных схемах с использованием ультразвуковых систем повышенной частоты / В. Л. Ланин, И. Б. Петухов, Д. Мордвинцев // *Технологии в электронной промышленности*. – 2010. – № 1. – С. 48–50.

4. Алешин, Н. П. Методы акустического контроля металлов / Н. П. Алешин [и др.]. – М.: Машиностроение, 1989. – 456 с.

5. McLaskey, G. C. Acoustic emission sensor calibration for absolute source measurements / G. C. McLaskey, S. D. Glaser // *Journal of Nondestructive Evaluation*. – 2012. – Vol. 31. – P. 157–168.

6. Hosoya, N. Spherical projectile impact using compressed air for frequency response function measurements in vibration tests / N. Hosoya, J. Kato, I. Kajiwara // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2019. – Vol. 134. – Article 106295.

7. Liou, H. C. Investigation of polyvinylidene fluoride (PVDF) films in identifying high-frequency vibration modes of flexible plates / H. C. Liou, K. C. Chuang, C. C. Ma // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. – 2014. – Vol. 6, No. 6. – P. 1047–1058.

8. McLaskey, G. C. Hertzian impact: Experimental study of the force pulse and resulting stress waves / G. C. McLaskey, S. D. Glaser // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 2010. – Vol. 128, No. 3. – P. 1087–1096.

9. Степаненко, Д. А. Физико-математические и инженерные аспекты разработки новых типов ультразвуковых колебательных систем для применения в технике и медицине / Д. А. Степаненко, К. А. Бунчук // Приборостроение-2021: материалы Четырнадцатой междунар. науч.-техн. конф., Минск, 17–19 ноября 2021 г. / Редкол.: О. К. Гусев [и др.]. – Мн., 2021. – С. 13–15.

Поступила: 27.02.2022

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД МЕТОДОМ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

¹Поленов В. С., ²Чигарев А. В.

¹ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и
Ю. А. Гагарина», Россия

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Математически исследуется двухфазная зернистая среда при помощи сейсмоакустической эмиссии, возникающей в пластах двухфазных пористых коллекторов, первая фаза которого состоит из жидкости или газа, заполняющая промежутки между зернами и зернистой твердой фазы (вторая фаза). Зерна твердой фазы могут иметь любую конфигурацию. В таких средах механизм передачи усилия проявляется через контакты между зернами. В это случае предполагается, что микро-деформации и смещения твердой фазы малы и эффекты прочности твердой фазы проявляются в тензоре фиктивных напряжений. Жидкость первой фазы будем считать сжимаемой.

Предположим, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать, что обе среды сплошными и в каждой точке пространства будет два вектора смещения: вектор смещения жидкости и вектор смещения упругой компоненты.

Сейсмоакустическая эмиссия (САЭ) в зернистых пористых геологических средах возникает в результате быстрых структурных изменений в некоторых областях упругой компоненты (при пластическом сдвиге, изменении атомной структуры, появлении микротрещин и т. п.). Такие области в зернистой пористой среде будем называть очагами эмиссии (ОЭ). Происходящие в ОЭ структурные изменения чаще всего не нарушают макроскопической сплошности остального объема твердой фазы, однако в окрестности очага при этом возникают по времени сигналы (внутренние напряжения), действие которых и приводит к появлению сейсмоакустических сигналов.

САЭ представляет собой процесс излучения упругих волн в результате обратимых или частично обратимых изменений структуры твердых тел под влиянием внутренних и внешних факторов различной физической природы (локальные перераспределения напряжений, образование новых трещин, дегазация и изменение химического состояния среды) [1, 2].

В работе [3] в качестве базовой математической модели двухфазной среды выбрана другая система уравнений, предложенная Drew и доработанная Bayer и Nunziato [4], а так же Saurel и Abgrall [5], в которой каждая фаза описывается отдельно своей подсистемой уравнений. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии и теория элементарных механизмов акустической эмиссии рассмотрены в работах [6, 7].

Математическому моделированию акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах посвящены работы [8–10].

1. Постановка задачи построения математической модели сейсмоакустической эмиссии в пористых коллекторах.

Наличие очагов сейсмоакустической эмиссии (САЭ) в двухфазной среде порождает смещения среды $U^k = U_1^k + U_2^k$, где $U_1^i(\vec{r}, t)$ – смещения элементов жидкости:

$U_2^i(\vec{r}, t)$ – смещения элементов упругой зернистой среды. Упругие смещения можно разделить на спонтанные $U_2^{(s)k}$ и упругие $U_2^{(e)k}$

$$U_2^k = U_2^{(s)k} + U_2^{(e)k}. \quad (1)$$

Упругую дисторсия твердой фазы найдем по формуле

$$u_2^{(e)ik} = \frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} - \frac{\partial U_2^{(s)i}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} + \frac{\partial U_2^k}{\partial x^i} \right) - u_2^{(s)ik}, \quad (2)$$

где $u_2^{(s)ik}$ – спонтанная дисторсия упругой среды.

Запишем основные соотношения, определяющие сейсмоакустическое поведение зернистой среды:

уравнения состояния межфазных связей можно записать в виде [11, 12]

$$T_f^{kl} = \alpha_2 \left[\lambda_f^* u_2^{(e)kl} + 2\mu_f^* u_2^{(e)kl} + \nu_f^* p_1 \delta^{kl} \right], \quad (3)$$

где T_f^{kl} – тензор эффективных напряжений в смеси, $\lambda_f^*, \mu_f^*, \nu_f^*$ – комплексные эффективные модули упругости смеси. Они однозначно выражаются через модули упругости Ламе и модули упругости зернистой фазы; λ_2^*, μ_2^* – комплексные модули упругости Ламе; ν_f^* – комплексный коэффициент Пуассона; p_1 – давление жидкости (газа) в первой фазе; индекс 1 относится к жидкости, индекс 2 – к твердой фазе. По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от единицы до трех. Компоненты контравариантных тензоров будем обозначать верхними индексами;

уравнения совместного деформирования фаз среды

$$p_2 - p_1 = \frac{p_f}{\alpha_2}, \quad p_f = -\frac{1}{3} \sigma_f^{hh}. \quad (4)$$

Из формулы (4) определим давление в первой фазе, выраженное через тензор упругой дисторсии

$$p_1 = \Lambda^* u_2^{kk}, \quad \Lambda^* = \frac{1}{1 - \nu_f^*} \left[(\lambda_f^* - \lambda_2^*) + \frac{2}{3} (\mu_f^* - \mu_2^*) \right], \quad (5)$$

где u_2^{kk} тензор упругой дисторсии.

С учетом соотношений (2), уравнения состояния межфазных связей (3) и давление в первой фазе (5) запишем в виде

$$T_f^{kl} = \alpha_2 \left[\lambda_f \frac{\partial U_2^{(e)m}}{\partial x^m} \delta^{kl} + \mu_f \left(\frac{\partial U_2^i}{\partial x^k} + \frac{\partial U_2^k}{\partial x^i} \right) + \nu_f^* p_1 \delta^{kl} \right] - 2\mu^* u_2^{ik} \delta^{ik}; \quad (6)$$

$$p_1 = \Lambda \cdot \frac{\partial U_2^k}{\partial x^2};$$

уравнения движения фаз зернистой среды (импульсов фаз)

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial V_2^k}{\partial t} &= -\alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial x^k}, \\ \rho_{12} \frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial V_2^k}{\partial t} &= \alpha_2 \frac{\partial p_1}{\partial x^k} - \frac{\partial T_f^{kl}}{\partial x^l}, \\ V_\alpha^k &= \frac{\partial U_\alpha^k}{\partial t}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $U_\alpha^i(\vec{r}, t)$ – смещения элементов фаз среды; $V_\alpha^i(\vec{r}, t)$ – скорость смещения элементов фаз среды; ρ_{11} , ρ_{22} – эффективные плотности жидкости и твердой фаз среды; ρ_{12} – динамический коэффициент связи жидкости и твердой фазы; α_1 – доля объема жидкости; α_2 – доля объема упругой фазы. По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от единицы до трех.

Дифференцируя выражения (6) сначала по переменной t , а затем по x^j , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^{jk}}{\partial t \partial x^j} &= \alpha_2 \left[\lambda_f^* \frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i \partial x^k} + \mu_f^* \left(\frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^i \partial x^i} \right) + v_f^* \frac{\partial^2 V_2^i}{\partial x^i \partial x^k} - 2\mu_f^* \frac{\partial \varepsilon_2^{(s)ik}}{\partial x^i} \right], \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^i \partial t} &= \Lambda^* \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^k \partial x^i}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\frac{\partial u_2^{(s)ij}}{\partial t} = \varepsilon_2^{(s)ij}$ – тензор скорости спонтанной дисторсии.

С учетом (8) уравнения движения (7) двухфазной зернистой среды, продифференцированные по переменной t , запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{12} \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} &= -\alpha_1 \Lambda^* \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k}, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{22} \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} &= \Gamma^* \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k} - \alpha_2 \left\{ \mu_f^* \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l \partial x^l} \right\} - 2\mu_f^* \alpha_2 \frac{\partial^2 V_2^{(s)i}}{\partial x^i \partial x^k}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \alpha_2 \Lambda^* - \alpha_2 (\lambda_f^* + \mu_f^* + v_f^* \Lambda^*), \quad \lambda_f^* = \lambda_f' + i\lambda_f'', \quad \mu_f^* = \mu_f' + i\mu_f'', \\ \lambda_2^* &= \lambda_2' + i\lambda_2'', \quad \mu_2^* = \mu_2' + i\mu_2'', \quad v_f^* = v_f' + iv_f'', \quad V_2^{(s)k} = \frac{\partial U_2^{(s)k}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь штрих обозначает действительную часть комплексного числа, а два штриха – мнимую часть комплексного числа.

Решение системы (9) будем искать в виде затухающей сейсмоакустической волны

$$\begin{aligned} V_1^j &= C_1^j \exp(i\omega \cdot t - \theta \cdot x^k v^k), \quad V_2^j = C_2^j \exp(i\omega t - \theta \cdot x^k v^k), \\ V_2^{(s)j} &= C_2^j \exp(i\omega t - \theta^{(s)} x^k v^k), \quad \theta = \gamma_1 + i\beta_1, \quad \theta^{(s)} = \gamma^{(s)} + i\beta^{(s)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta = \beta_1 + \beta^{(s)}, \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \beta^{(s)} = \frac{\omega}{c^{(s)}}, \quad c = c_1 + c^{(s)},$$

где v^k – координаты единичного вектора в направлении распространения сейсмоакустической волны в среде со скоростью $c > 0$; c_1 – скорость распространения сейсмоакустической волны в зернистой среде; $c^{(s)}$ – скорость распространения сейсмоакустической волны спонтанной дисторсии; $\gamma > 0$ – коэффициент затухания; $\omega > 0$ – частота, β – фазовая постоянная сейсмоакустической волны; $C_1^j, C_2^j, C_2^{(s)j}$ – амплитуды колебания.

Подставим (11) в соотношения (9), после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} -\rho_{11}\omega^2 C_1^k + \rho_{12}\omega^2 C_2^k &= -\alpha_1 \Lambda^* C_2^l \theta^2 v^l v^k, \\ -\rho_{12}\omega^2 C_1^k + \rho_{22}\omega^2 C_2^k &= \Gamma^* C_2^l \theta^2 v^l v^k - \mu_f^* \alpha_2 \theta^2 C_2^k - 2\mu_f^* \alpha_2 \theta^{(s)2} C_2^i v^i v^k. \end{aligned} \quad (12)$$

Характеристики продольных сейсмоакустических волн определяются из (12), если положить $C_1^k v^k = D_1 \neq 0$ и $C_2^k v^k = D_2 \neq 0$. Для этого умножим обе части (12) на v^k и просуммируем по индексу k . В результате получим однородную систему уравнений с комплексными коэффициентами относительно неизвестных D_1, D_2

$$\begin{aligned} -\rho_{11}\omega^2 D_1 + (\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^* \theta^2) D_2 &= 0, \\ -\rho_{12}\omega^2 D_1 + [\rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^* - \alpha_2 \mu_f^*) \theta^2 + 2\alpha_2 \mu_f^* \theta^{(s)2}] D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом $\theta = \gamma + i\beta$, $\theta^{(s)} = \gamma^{(s)} + i\beta^{(s)}$ соотношение запишем в виде

$$\begin{aligned} -\rho_{11}\omega^2 D_1 + [\rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^* (\gamma_1 + i\beta_1)^2] D_2 &= 0, \\ -\rho_{12}\omega^2 D_1 + [\rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^* - \alpha_2 \mu_f^*) (\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\alpha_2 \mu_f^* (\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2] D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы система (14) имела ненулевое решение, ее определитель, составленный из коэффициентов при D_1 и D_2 должен быть равен нулю [13]

$$\begin{vmatrix} -\rho_{11}\omega^2 & \rho_{12}\omega^2 + \alpha_1 \Lambda^* (\gamma_1 + i\beta_1)^2 \\ -\rho_{12}\omega^2 & \rho_{22}\omega^2 - (\Gamma^* - \alpha_2 \mu_f^*) (\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\alpha_2 \mu_f^* (\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Раскроем определитель

$$\begin{aligned} k\omega^2 - [-\rho_{11}\alpha_2 \mu_f^* + \rho_{11}\Gamma^* + \rho_{12}\alpha_1 \Lambda^*] (\gamma_1 + i\beta_1)^2 + 2\rho_{11}\alpha_2 \mu_f^* (\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 &= 0, \\ k &= \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) представим в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} k\omega^2 - 2[-\rho_{11}\alpha_2\mu_f^* + \rho_{11}\Gamma^* + \rho_{12}\alpha_1\Lambda^*](\gamma_1 + i\beta_1)^2 &= 0 \\ k\omega^2 + 4\rho_{11}\alpha_2\mu_f^*(\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Определим характеристики сейсмоакустической волны первого выражения (17). Для этого запишем его в виде

$$(\gamma_1 + i\beta_1)^2 = \frac{k\omega^2}{2[\rho_{11}\Gamma^* + \rho_{12}\alpha_1\Lambda^* - \rho_{11}\alpha_2\mu_f^*]}. \quad (18)$$

Преобразуем комплексные модули зернистой среды

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \frac{1}{v'_f + iv''_f} \{[(\lambda'_f - \lambda'_2) + \frac{2}{3}(\mu'_f - \mu'_2)] + \\ &+ i[(\lambda''_f - \lambda''_2) + \frac{2}{3}(\mu''_f - \mu''_2)]\} = \frac{\delta' + i\delta''}{v'_f + iv''_f} = \gamma' + i\gamma'', \\ \gamma' &= \frac{\delta'v'_f + \delta''v''_f}{v'^2_f + v''^2_f}, \quad \gamma'' = \frac{\delta''v'_f - \delta'v''_f}{v'^2_f + v''^2_f}, \\ \delta' &= [(\lambda'_f - \lambda'_2) + \frac{2}{3}(\mu'_f - \mu'_2)], \quad \delta'' = [(\lambda''_f - \lambda''_2) + \frac{2}{3}(\mu''_f - \mu''_2)], \\ \Gamma^* &= \alpha_2\Lambda^* - \alpha_2\lambda^*_f - \alpha_2\mu^*_f - \alpha_2v^*_f\Lambda^* = \alpha_2(\chi' + i\chi''), \\ \chi' &= \gamma' - (\lambda'_f + \mu'_f) - (v'_f\gamma' - v''_f\gamma''), \quad \chi'' = \gamma'' - (\lambda''_f + \mu''_f) - \\ &- (v'_f\gamma'' + v''_f\gamma'). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда (18) примет вид

$$(\gamma_1 + i\beta_1)^2 = \frac{k\omega^2}{2[\rho_{11}\alpha_2(\chi' + i\chi'') + \rho_{12}\alpha_1(\gamma' + i\gamma'') - \rho_{11}\alpha_2(\mu'_f + i\mu''_f)]}. \quad (20)$$

В знаменателе (20) выделим действительную и мнимую части, получим

$$\gamma_1^2 - \beta_1^2 = \frac{k\omega^2 q_1}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \quad 2\gamma_1\beta_1 = -\frac{k\omega^2 q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}. \quad (21)$$

Из системы (21) находим фазовую постоянную β_1 и коэффициент затухания γ_1

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}{4(q_1^2 + q_2^2)}}, \quad (22)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2 q_2^2}{4(q_1^2 + q_2^2)(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}}. \quad (23)$$

Учитывая, что $\beta_1 = \frac{\omega}{c_1}$, где c_1 - скорость сейсмоакустической волны в зернистой среде, получим

$$c_1 = \sqrt{\frac{4(q_1^2 + q_2^2)}{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)(-q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2})}}. \quad (24)$$

Таким образом, в упругой, насыщенной жидкостью зернистой среде, существует одна сейсмоакустическая волна, скорость которой определяются по формуле (24) и один коэффициент затухания γ_1 , который находится по формуле (23).

Если связь между фазами отсутствует ($\rho_{12} = 0$) и мнимые части модулей упругости в фазах равны нулю, то из (26) следует, что скорость распространения сейсмоакустических волн в пористой зернистой среде равна скорости сейсмоакустических волн, распространяющиеся в чисто сплошной упругой среде [4]

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_{22}}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_2}}. \quad (25)$$

Из второго равенства (19) определим характеристики волны спонтанной дисторсии. Для этого запишем его в виде

$$(\gamma^{(s)} + i\beta^{(s)})^2 = -\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2\mu_f^*}. \quad (26)$$

Учитывая, что $\mu_f^* = \mu_f' + i\mu_f''$, разделим действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)2} - \beta^{(s)2} &= -\frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\mu_f'\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}, \\ 2\gamma^{(s)}\beta^{(s)} &= \frac{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\mu_f''\omega^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из системы (27) находим коэффициент затухания и фазовую постоянную спонтанной скорости

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)} &= \sqrt{\frac{k\omega^2\mu_f''^2}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f' + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2})}}, \\ \beta^{(s)} &= \sqrt{\frac{k\omega^2(\mu_f' + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2})}{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Скорость волны спонтанной дисторсии в зернистой среде будет

$$\tilde{n}^{(s)} = \frac{\omega}{\beta^{(s)}} = \sqrt{\frac{4\rho_{11}\alpha_2(\mu_f'^2 + \mu_f''^2)}{k(\mu_f' + \sqrt{\mu_f'^2 + \mu_f''^2})}}. \quad (29)$$

Из (29) следует, что при малом затухании $\mu_f'' = 0$ и $\alpha_2 = 1$

$$\tilde{n}^{(s)} = \sqrt{\frac{2\rho_{11}\mu'}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}}. \quad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавров А. В., Шкуратник В. Л. Акустическая эмиссия при деформировании и разрушении горных пород // Акуст. журнал. 2005. Т. 51. С. 6–18.
2. Дрягин В. В. Сейсмоакустическая эмиссия нефтепродуктового пласта // Акуст. журнал. 2013. Т. 59. № 6. С. 744–751.
3. Drew D. A., Mathematical modeling of two-phase flows // An-nu.Rev. Fluid Mech. 1983 15 261–291.
4. Baer M. R., Nunziato J. W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive gra-nular materials // Int. J. Multiphase Flow. 12 1986 № 6 Pp. 861–889.
5. Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mis // J. Comput. Phys. 2003 Vol. 186 Pp. 361–396.
6. Бойко В. С., Нацик В. Д. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии // Элементарные процессы пластической деформации металлов. Киев. 1978. С. 159–189.
7. Нацик В. Д., Чижко К. А. Теория элементарных механизмов акустической эмиссии// Акустическая эмиссия материалов и конструкций Ростов-на-Дону. Изд. Ростовского университета, 1989. С.10–18.
8. Поленов В. С., Чигарев А. В. О математическом моделировании акустической эмиссии в анизотропных двухкомпонентных средах // Сб. Теоретическая и прикладная механика. БНТУ. Минск. Вып. 36 2021 С. 135–140
9. Поленов В. С., Ницак Д. А. Математическое моделирование акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах // Наука России: цели и задачи. Сб. научных трудов по материалам XI МНК, Екатеринбург. ч. 2 2018. С. 52–58.
10. Поленов В. С., Кожанов А. А. О математическом моделировании акустической эмиссии в пористых средах // Научный журнал. «Тенденции развития науки и образования» XXXI МНК. №.31. ч. 1 Изд. НИЦ «Л-Журнал», Самара. 2017. С. 5–13.
11. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред // М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Нигматулин Р. И. Механика многофазных сред // М.: Наука. ч. 1. 1967. 464 с., ч. 2. 1967. 380 с.
13. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра // М.: 1984. 204 с.

Поступила: 12.01.2022

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦОВ ИЗ СТАЛИ 40X13 ПРИ ЛАЗЕРНОЙ ЗАКАЛКЕ

Веремейчик А. И., Нерода М. В.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

Введение. Перспективным методом упрочнения поверхностного слоя деталей машин и механизмов является лазерная закалка, при которой источником нагрева является лазерное излучение [1–6]. Сущность лазерной закалки заключается в превращении при быстром охлаждении гранецентрированной кристаллической решетки аустенита в объемно-центрированную кристаллическую решетку мартенсита. Благодаря ускоренному охлаждению в поверхностных слоях создаются градиенты температуры, приводящие к протеканию пластической деформации растяжения. После распространения температурного поля в глубину детали ввиду того, что мартенсит по сравнению с другими структурными составляющими стали имеет наибольший удельный объем, это является причиной появления значительных внутренних напряжений, приводящих к деформациям и появлению трещин, которые до сих пор в достаточной мере не изучены. Это приводит к необходимости разработки компьютерных моделей процесса лазерного упрочнения, позволяющих варьировать режимами и параметрами процесса. Знание температурных режимов нагрева и охлаждения позволит прогнозировать ход структурных и фазовых превращений обрабатываемого материала, избегать оплавления поверхности, что позволит сохранить ее высокое качество. Использование современных систем автоматизации инженерных расчетов (CAE-систем) в настоящее время является одним из наиболее эффективных способов решения такого рода задач по исследованию напряженно-деформированного состояния тел, оценке прочностных характеристик и прогнозированию долговечности конструкций. Программная система конечно-элементного анализа ANSYS является одной из наиболее эффективных CAE-систем. Программное обеспечение ANSYS со специальным интерфейсом ANSYS Workbench позволяет успешно решать различные задачи механики деформируемого твердого тела, теплофизики т. д.

Взаимодействие лазерного излучения с непрозрачными твердыми телами можно условно поделить на несколько этапов [7]: поглощение части лазерного излучения поверхностью в соответствии с коэффициентом поглощения материала при заданной температуре поверхности; распространение теплоты от поверхности вглубь материала по механизму теплопроводности с повышением его температуры вплоть до температуры фазового перехода; поглощение теплоты; нагрев вещества в другом фазовом состоянии до следующего фазового перехода; при прекращении действия лазерного луча процесс протекает в обратном порядке за счет описанного выше теплоотвода вглубь материала, а также конвективного и радиационного охлаждения, если модельный образец имеет конечные размеры.

1. Постановка задачи. Падающий на поверхность обрабатываемой детали лазерный пучок можно представить как локализованный тепловой источник определенной интенсивности [8]. В соответствии с этим задачи о нагреве материалов лазерным излучением могут быть рассмотрены с использованием закономерностей обычной теплопроводности (линейной или нелинейной). Температура T определяется из решения дифференциального уравнения (ДУ) теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$T(x, y, z, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_0); \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = q_0(x, y, t); \quad (4)$$

где c – удельная теплоемкость, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$; ρ – плотность материала, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; λ – коэффициент теплопроводности, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot^\circ\text{C}}$; T_0 – начальная температура, $^\circ\text{C}$.

Для исследования напряженно-деформированного состояния необходимо решить ДУ задачи теории упругости в перемещениях [9]:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad} T = 0, \quad (5)$$

с граничными условиями:

$$u_i = f_i(x, y, z, t), \quad (6)$$

где λ и μ – параметры Ламе, Па; α_T – коэффициент линейного расширения, $\frac{1}{^\circ\text{C}}$.

2. Моделирование процесса лазерной закалки образцов. Численное решение задачи (1–6) в *ANSYS Workbench 2019 R2* проводится в два этапа. На первом этапе в модуле *Transient Thermal* решается нестационарная задача теплопроводности по определению температурного поля в деталях при воздействии движущегося высококонцентрированного источника нагрева. На втором этапе с помощью модуля *Static Structural* выполняется статический прочностной анализ модели.

В соответствии с [1], при лазерной закалке плотность мощности в поперечном сечении лазерного пучка распределяется по закону нормального распределения Гаусса:

$$p = p_0 \exp(-k_0 r^2), \quad (7)$$

где p – плотность мощности в любой точке лазерного пучка, $\text{Вт}/\text{м}^2$; $p_0 = \frac{W}{S}$ – максимальная плотность мощности по оси пучка, зависящая от расстояния от лазера до термообрабатываемой поверхности, $\text{Вт}/\text{м}^2$; W – мощность лазера, Вт; S – площадь лазерного воздействия, м^2 ; $k_0 = \frac{2}{\omega^2}$ – коэффициент сосредоточенности плотности мощности, характеризующий концентрацию энергии в зоне воздействия, $1/\text{м}^2$; r – расстояние от точки, в которой определяется плотность мощности, до оси пучка, м.

Построение геометрической модели образцов в *ANSYS Workbench* выполнено с использованием графического модуля *ANSYS SpaceClaim*. Материал модели закаливаемых образцов в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $200 \times 20 \times 7$ мм (ри-

сунок 1) – коррозионно-стойкая жаропрочная сталь 40X13. При генерации конечно-элементной сетки использовались конечные элементы тетраэдрической формы. Локальное изменение сетки с уменьшением ребер элементов в 2 раза проводилось с помощью опции *Refinement* меню *Mesh Control*. В таблице 1 приведены режимы лазерной закалики.

Модуль управления материалами в *ANSYS Workbench 2019 R2* представлен элементом *Engineering Data*, входящим в структуру инженерного анализа. Все механические и термодинамические свойства материала, зависящие от температуры, задавались в соответствии с таблицей 2.

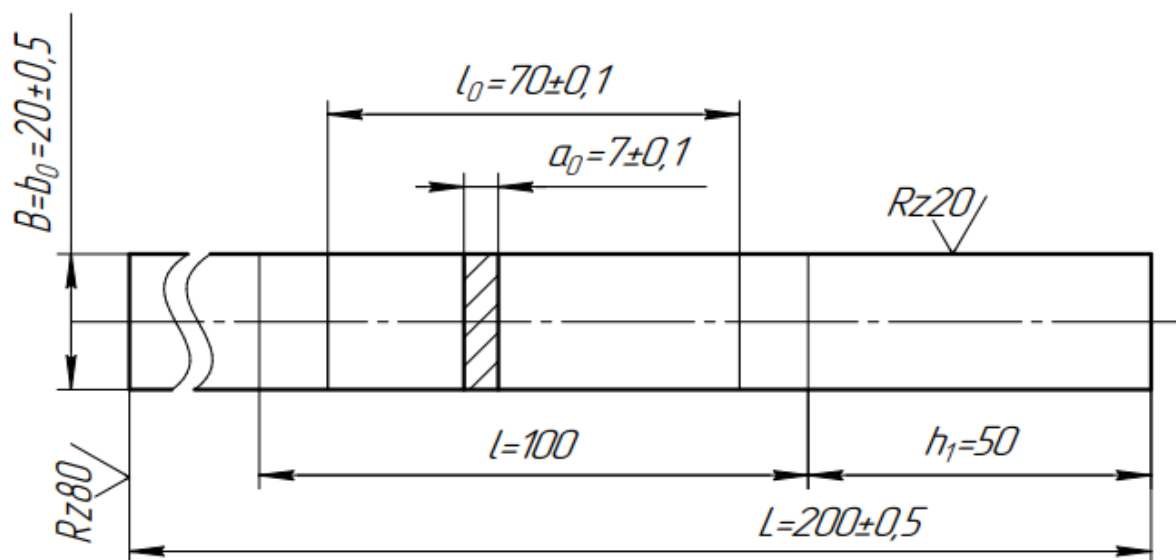


Рис. 1. Закаливаемый образец (размеры в мм)

Таблица 1 – Режимы лазерной закалики образцов

Мощность лазерного излучения, кВт	Константа		Переменная	
	Диаметр лазерного луча, мм	Скорость движения луча, мм/мин	Диаметр лазерного луча, мм	Скорость движения луча, мм/мин
1,2	2	–	–	500
				700
				1000
	–	500	2	–
			3	–
			4	–

Таблица 2 – Химический состав (%) и характеристики стали 40X13

C	Si	Mn	Ni	S	P	Cr	Fe				
0,35–0,44	до 0,6	до 0,6	до 0,6	до 0,025	до 0,03	12–14	~84				
Свойства	Температура, °С										
	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
Модуль упругости E , ГПа	216	214	206	198	188	176	163	148	140	140	
Коэффициент Пуассона ν	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	
Плотность ρ , кг/м ³	7650	7630	7600	7570	7540	7510	7480	7450	7420	7420	
Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м·°С)	25	26	27,2	28,3	29,1	28,3	27,9	28,5	28,5	28,5	
Коэффициент линейного расширения $\alpha_T \cdot 10^6$, 1/°С	–	10,8	11,9	12,3	13	13,6	13,5	13,8	14,6	14,6	
Удельная теплоемкость c , Дж/(кг °С)	461	482	523	565	607	674	775	888	825	491	

В соответствии со скоростью движения лазера к узлам конечно-элементной модели пошагово последовательно прикладывалась температурная нагрузка вдоль оси симметрии сначала верхней, а затем нижней поверхности образцов. Для моделирования распространения температуры вглубь детали создан макрос для ANSYS на параметрическом языке программирования APDL, т. к. принималось, что тепловой поток распределяется по диаметру пятна нагрева по закону, близкому к распределению Гаусса. В APDL-макросе для учета температурной нагрузки использована зависимость:

$$q = q_H \exp \left[\left(- \frac{(x^2 + (y - vt)^2)}{r_H^2} \right) \right], \text{ где } q_H = \frac{AW}{\pi r_H^2}; W = 1,2 \text{ кВт}; r_H = \frac{D}{2}.$$

где x, y – координаты центра пятна нагрева. Оси x и y лежат в плоскости образцов, подверженной термообработке, причем ось y направлена в сторону движения источника нагрева, ось z – по направлению действия источника тепла. На всех поверхностях модели задавалась конвекция с различными коэффициентами теплоотдачи α . При задании коэффициента учитывалось, что он зависит от характера движения лазера, его физических свойств, размеров и формы поверхности, направления теплового потока и т. д. Начальная температура принималась равной $T_0 = 20$ °С. Расчет теплового поля и напряженно-деформированного состояния (НДС) проводился для скоростей движения источника тепла $v = 8,33, 11,66, 16,66$ мм/с, диаметра лазерного пятна на поверхности $D = 2, 3, 4$ мм.

3. Некоторые результаты исследования температуры и НДС. В результате теоретических исследований созданной модели получены результаты решения задачи теплопроводности в виде линий равного уровня, отражающих распределение температуры в закаливаемых образцах. Некоторые результаты приведены на рисунке 2.

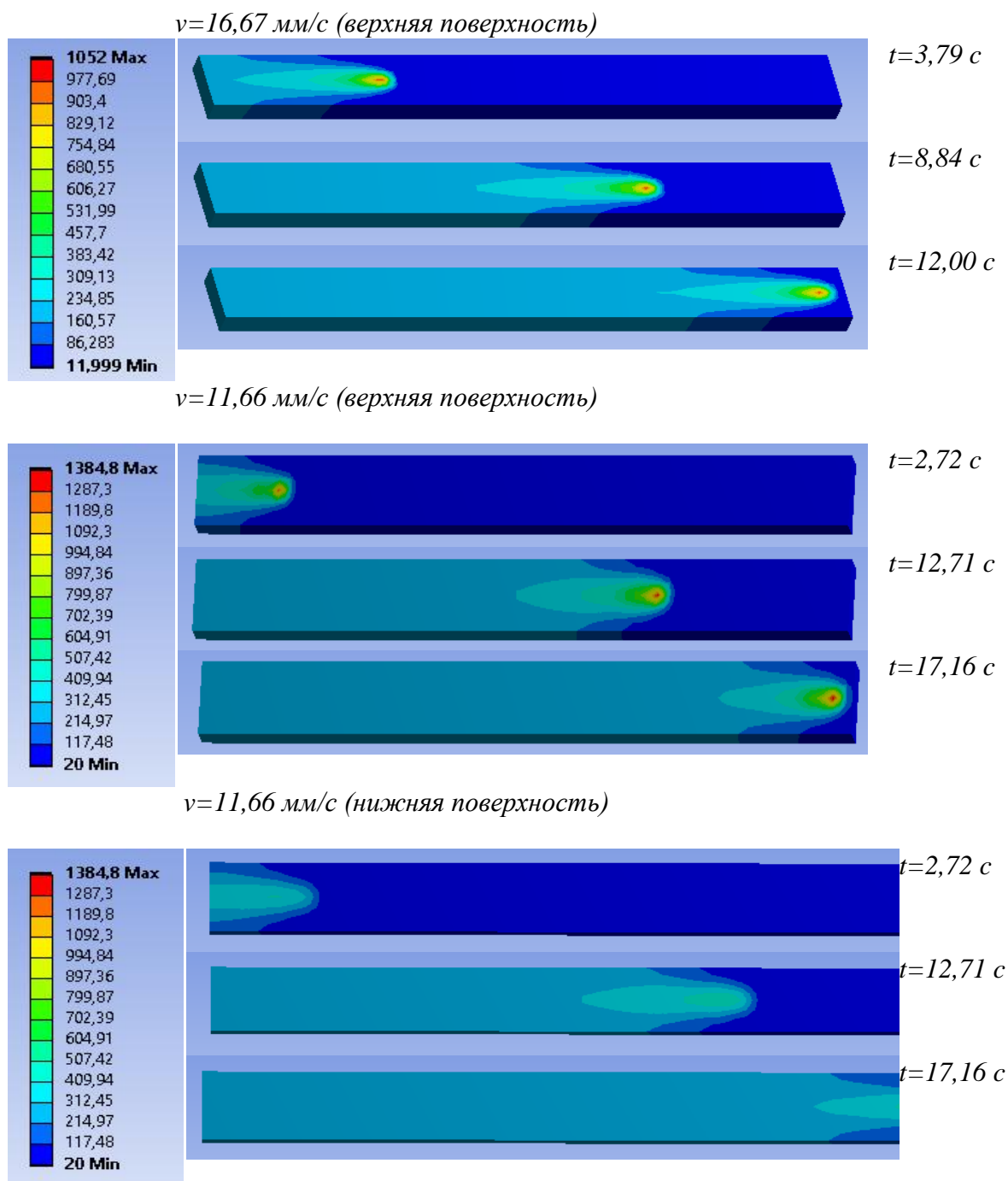


Рис. 2. Распределение полей температур °С на поверхности модели в различные моменты времени при $D = 2$ мм, $\alpha = 10-30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°С}}$, $q_H = 0,72 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$

По результатам исследований (рисунок 3) установлено, что зона термического воздействия лазерного луча в поперечном сечении модели имеет форму сегмента.

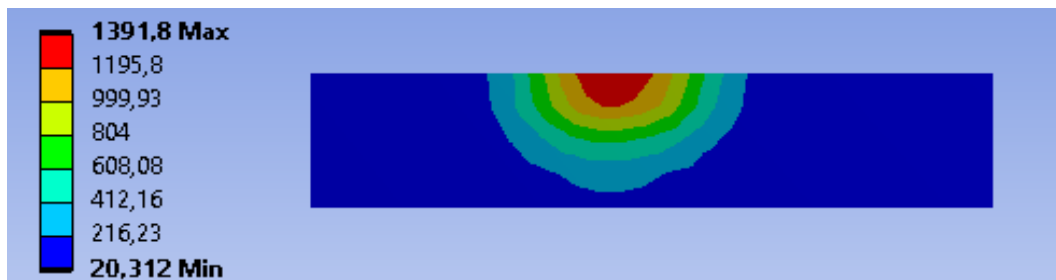


Рис. 3. Распределение температурного поля °C в сечении, перпендикулярном направлению движения лазерного луча, $t = 12,5$ с, $v = 16,67$ мм/с, $D = 2$ мм, $q_H = 1,2 \cdot 10^8$ Вт/м²

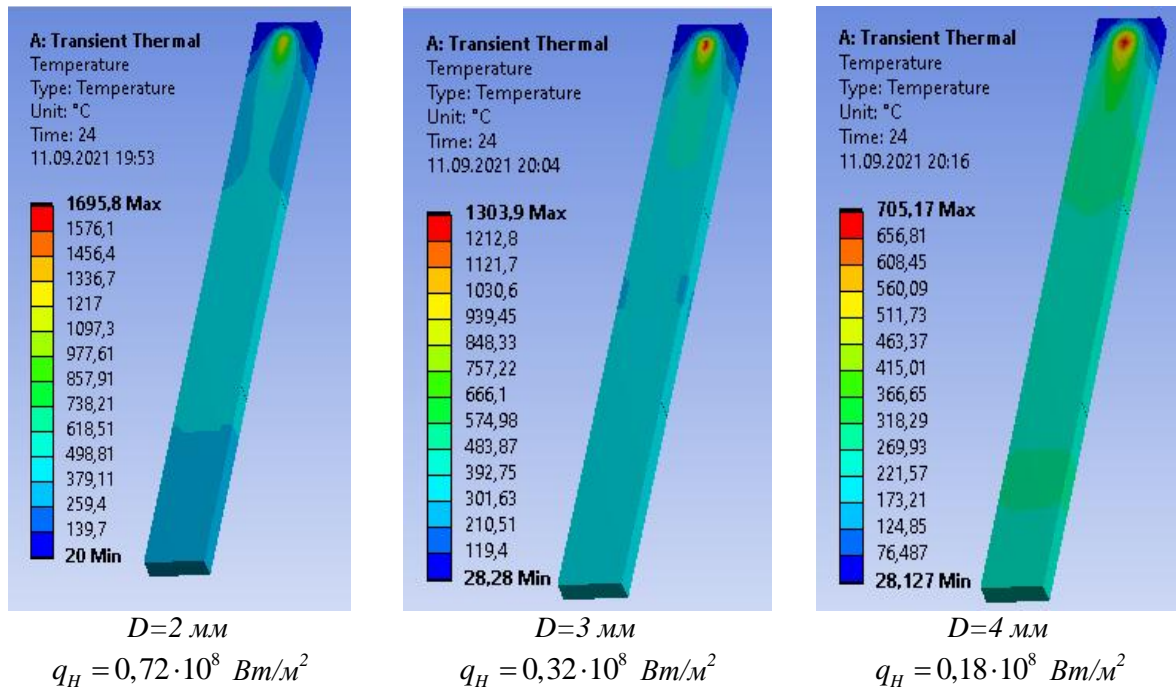


Рис. 4. Поле температур °C на поверхности модели образца в момент времени $t = 24$ с при различных диаметрах лазерного луча, $v = 8,33$ мм/с, $\alpha = 10-30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}$

Результаты теплового анализа, проведенные в модуле *Transient Thermal*, сохраняются в отдельном файле и используются при проведении статического анализа модели (определении напряженно-деформированного состояния).

Задача термоупругости по исследованию НДС в образцах при воздействии движущегося высококонцентрированного источника тепла, моделирующего лазерный луч, решается в модуле *Static Structural* на базе *ANSYS Mechanical*. Некоторые результаты статического анализа модели образца при ее температурном нагружении для различных граничных условий приведены на рисунок 5.

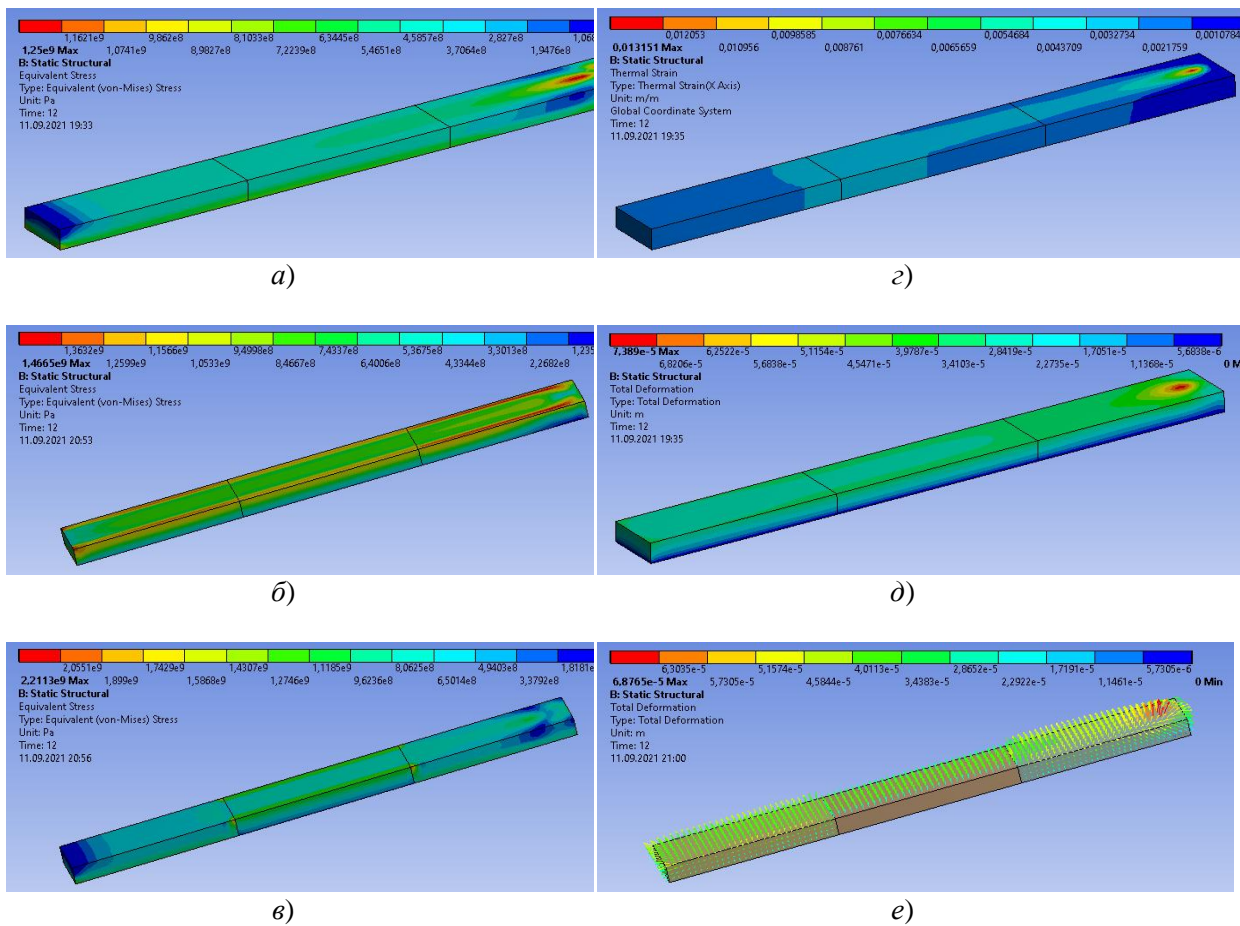


Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса (*Equivalent von-Mises Stress*, Па) (а–в), температурных деформаций (*Thermal Strain*) (z), суммарных перемещений (*Total Deformation*, м) (д) и векторное поле перемещений (*U*) (e) в конечно-элементной модели образца при лазерной закалке, $v = 16,67$ мм/с, $D = 2$ мм, $t = 12$ с, $q_H = 0,72 \cdot 10^8$ Вт/м²; а, z, д – закрепление модели по нижней поверхности, б – по нижней и двум боковым поверхностям, в, e – по нижней и средней части боковых поверхностей

4. Исследование механических характеристик закаленных образцов. Для определения механических характеристик закаленных образцов в модуле *Transient Structural* проведено моделирование испытаний на растяжение в зоне упругих деформаций. Граничные условия задавались в виде отсутствия перемещений вдоль оси *y* по задней торцевой грани с помощью параметра *Displacement*. Второй торцевой поверхности сообщалось перемещение $S = 0,00018$ м, направленное по оси *y*. Некоторые результаты исследований приведены на рисунке 6.

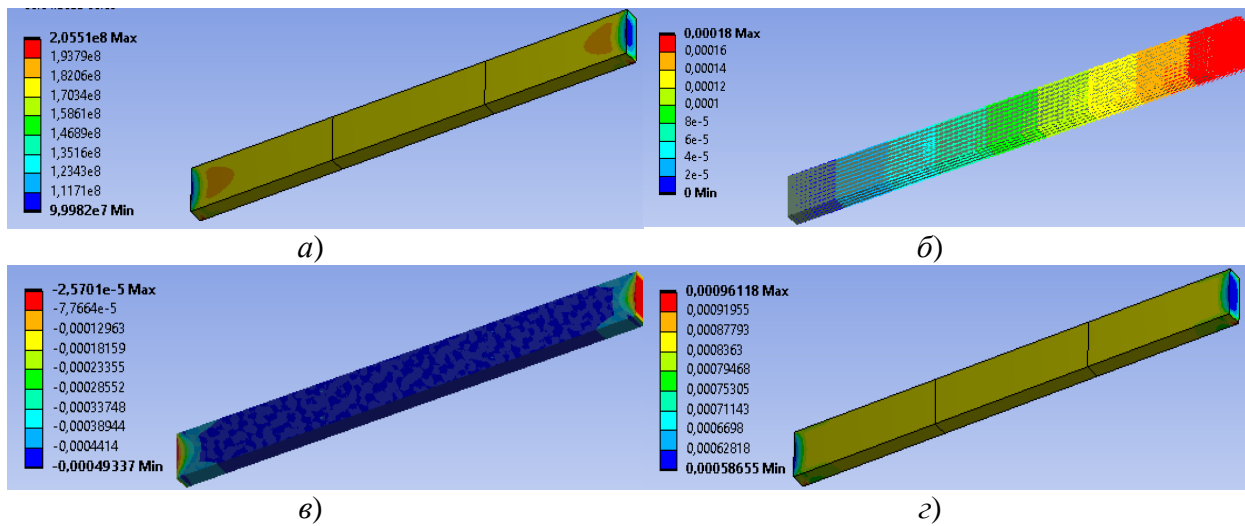


Рис. 6. Распределение эквивалентных напряжений по критерию Мизеса (а), векторное поле перемещений (б), распределение поперечных деформаций (*Normal Elastic Strain, X Axis*) (в) и продольных деформаций (*Normal Elastic Strain, Y Axis*) (з) в образце после лазерной закалки при

$$D = 2 \text{ мм}, \alpha = 10\text{--}30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°С}}, q_H = 0,72 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2, v = 16,67 \text{ мм/с}$$

На рисунке 7 представлена зависимость нормальных напряжений σ (*Normal Stress, Y Axis*) и поперечных деформаций от продольных деформаций при испытаниях на растяжение образцов после лазерной закалки с различными скоростями движения лазера.

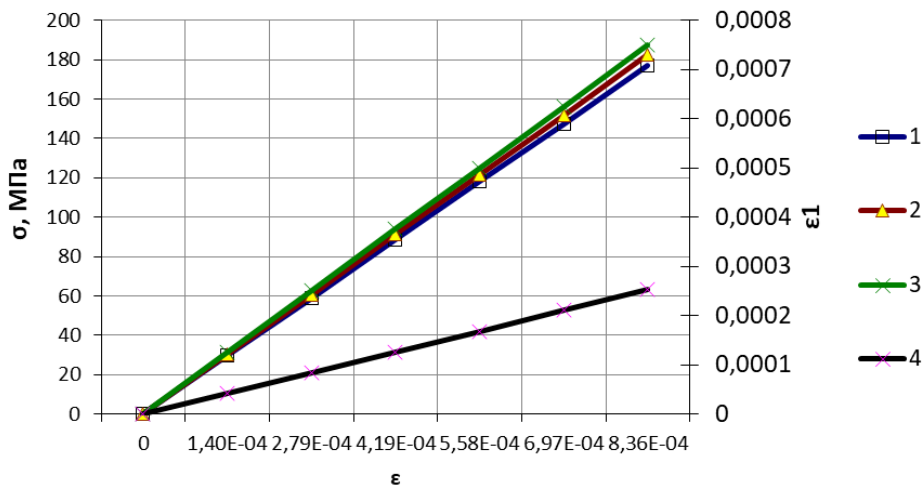


Рис. 7. Зависимость нормальных напряжений (1–3) (МПа) и относительных поперечных деформаций (4) от относительных продольных деформаций при $D = 2 \text{ мм}, \alpha = 10\text{--}30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°С}},$

$$q_H = 0,72 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 \text{ 1, 4 – скорость движения лазера } v = 16,67 \text{ мм/с, 2 – } v = 11,66 \text{ мм/с, 3 – } v = 8,33 \text{ мм/с}$$

По результатам исследований НДС определены механические характеристики образцов, упрочненных лазерной закалкой при указанных выше режимах. Модуль продольной упругости составил $E = 215\text{--}219 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,29\text{--}0,30$.

Заключение. Проведена постановка и численное решение задачи нестационарной теплопроводности по исследованию температурного поля при закалке стальных образцов лазером непрерывного действия для различных скоростей движения лазера и диаметров лазерного пятна. Моделирование проводилось с учетом неоднородности свойств стали 40X13.

С использованием конечно-элементного комплекса *ANSYS Workbench* определено напряженно-деформированное состояние моделей образцов при их термообработке лазером для различных граничных условий.

Исследовано влияние скорости движения лазерного луча, ширины дорожки и глубины закалки на температурное поле и напряжения. Установлено, что неравномерность распределения температур и структурной неоднородности в зоне лазерного воздействия приводит к появлению значительных растягивающих напряжений (рисунок 5), которые могут вызвать коробление и образование трещин.

В среде *ANSYS Workbench* проведено моделирование испытаний образцов на растяжение, теоретически определен модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала закаленных образцов. Результаты численных экспериментов показали незначительное изменение характеристик упругости.

Полученные результаты температурного и статического анализа могут быть использованы для определения оптимальных режимов работы лазеров и геометрических размеров установок для лазерной закалки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, И. В. Зуев и др. – М. : Машиностроение, 1985. – 496 с.
2. Вейко В. П. Технологические лазеры и лазерное излучение / В. П. Вейко. – М. : СПбГУ ИТМО, 2006. – 52 с.
3. Абильсиитов Г. А. Технологические лазеры: справочник / Г. А. Абильсиитов, В. С. Голубев, В. Г. Гонтарь. – М. : Машиностроение, 1991. – 432 с.
4. Gaković, B.; Trtica, M.; Petrović, S.; Panjan, P.; Cekada, M.; Samardžija, Z. Surface structures formed on AISI 420 stainless steel by pulsed laser irradiation. *Mater. Sci. Forum* 2005, 494, 309–314.
5. Leung, M. K.; Man, H.; Yu, J. Theoretical and experimental studies on laser transformation hardening of steel by customized beam. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2007, 50, 4600–4606.
6. Григорьянц А. Г. Технологические процессы лазерной обработки / А. Г. Григорьянц, И. Н. Шиганов, А. И. Мисюров. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 664 с.
7. Морозов Е. А. Исследование влияния параметров лазерной термической обработки на структуру и свойства порошковых сталей: дисс. ... канд. техн. наук: 05.16.06 / Е. А. Морозов. – Пермь, 2019. – 110 с.
8. Журавлев М. М. Распределение температуры внутри теплового поля при лазерной обработке / М. М. Журавлев, А. В. Королев, М. К. Решетников // *Вестник СГТУ*. 2013. – № 1 (74). – С. 62–66.
9. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 239 с.
10. Карслоу, Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

Поступила: 30.03.2022

БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Холодарь Б. Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. В [1] рассмотрена задача о больших перемещениях консольного стержня, нагруженного на свободном торце следящей поперечной силой. Материал стержня предполагался линейно-упругим или нелинейно-упругим без ограничения по предельным деформациям.

Одной из особенностей рассмотренной задачи является возможность уменьшения уровня деформаций в зоне заделки при нарастании максимальной деформации материала под действием увеличивающейся нагрузки. В связи с этим нелинейно-упругое решение становится неприменимым к материалу, обладающему остаточными деформациями, так как деформации и напряжения в нем при разгрузке следуют не исходной диаграмме деформирования (ДР), а диаграммам обратного нагружения (ДОН) упруго-пластического материала. В настоящей работе рассматривается поведение стержня с учетом отмеченного обстоятельства. Предполагается также, что выполняется гипотеза плоских сечений.

Постановка задачи. Оговоримся сразу, что далее рассматривается идеализированный скле-рономный изотропный упруго-пластический материал, не обладающий возвратными деформациями.

Диаграмма растяжения материала описывается зависимостью $\sigma(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \text{упругий участок:} & \quad \sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \\ \text{площадка текучести:} & \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma_T, \\ \text{участок упрочнения:} & \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_T) \cdot ((\varepsilon_B - \varepsilon)/(\varepsilon_B - \varepsilon_U))^m, \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль упругости, σ_T и σ_B – пределы текучести и прочности соответственно, ε_B – предельная деформация, $\varepsilon_U = \varepsilon_T + p \cdot \varepsilon_T$ – деформация начала участка упрочнения, где $\varepsilon_T = \sigma_T / E$ – деформация на пределе текучести, $p \geq 0$ и $m \geq 0$ – числовые параметры.

Методика построения диаграммы обратного нагружения по диаграмме растяжения рассмотрена в [2]. На рисунке 1 показаны диаграммы, построенные при следующих числовых данных: $E = 10^5$ Мпа, $\sigma_T = 10^2$ Мпа, $\sigma_B = 2 \cdot 10^2$ Мпа, $\varepsilon_B = 0,50$, $m = 3$, $p = 0$ и $p = 9$, которые использованы далее в расчетах.

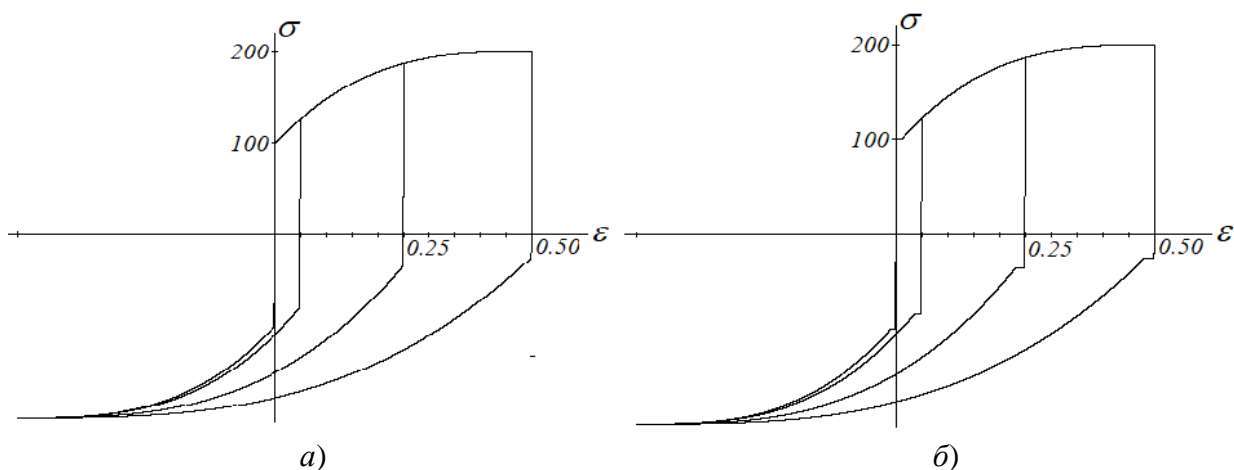


Рис. 1. Диаграммы растяжения, сжатия и обратного нагружения: *a* – $p = 0$; *б* – $p = 9$

На рисунке 2 показан стержень с используемыми координатами. Длина стержня $L_0 = 1$ м, сечение – прямоугольное шириной $b = 1$ см и высотой $h = 0,25$ см. Начальный шаг разбиения стержня по длине равен $\Delta L = 1 \cdot 10^{-4}$ м.

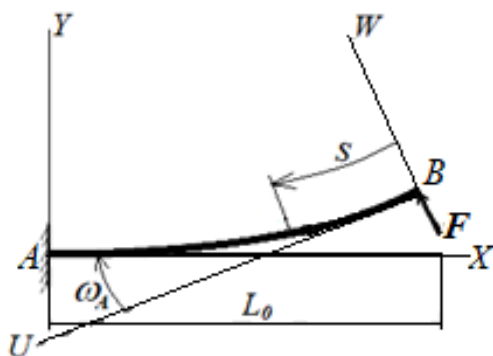


Рис. 2. Координаты стержня XY, UW, S

В связи с возможностью разгрузки материала на некотором участке стержня, решение задачи производится на продолжающееся нагружение пошагово увеличивающейся силой. Определив для заданного материала значения изгибающих моментов M_T и M_B , при которых напряжения в заделке прямолинейного стержня могли бы достичь пределов текучести σ_T и прочности σ_B , находим для них соответствующие усилия (F_T и F_B) и далее задаем шаг нарастания нагрузки ΔF и ее текущее значение $F^{(i)}$ по формулам: $F_T = M_T / L_0$, $F_B = M_B / L_0$, $\Delta F = (F_B - F_T) / N$, $F^{(i)} = F_T + \Delta F i$, $i = 0 - i_{max}$, где N – число ступенек приращения нагрузки на участке упрочнения диаграммы растяжения материала. Построение формы изогнутой оси стержня базируется на методике, использованной в [1].

На рисунке 3 для нелинейно-упругого материала приведена форма изогнутой оси стержня и моменты в сечениях с координатой S при росте нагрузки. Видно (рисунок 3, в), что начиная с некоторого уровня нагружения зависимости $M(S)$ начинают пересекаться, и на некотором участке стержня моменты при усилии $F^{(i)}$ становятся меньше, чем моменты от силы $F^{(i-1)} < F^{(i)}$, что вызывает разгрузку материала в соответствующих зонах. При этом для упруго-пластического материала форма изогнутой оси и перемещения ее точек могут заметно измениться по отношению к показанным на рисунке.

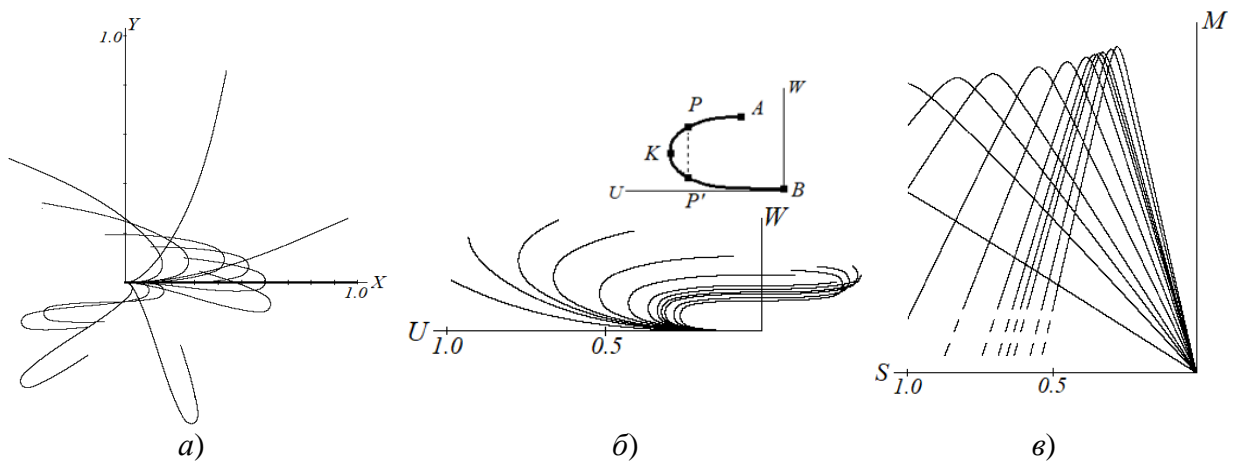


Рис. 3. Нелинейно-упругий материал. Изогнутая ось стержня в координатах XY (а) и UW (б) и распределение момента вдоль оси (в); $N = 24, i = 1, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 56, 59, 62, 70, 77$

Решение задачи. Процедура уточнения решения описывается ниже с учетом того, что сравнивать значения деформаций для нагружений i и $i - 1$ необходимо для одинаковых значений криволинейной координаты S сечения стержня. Анализируя форму кривых $U(W)$ можно заключить [1], что на участке PP' ось стержня искривляется симметрично (рисунок 3, б), поэтому необходимое уточнение решения касается только участка PA , где точка P соответствует пересечению зависимостей $M(S)$ для текущего i и предыдущего $i - 1$ нагружений. Построение точки P произведено путем линеаризации зависимостей $M(S)$ между найденными итерационно ближайшими точками на кривых i и $i - 1$.

После определения S_P и соответствующей координаты U_P нагружения $i - 1$, определяется значение $M^{(i-1)}(S_P)$. Поиск ведется также итерационно с линейной аппроксимацией кривой $M^{(i-1)}(S)$ на интервале ΔS , которому принадлежит точка P (такие же значения M и S имеют место и для кривой текущего нагружения). Далее уточняется деформация ε материала в этой точке на нагружении $i - 1$ путем интерполяции по уже имеющимся данным.

Установив необходимые параметры кривых в точке P для обоих рассматриваемых нагружений, переходим к построению следующих точек отрезка PA для текущего нагружения. С этой целью принимаем значение $S_j^{(i)}$ новой точки таким, как было ранее найдено для нее при нелинейно-упругом подходе, а соответствующую координату U_j получаем путем экстраполяции кривой $U(S)$ на шаг ΔS вперед по данным трех предыдущих точек $j - 1 \div j - 3$ (квадратичная аппроксимация). Эта координата фактически нужна только для назначения величины момента в новой точке ($M_j^{(i)} = F^{(i)} \cdot U_j$) и подлежит далее уточнению. Соответственно для точки с такой же дуговой координатой определяем момент $M^{(i-1)}$ и деформацию $\varepsilon^{(i-1)}$ на имеющейся кривой предшествующего нагружения $i - 1$.

Разница $\Delta M = M^{(i-1)} - M_j^{(i)}$ принимается за величину момента разгрузки, который вызывает изменение напряженно-деформированного состояния в сечении с координатой U_j в соответствии со свойствами упруго-пластического материала при уменьшении нагрузки [3, 4]. Схема реализации этой ситуации иллюстрируется рисунком 4, где показана кривая обратного деформирования (ДОН) для точки S предыдущего нагружения и деформации материала после разгрузки. В связи с выбором достаточно малой длины разбиения стержня на исходные элементарные участки, при проведении

расчетов деформации разгрузки $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_{уп}$ на всех уровнях нагружения оставались на кривых ДОН в пределах упругих.

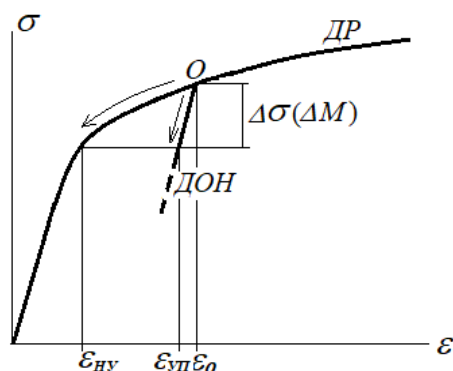


Рис. 4. Деформации при разгрузке нелинейно-упругого ($\varepsilon_{ну}$) и упруго-пластического ($\varepsilon_{уп}$) материалов

Особенностью ситуации в рассматриваемой точке является уменьшение деформации ε при возросшей общей нагрузке F , и, как видно из рисунка 4, оно существенно ниже, чем при нелинейно-упругом подходе. По найденному таким образом значению $\varepsilon_j = \varepsilon_{уп}$ определяется кривизна \varkappa нейтральной линии стержня при изгибе, которая оказывается больше прогнозируемой по схеме нелинейно-упругого материала и вызывает значительно более заметный изгиб стержня. Используя это ее значение и кривизны в двух предыдущих точках S_{j-1} и S_{j-2} кривой текущего нагружения, путем интегрирования выражения $\varkappa = d\omega / ds$ на участке $S_j \div S_{j-1}$ находим величину угла поворота сечения ω в точке U_j и далее по определениям $\cos\omega = dU / ds$ и $\sin\omega = dW / ds$ получаем новые значения U_j и W_j . По приращениям этих координат уточняется значение дуговой координаты S_j . Все интегрирования выполнены через аппроксимацию соответствующей кривой по трем точкам.

Проводя процедуру вычислений по всем точкам от P до A , находим в координатах U, W значение перемещений и угла поворота в заделке и далее определяем положение всех точек оси стержня [1]. Из рисунка 5, а, б видно, что положение точек и углы поворота сечений с ростом силы F сравнительно с нелинейно-упругим решением (рисунок 3) меняются очень существенно.

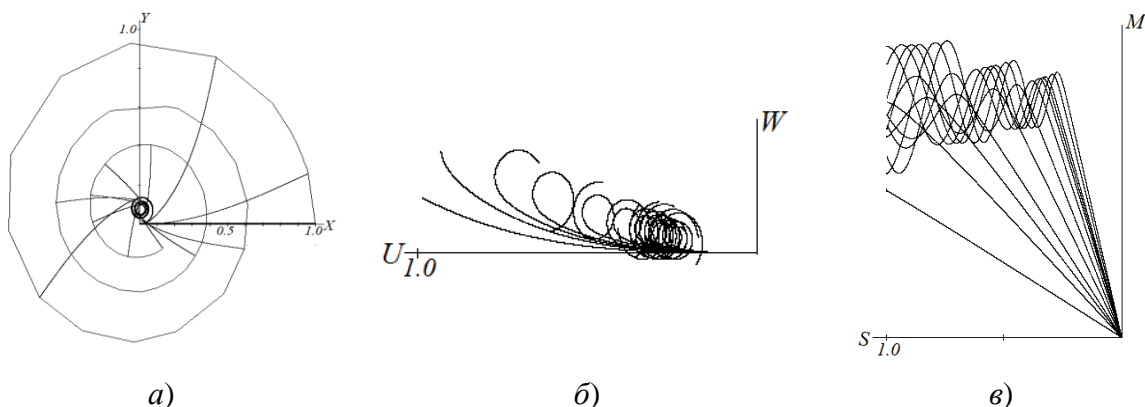


Рис. 5. Упруго-пластический материал без площадки текучести ($p = 0$)

Так как форма кривой на участке PA изменилась, то, используя ее теперь как исходную на текущем нагружении, можно повторить процедуру *уточнения* положения точек этого участка до достижения приемлемой стабильности результата. Как оказалось в нашем случае, решение идет устойчиво и позволяет ограничиться только ранее найденным результатом.

Более точное решение задачи можно получить, уменьшив первоначально выбранный шаг изменения внешней нагрузки ΔF . На рисунке 6 показаны зависимости угла поворота нагруженного торца $\omega_B(i)$ при возрастании силы до $F_{max} = 0,714$ для $N = 6, 12, 18, 24$. В связи с итерационным способом решения графики не являются вполне гладкими, но в целом демонстрируют сходимость к некоторым предельным значениям во всем диапазоне нагружения. Например, для $F = 0,628$ значения ω_B составляют $930,1^\circ, 985,1^\circ, 993,8^\circ, 999,0^\circ$, для $F = 0,586$ значения ω_B равны $877,1^\circ, 899,0^\circ, 908,6^\circ, 913,7^\circ, 915,4^\circ$ при указанных значениях N .

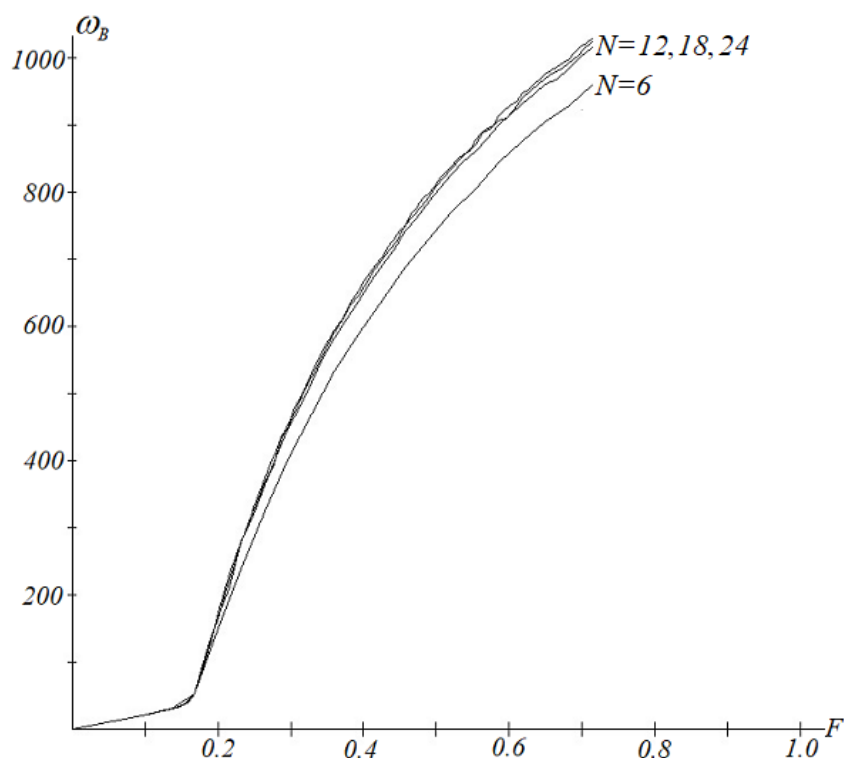


Рис. 6. Зависимость $\omega_B(F)$ при различной величине шага возрастания нагрузки

С ростом нагрузки и появлением значительных углов поворота сечений имеют место повторные пересечения кривых моментов текущего $M^{(i)}$ и предшествующего $M^{(i-1)}$ нагружений (рисунок 5), что свидетельствует о наличии возвратов точек в состоянии догрузки и было учтено в вычислительной программе.

На рисунках 7 и 8 показаны результаты решения задачи для материала с площадью текучести, у которого участок упрочнения начинается с точки $\varepsilon_U = 10\varepsilon_T$ (т. е., при $p = 9$).

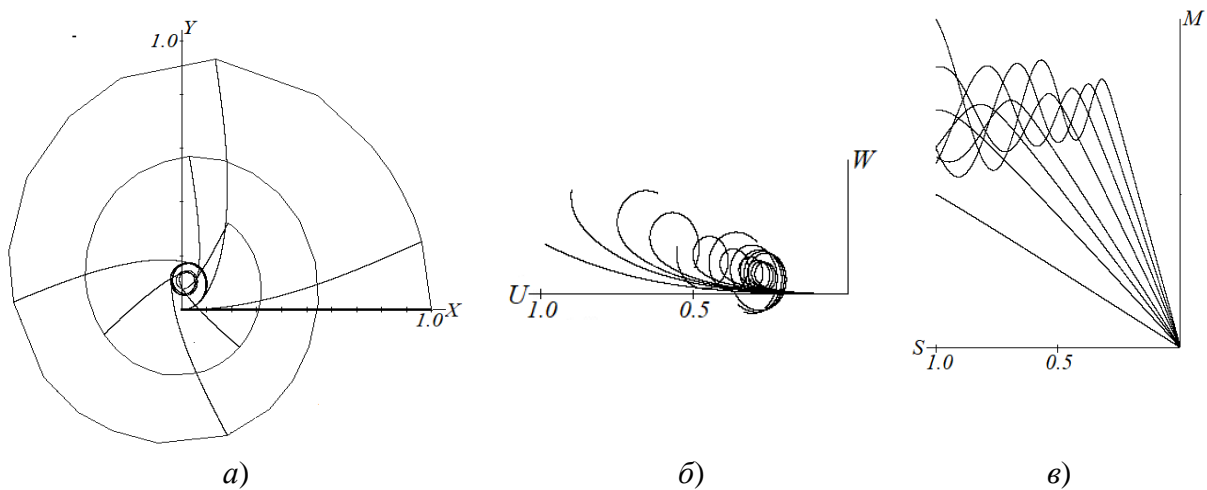


Рис. 7. Упруго-пластический материал с площадкой текучести ($p = 9$)

Для большей наглядности результатов на рисунке 8 показаны кривые UW и распределение напряжений и деформаций в поверхностном слое стержня из упруго-пластического материала при одинаковом уровне нагружения $F = 0,628$, $N = 24$.

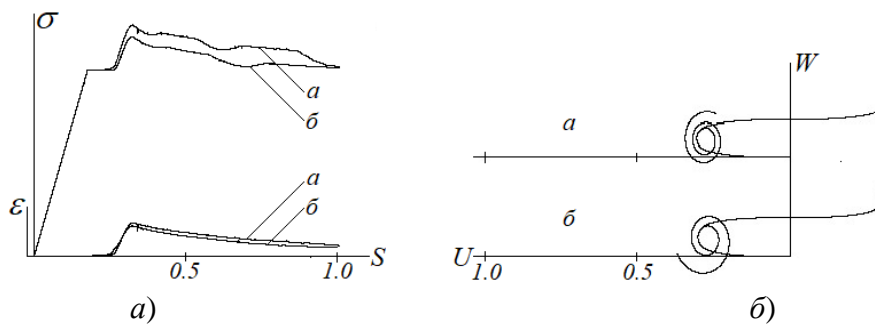


Рис. 8. Напряжения и деформации и форма изогнутой оси стержня: $a - p = 0$, $b - p = 9$

Как видно из рисунков 7–8, наличие площадки текучести на диаграмме растяжения материала не вносит существенных изменений в картину напряженно-деформированного состояния стержня. Отличия от предыдущего случая сводятся к уменьшению интенсивности изгиба, приводящему к некоторому падению величин напряжений и деформаций, а также уменьшению кривизны изогнутой оси стержня в соответствующих точках и угла поворота нагруженного конца стержня.

Заключение. Считая, что в целом решение получено с достаточной точностью, можно отметить некоторые особенности поведения стержня:

1. С ростом нагрузки имеет место резкое отличие формы изогнутой оси упруго-пластического стержня от ее формы для нелинейно-упругого материала.

2. После поворота торцевого сечения на угол $\omega > 90^\circ$ максимум момента переходит из заделки в точку K , где $\omega_K = 90^\circ$ и $S = S_K^{(i)}$. При продолжающемся увеличении силы на осевой линии стержня появляются завитки и петли, в соответствии с чем зависимость $M(S)$ при $S > S_K$ постепенно приобретает волнообразный характер, а ее максимумы превосходят M_K и сдвигаются в сторону закрепленного торца стержня, причем максимум M может не находиться в сечении заделки. Положения локальных максимумов и минимумов изгибающего момента соответствуют плечу силы, а сам момент $M(S)$

на всей длине стержня не меняет знака, что отражает принципиальное различие в поведении упругого и пластического материалов.

3. Максимумы деформаций и напряжений материала имеют место в точке K и дальше уменьшаются в сторону заделки, непосредственно не следуя изменениям $M(S)$, что объясняется наличием разгрузки материала на этом участке стержня. Зависимость $\sigma(\epsilon)$ вдоль оси стержня имеет достаточно сложную форму, на которую кроме уровня нагрузки оказывает влияние характер упрочнения стержня. Так как положение точки K связано только с известной ДР материала и нагрузкой, то это обстоятельство значительно облегчает определение допустимого уровня нагружения и прогноз положения места разрушения.

4. При подходе к задаче с позиций малых перемещений при $F_B = M_B / L_0$ деформация достигает своего предельного значения ϵ_B , а в рассмотренной задаче при силе $F = F_{MAX}$, превосходящей F_B более, чем в 2,4 раза, максимальная деформация материала составила всего $\epsilon_{MAX} \approx 0,051$ при принятом $\epsilon_B = 0,50$. Расчеты для более низкого значения $\epsilon_B = 0,2$ дают $\epsilon_{MAX} \approx 0,033$. Таким образом, учет геометрической нелинейности задачи позволяет выявить значительный ресурс работоспособности изогнутого элемента и принадлежит перспективным направлениям дальнейших исследований.

5. Наличие площадки текучести на диаграмме растяжения материала приводит к уменьшению угла поворота нагруженного торца и изменению формы изогнутой оси стержня, выражающемуся в увеличении ее радиуса кривизны в соответствующих точках.

Использованная методика решения задачи может быть применена к решению аналогичных задач о напряженно-деформированном состоянии стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Холодарь. Напряженно-деформированное состояние гибкого консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, БНТУ, 2021, вып. 36, С.103 – 108

2. Б. Г. Холодарь. Диаграммы обратного нагружения и напряжения в сечении изогнутого стержня при реверсе нагрузки // Сборник «Механика. Исследования и инновации», Гомель, БелГУТ, 2021, вып. 2, С. 234 – 243

3. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. М.: ГИТТЛ, 1969 г. – 420 с.

4. Н. Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968 г. – 400 с.

Поступила: 21.02.2022

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МАЛОЙ КАПЛИ ПО СМАЧИВАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

Авдейчик Е. В., Конон П. Н.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Движению капель и ривулетов по твердой плоской поверхности посвящено большое количество теоретических [1–3] и экспериментальных [4–7] работ. При этом полное моделирование течения внутри перемещающегося ограниченного слоя является достаточно сложной задачей, ввиду чего, как правило, вводятся различные упрощения. Например, можно избежать необходимости решать уравнения Навье-Стокса для определения движения жидкости в капле и перейти непосредственно к уравнению свободной поверхности, если предположить, что жидкий слой является тонким [1, 2]. Основную сложность при таком моделировании составляет выбор способа определения динамического краевого угла смачивания. Множество работ посвящено данной проблеме, в частности, в статье [8] произведен обзор различных моделей краевого угла и предложена собственная, а работы [9], [10] содержат эмпирическое исследование динамического угла смачивания конкретно между водой и парафином. В работе [1] использовано граничное условие скольжения Навье. Однако при переменных внешних условиях решение задачи о движении капли даже в упрощенной постановке требует значительных вычислительных мощностей. Причем для большинства прикладных целей является излишней достигаемая при этом точность, которая к тому же зависит от правильного подбора теории для определения динамического краевого угла, что и в настоящее время является предметом дискуссии. К таким инженерным задачам можно отнести, например, различные производственные процессы, осуществляемые центробежно-дисковым способом. В связи с этим в данной работе предлагается более простая модель движения малой капли по смачиваемой плоской вращающейся поверхности. Случай движения при отсутствии смачивания описан, например, в работе [3]. Новая модель может быть применена и к такой задаче путем выбора определенных значений входных параметров.

Постановка задачи и вывод уравнений движения. Рассматривается движение капли по горизонтальной плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω . Капля имеет малый объем, то есть ее характеристический размер намного меньше расстояния, которое ее центр масс C преодолевает в рассматриваемый промежуток времени, а также расстояния до оси вращения на протяжении всего времени движения. В качестве такого характеристического размера примем аппликату z точки C во вращающейся вместе с подложкой декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой соответствует поверхности диска, а начало координат O лежит на оси его вращения. Координаты x и y – это соответственно абсцисса и ордината точки C капли, или координаты проекции B этой точки на поверхность основания в системе Oxy . В следствие малости массы капли и горизонтального расположения подложки будем считать незначительным вклад силы тяжести в характеристики ее формы и движения.

Капля скользит по смачиваемой поверхности и оставляет на ней след, ввиду чего постепенно теряет вещество. Данный след будем рассматривать не как часть капли, а как отделившуюся массу. Вблизи капли он представляет собой слой жидкости малой толщины $h \ll z$. Будем полагать, что продольный и поперечный размеры проекции ка-

пли на плоскость Oxy имеют тот же порядок, что и характеристический размер z , который будем называть условным радиусом капли.

Введем следующие обозначения:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{z} = w, \quad V_B = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (1)$$

где u, v, w – компоненты относительной скорости центра масс C во вращающейся системе координат $Oxyz$, V_B – величина скорости движения точки B в этой системе. Здесь и далее точка обозначает производную по времени t , если не указано иное. Обозначим (ξ, η) координаты в системе Oxy точки A – геометрического центра проекции капли на диск. Пусть δ – длина отрезка AB , θ – угол между положительным направлением Ox и вектором AB , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного значения z . Тогда:

$$\delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad c = \delta^{-1}(x - \xi) = \cos \theta, \quad s = \delta^{-1}(y - \eta) = \sin \theta. \quad (2)$$

Для упрощения задачи будем описывать форму капли единственным параметром δ / z , который представляет собой тангенс угла ACB . Таким образом, в рассматриваемой постановке капля имеет только две независимые характеристики размера: δ и z . При этом будем полагать, что существуют безразмерный положительный параметр P_0 и безразмерный параметр P_1 ($0 < P_1 < 1$) такие, что если $\delta \leq P_0 z$ и точка B приближается к точке A или $\delta \leq P_0 P_1 z$, то точка A остается на месте, поскольку поверхностное натяжение следа уравнивается поверхностными силами капли. Данное допущение обуславливает возможность остановки точки A , а затем и капли в целом, при δ / z меньшем, чем предельное значение $P_0 P_1$, а также запрещает точке A опережать точку B при движении относительно поверхности диска. Кроме того, это вводит понятие предельной формы $\delta = P_0 P_1 z$, до достижения которой изначально покоящаяся капля не начинает скольжение по поверхности, что согласуется с опытными данными. Если $\delta = P_0 z$ и точка B стремится удалиться от точки A , то будем считать, что равенство $\delta = P_0 z$ сохраняется, а точка A движется по направлению (c, s) к точке B с необходимой для этого скоростью за счет преобладания сил поверхностного натяжения в капле над поверхностными силами следа. При этом неравенство $\delta > P_0 z$ не достигается ни при каких условиях, то есть форма капли не может быть сильно вытянутой, что также имеет эмпирическое основание. При $P_0 P_1 z < \delta < P_0 z$ и движении B в направлении от A точка A также движется по направлению (c, s) , однако со скоростью, недостаточной для сохранения параметра δ / z постоянным. P_0 и P_1 в общем случае могут зависеть от характера течения внутри капли и от ее формы. На протяжении почти всего пути, за исключением начала и конца, выполняется $\delta = P_0 z$ и величина P_0 определяет форму капли. В рассматриваемой задаче примем P_0 и P_1 постоянными. Данные допущения могут быть выражены следующими уравнениями:

$$\text{Если } cu + sv \leq 0 \text{ или } \delta \leq P_0 P_1 z, \text{ то } \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0, \quad \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = V_A = 0; \quad (3.1)$$

$$\text{если } cu + sv > 0 \text{ и } \delta = P_0 z, \text{ то } \dot{\xi} = cV_A, \quad \dot{\eta} = sV_A, \quad \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = V_A = cu + sv - P_0 w, \quad (3.2)$$

где V_A – модуль скорости точки A относительно поверхности диска. При $cu + sv > 0$ и $P_0 P_1 z < \delta < P_0 z$ зависимость V_A от $cu + sv$ полагается линейной с такими коэффициентами, чтобы функция $V_A(cu + sv, \delta)$ была непрерывной. Можно отметить, что на участ-

ках движения капли, где радиус кривизны ее траектории намного больше z , вектор (c, s) указывает примерное направление скорости точки B .

Пусть практически на всем рассматриваемом промежутке времени скорости движения боковых и заднего фронтов следа за счет стягивания под действием поверхностного натяжения малы в сравнении со скоростью V_A в достаточной мере, чтобы было допустимо ими пренебречь и считать, что ширина следа пропорциональна z , а масса, теряемая каплей на единице пройденного ей пути, не зависит от скорости точки A . Также будем полагать, что поперечное сечение следа вблизи капли в различные моменты времени имеет примерно одинаковую форму, значит, $h/z = \text{const}$. Тогда будем описывать массу капли m и ее изменение следующими формулами:

$$m = \rho z^3 f_m, \quad \dot{m} = -\rho h z f_t V_A, \quad h = f_h z, \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости, f_m, f_t – безразмерные параметры, не являющиеся малыми или очень большими значениями, f_h – малый постоянный безразмерный параметр.

Пограничный слой в капле будем считать достаточно тонким в сравнении с z , при этом его толщина должна оставаться значительно больше высоты возможных неровностей подложки. Параметры p и q определим следующим образом:

$$u_r = u - zq, \quad v_r = v + zp, \quad V_r = \sqrt{u_r^2 + v_r^2}, \quad (5)$$

где u_r и v_r – проекции скорости жидкости относительно поверхности диска непосредственно над пограничным слоем на оси Ox и Oy соответственно, V_r – величина этой скорости. То есть. Вектор (p, q) в системе координат Oxy представляет собой аналог угловой скорости массы в капле, если бы жидкость внутри двигалась как твердое шарообразное тело S , катящееся с проскальзыванием по диску. В предлагаемом упрощении рассматривается подобная модель, отличающаяся тем, что тело S , представляющее основную часть капли, может не являться твердым шаром, а центр масс C тела S притягивается по некоторому закону к точке A , что соответствует тормозящему действию силы поверхностного натяжения. Таким образом, параметры p и q являются единственными рассматриваемыми характеристиками течения жидкости внутри капли. Вектор (p, q) будем называть условной угловой скоростью капли. Кинетический момент K капли относительно точки C будем определять по формуле:

$$(K_x, K_y) = \rho f_k z^5 (p, q), \quad (6)$$

где K_x, K_y – соответственно проекции на оси Ox и Oy кинетического момента K , f_k – безразмерный параметр. Если рассматривать тело S как абсолютно твердый шар, то значения f_m и f_k принимают конкретные значения $f_m = 4\pi/3$, $f_k = 8\pi/15$. Однако в более общем случае эти коэффициенты отличаются и могут изменяться в процессе движения капли.

Будем полагать, что на тело S действует только две внешние силы, имеющие ненулевые проекции на плоскость Oxy : равнодействующая сил поверхностного натяжения $F_\sigma = (F_{\sigma x}, F_{\sigma y}, F_{\sigma z})$, приложенная к C по направлению CA , и равнодействующая сил вязкого трения о поверхность диска $F_\mu = (F_{\mu x}, F_{\mu y}, 0)$, приложенная к B . Пусть горизонтальные компоненты данных сил определяются формулами:

$$(F_{\sigma x}, F_{\sigma y}) = -\sigma f_\sigma (x - \xi, y - \eta), \quad (7)$$

$$(F_{\mu x}, F_{\mu y}) = -zf_{\mu} \sqrt{\rho \mu z V_r} (u_r, v_r), \quad (8)$$

где f_{σ}, f_{μ} – безразмерные параметры. Формула (7) получена на основе анализа размерности с учетом введенных допущений, формула (8) – из оценки силы сопротивления пластины при ламинарном обтекании и предположения тонкого пограничного слоя. При этом его толщина предполагается пропорциональной $(\mu z / (\rho V_r))^{1/2}$ [11], следовательно последнее предположение допустимо при достаточно маленькой вязкости и достаточно большой скорости V_r на протяжении основной части движения. Сила F_{σ} не дает момента относительно точки C , сила F_{μ} создает относительно этой точки момент $M_{\mu} = (M_{\mu x}, M_{\mu y}, 0)$, где:

$$M_{\mu x} = zF_{\mu y}, \quad M_{\mu y} = -zF_{\mu x}. \quad (9)$$

В модели также будем учитывать аналог момента трения качения, возникающий за счет перепада давления у поверхности диска. Пусть он определяется по формуле:

$$\vec{M}_p = (M_{px}, M_{py}, 0) = -\rho z^5 f_p \alpha (p, q, 0), \quad \alpha = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (10)$$

где f_p – безразмерный параметр, α – величина вектора условной угловой скорости капли. В виду малости капли пренебрежем возможными моментами сил инерции. Уравнения движения капли в относительной системе координат получаются из теоремы об изменении количества движения системы (11) и теоремы об изменении кинетического момента системы (12) [12]:

$$m(\dot{u} - 2\omega v - \omega^2 x) + \dot{m}u = F_{\mu x} + F_{\sigma x}, \quad m(\dot{v} + 2\omega u - \omega^2 y) + \dot{m}v = F_{\mu y} + F_{\sigma y}, \quad (11)$$

$$\dot{K}_x - \omega K_y + \dot{m}z v = M_{\mu x} + M_{px}, \quad \dot{K}_y + \omega K_x - \dot{m}z u = M_{\mu y} + M_{py}. \quad (12)$$

Параметры $f_m, f_t, f_k, f_{\sigma}, f_{\mu}, f_p$ в общем случае могут зависеть от характеристик течения в капле, ее скорости, размера и формы. В рамках рассматриваемой модели примем все эти параметры постоянными и определяемыми, как и f_h , только свойствами взаимодействующих фаз. Таким образом, для конкретных веществ и характеристик поверхности подложки данные параметры следует определять экспериментально, что требует дополнительного эмпирического исследования в данной области. Из введенных предположений о постоянстве коэффициентов f_m, f_t и f_h , а также из (3.2, 4) следует, что при достаточно большой скорости движения капли ширина ее следа будет уменьшаться примерно по линейной зависимости от пройденного точкой A пути. Данное утверждение уже является простым для опытной проверки. В частности, оно достаточно точно описывает движение капли воды по деревянной поверхности. Пусть R – некоторое характеристическое расстояние. Определим следующие безразмерные параметры:

$$P_2 = \frac{f_t f_h}{3f_m}, \quad P_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \omega}} \frac{f_{\mu}}{f_m R}, \quad P_4 = \frac{f_{\sigma} \sigma}{f_m R^3 \omega^2 \rho}, \quad P_5 = \frac{f_m}{f_k}, \quad P_6 = \frac{f_p}{f_k}, \quad (13)$$

где P_2 – малый параметр, характеризующий скорость потери массы; P_3, P_4, P_5, P_6 описывают степени влияния на движение капли сил вязкого трения и поверхностного натяжения, соотношение инерционных характеристик и вклад внутреннего перепада давления соответственно. В рассматриваемой задаче параметры P_3, P_4 также принимаются

малыми. Пусть H – значение z в начальный момент времени $t = 0$, так что $z(0) = H$. Если $P_2 = 0$, то есть след не образуется и капля имеет постоянную массу, то в качестве R можно выбрать, например, радиус диска, если он известен, или расстояние до оси вращения в начальный момент, значит, $x^2(0) + y^2(0) = R^2$, или, если движение исследуется на известном промежутке времени T , то $R = (x^2(0) + y^2(0))^{1/2} \text{Exp}(T\omega)$. Если $P_2 > 0$ и движение капли исследуется на всем времени ее существования, то можно принять $R = H / P_2$. Перейдем к безразмерным величинам в соответствии со следующими соотношениями:

$$t = \omega^{-1}t_0, \quad x = Rx_0, \quad y = Ry_0, \quad z = Rz_0, \quad \xi = R\xi_0, \quad \eta = R\eta_0, \quad p = \omega p_0, \quad q = \omega q_0. \quad (14)$$

Пусть тогда:

$$u = \omega Ru_0, \quad v = \omega Rv_0, \quad V_A = \omega RV_{A0}, \quad V_B = \omega RV_{B0}, \quad x_0 - \xi_0 = \Phi_0 z_0, \quad y_0 - \eta_0 = \Psi_0 z_0, \quad (15)$$

$$u_{r0} = u_0 - z_0 q_0, \quad v_{r0} = v_0 + z_0 p_0, \quad V_{r0} = \sqrt{u_{r0}^2 + v_{r0}^2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}. \quad (16)$$

Введем для упрощения записи следующие обозначения:

$$\beta_0 = \Phi_0 u_0 + \Psi_0 v_0, \quad \vartheta_0 = \sqrt{\Phi_0^2 + \Psi_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{\beta_0 \chi(\beta_0) (\vartheta_0 - P_0 P_1) \chi(\vartheta_0 - P_0 P_1)}{P_0^2 (1 - P_0 P_2) (1 - P_1)}, \quad (17)$$

где χ – функция Хевисайда, то есть $\chi(\varepsilon) = [\varepsilon \geq 0]$, где $[]$ – скобка Айверсона. Тогда из (1–17) получим итоговую систему дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\dot{t}_0 = z_0^{5/2}, \quad \dot{x}_0 = z_0^{5/2} u_0, \quad \dot{y}_0 = z_0^{5/2} v_0, \quad \dot{z}_0 = -P_2 z_0^{5/2} \lambda_0, \quad (18.1)$$

$$\dot{\Phi}_0 = z_0^{3/2} (u_0 - P_0^{-1} (1 - P_0 P_2) \lambda_0 \Phi_0), \quad \dot{\Psi}_0 = z_0^{3/2} (v_0 - P_0^{-1} (1 - P_0 P_2) \lambda_0 \Psi_0), \quad (18.2)$$

$$\dot{u}_0 = z_0^{5/2} (2v_0 + x_0) + 3P_2 z_0^{3/2} \lambda_0 u_0 - P_3 z_0 V_{r0}^{1/2} u_{r0} - P_4 z_0^{1/2} \Phi_0, \quad (18.2)$$

$$\dot{v}_0 = z_0^{5/2} (-2u_0 + y_0) + 3P_2 z_0^{3/2} \lambda_0 v_0 - P_3 z_0 V_{r0}^{1/2} v_{r0} - P_4 z_0^{1/2} \Psi_0, \quad (18.3)$$

$$\dot{p}_0 = z_0^{5/2} (q_0 - P_6 \alpha_0 p_0) + (5z_0^{3/2} p_0 + 3P_5 z_0^{1/2} v_0) P_2 \lambda_0 - P_5 P_3 V_{r0}^{1/2} v_{r0}, \quad (18.3)$$

$$\dot{q}_0 = -z_0^{5/2} (p_0 + P_6 \alpha_0 q_0) + (5z_0^{3/2} q_0 - 3P_5 z_0^{1/2} u_0) P_2 \lambda_0 + P_5 P_3 V_{r0}^{1/2} u_{r0}.$$

где точка означает производную по условному безразмерному времени t_0 , растягивающему по мере уменьшения радиуса капли действительное безразмерное время t_0 по закону, описанному первым дифференциальным уравнением системы (18). В (17, 18) отсутствует явная запись условия $\delta \leq P_0 z$, или $\vartheta_0 \leq P_0$, однако оно достигается автоматически при решении (16–18). Начальные условия при моделировании будем выбирать следующим образом:

$$t_0(0) = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad y_0(0) = Y_0, \quad z_0(0) = H_0 = H/R, \quad \Phi_0(0) = 0, \quad \Psi_0(0) = 0, \quad (19)$$

$$u_0(0) = Y_0, \quad v_0(0) = 0, \quad p_0(0) = 0, \quad q_0(0) = 0,$$

где Y_0 – начальное безразмерное расстояние от капли до оси вращения. В данной постановке направление оси Oy выбрано по вектору OB в начальный момент времени. Считается, что диск перешел от покоя к вращению с заданной угловой скоростью ω в

момент $t = 0$ резко, так что капля не успела изменить форму по сравнению с состоянием равновесия в отсутствие сил и точки A и B совпадают в начальный момент времени. Центр масс C капли, как и практически весь ее объем, за исключением тонкого пограничного слоя у поверхности подложки, в начальный момент времени остался неподвижен в абсолютной системе координат.

Результаты моделирования и анализ уравнений движения.

На рисунках 1–2 представлены траектории движения точки A (рисунок 1, a) в безразмерной вращающейся системе координат (ξ_0, η_0) , а также графики зависимостей от безразмерного времени t_0 безразмерных условного радиуса z_0 (рисунок 1, b), скорости V_{A0} точки A (рисунок 2, a) и условной угловой скорости α_0 (рисунок 2, b). На всех рисунках сплошным черным графикам соответствуют $Y_0 = 0,5$, $H_0 = 0,01$, $P_0 = 1$, $P_1 = 0,5$, $P_2 = 0,008$, $P_3 = 0,002$, $P_4 = 0,00002$, $P_5 = 2$, $P_6 = 0,5$. Остальные графики демонстрируют эффект от уменьшения одного из параметров при неизменных значениях остальных входных данных. Так, красным штриховым линиям с коротким штрихом соответствует значение $P_2 = 0,006$, черным штрихпунктирным линиям с одной точкой – $P_3 = 0,001$, черным пунктирным – $P_4 = 0,0000125$, синим штрихпунктирным с двумя точками – $P_5 = 0,5$, черным штриховым графикам с длинным штрихом – $P_6 = 0,1$.

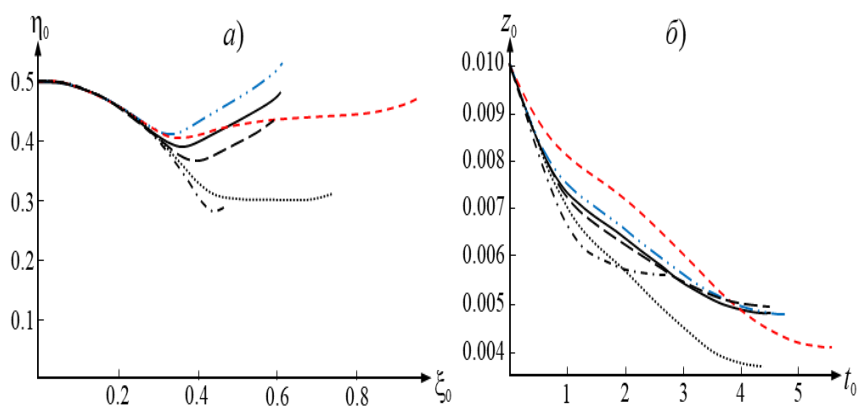


Рис. 1. Траектории движения (a) и графики изменения размеров (b) капель

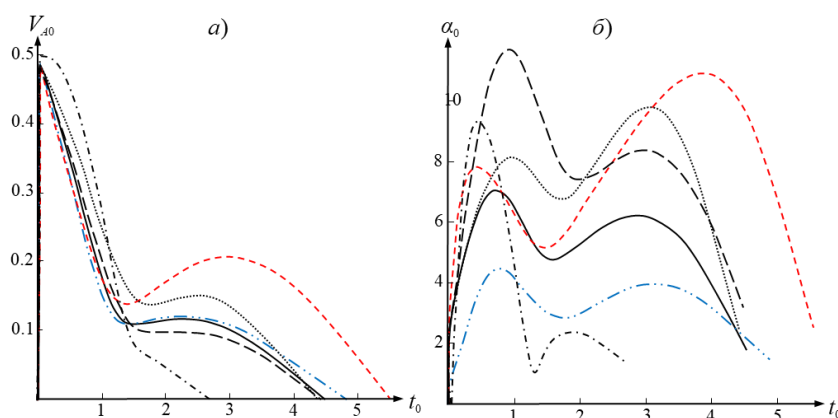


Рис. 2. Графики изменения скоростей (a) и условных угловых скоростей (b) капель

Проанализировав систему (16–19) и результаты моделирования на ее основе при различных входных параметрах, можно сделать ряд общих выводов, позволяющих дать

качественное описание движения капли. Оно может быть условно разделено на два основных этапа, во время первого из которых доминирует окружная компонента скорости, то есть расстояние OA меняется слабо по отношению к первоначальному значению, а во время второго – возрастает вклад радиальной компоненты и капля начинает удаляться от оси вращения. Обозначим эти этапы I и II соответственно. Этап I может быть также разделен на периоды Ia , Ib и Ic , сменяющие друг друга в порядке перечисления. На протяжении почти всего пути капли условная угловая скорость достаточно мала, чтобы в приближенном анализе системы (18) при оценке вязких сил можно было заменить u_{r0} и v_{r0} на u_0 и v_0 соответственно. Также при приближенном описании изменения скорости точки A можно полагать ее примерно равной скорости точки B почти на всем времени движения, кроме малых периодов разгона и остановки капли. Первые два периода Ia , Ib очень короткие и определяются неравенствами $\delta \leq P_0 P_1 z$ и $P_0 P_1 z < \delta < 0,99 P_0 z$ соответственно. Вся остальная часть этапа I относится к периоду Ic . Периоду Ia соответствуют значения $V_{A0} = 0$, $z_0 = 0$, быстрый рост безразмерной условной угловой скорости капли α_0 за счет доминирующей силы вязкого трения, а также падение скорости V_{B0} из-за силы трения и поверхностного натяжения. За время периода Ib скорость V_{A0} возрастает примерно до значения Y_0 , безразмерный условный радиус капли z_0 начинает постепенно уменьшаться за счет образования следа, рост α_0 замедляется, а в некоторых случаях может смениться уменьшением. Периоду Ic на графиках $V_{A0}(t_0)$ преимущественно соответствует быстрое падение скорости, на графиках $\alpha_0(t_0)$ – первый пик. В это время в уравнениях (18.2), характеризующих изменение скорости движения капли, по мере уменьшения z_0 начинают доминировать тормозящие силы вязкого трения и поверхностного натяжения, поскольку им соответствуют наименьшие показатели степеней z_0 . Поэтому скорость капли также начинает стремительно снижаться. Вязкие силы, способствующие росту α_0 уменьшаются за счет падения скорости капли, но их вклад растет по мере уменьшения z_0 , как можно видеть из (18.3). Противодействие этих двух эффектов и приводит к первому пику на графиках функции $\alpha_0(t_0)$. При достаточно малых P_4 наступает момент, когда в уравнениях (18.2) резко возрастет роль центробежных сил, описанных в (18.2) слагаемыми $z_0^{5/2} x_0$ и $z_0^{5/2} y_0$, после чего происходит переход к этапу II. Если капля сохранила достаточно массы, то начинается вторичный разгон, что отражается в увеличении V_{A0} , V_{B0} и α_0 . В этом случае в их графиках образуются вторые пики. Для V_{A0} , V_{B0} они намного меньше максимальных значений за время движения, поскольку из-за быстрого уменьшения z_0 слагаемые $z_0^{5/2} x_0$ и $z_0^{5/2} y_0$ в (18.2) не могут начать доминировать над тормозящими силами, представленными двумя последними слагаемыми в правой части уравнений (18.2).

Моделирование при различных значениях P_1 в диапазоне от 0,1 до 0,9 показало, что изменение этого параметра почти не влияет на характер движения, поэтому предлагается принять, например, $P_1 = 0,5$ для модели (16–19) в целом. Влияние параметра P_0 главным образом заключается в том, что слагаемые, соответствующие поверхностному натяжению, в правой части уравнений (18.2) пропорциональны ему. Остальные эффекты от изменения P_0 почти полностью сглаживаются подбором P_4 таким образом, чтобы произведение $P_0 P_4$ осталось неизменным. Таким образом, для описываемого класса задач удобно взять $P_0 = 1$, что избавит от необходимости проводить дополнительные эксперименты по определению этого параметра.

Рассмотрим движение капли при двух различных наборах входных параметров. Пусть при этом значения H_0 и $P_0 P_4$ для этих двух случаев неизменны, этап I длится примерно одинаковое время, а скорость капли при первом наборе входных значений на данном этапе преимущественно превышает скорость капли при втором наборе. Тогда из-за более быстрой потери массы в первом случае на этапе II возрастает роль сил сопротивления в уравнениях (18.2), что приводит к тому, что более быстрая на этапе I ка-

пля имеет меньшую скорость на этапе II. В частности, увеличение P_2 (реактивных сил) или Y_0 (начальной скорости и центробежных сил) и уменьшение P_3 (вязких сил), согласно виду (18.2), приводят к в среднем большей скорости на начальном этапе движения и, соответственно, меньшей скорости в дальнейшем. Параметр P_6 характеризует сопротивление вращению жидкости внутри капли. Уменьшение данного параметра ускоряет это вращение, обеспечивая большую разницу между V_{B0} и V_{r0} , что при изначально равных V_{B0} уменьшает V_{r0} , а значит, и трение о подложку, что ведет к большей скорости V_{B0} и V_{A0} на этапе I и меньшей – на этапе II. Как было отмечено ранее, на промежутке времени Ia в уравнениях (18.3) решающую роль играют слагаемые, отвечающие за вязкое трение, а значит, параметры P_3 и P_5 . Увеличение любого из них приводит к большей безразмерной условной угловой скорости α_0 и уменьшению V_{r0} . Увеличение только P_3 не приводит к уменьшению вязких сил в (18.2), поскольку в соответствующие слагаемые входят как V_{r0} , так и P_3 , причем вклад последнего существеннее. Увеличение только P_5 в свою очередь уже вызывает уменьшение вязких сил в (18.2) и, соответственно, увеличение скорости на этапе I, что ведет к уменьшению на этапе II. Поскольку P_0P_4 характеризует сопротивление за счет сил поверхностного натяжения, а соответствующее слагаемое в уравнениях (18.2) имеет самый маленький показатель степени z_0 , то увеличение P_0P_4 ведет к преимущественному уменьшению скорости на всем рассматриваемом промежутке времени, а не только на этапе I.

При уменьшении начального безразмерного условного радиуса H_0 , а значит, и z_0 как минимум в начале движения, в уравнениях (18.2) увеличивается вклад сил сопротивления, что ведет к преимущественно меньшей скорости капли во все время движения. Также стоит отметить, что изменение H_0 и Y_0 можно свести к изменению других параметров. Пусть $t_0 = t_{00}$, $x_0 = x_{00}$, $y_0 = y_{00}$, $z_0 = z_{00}$, $\Phi_0 = \Phi_{00}$, $\Psi_0 = \Psi_{00}$, $u_0 = u_{00}$, $v_0 = v_{00}$, $p_0 = p_{00}$, $q_0 = q_{00}$ – решение системы (16–19) при начальных условиях $Y_0 = Y_{00}$, $H_0 = H_{00}$ и значениях определяющих параметров $P_i = P_{i0}$ ($i = 0, \dots, 6$), а $t_0 = t_{01}$, $x_0 = x_{01}$, $y_0 = y_{01}$, $z_0 = z_{01}$, $\Phi_0 = \Phi_{01}$, $\Psi_0 = \Psi_{01}$, $u_0 = u_{01}$, $v_0 = v_{01}$, $p_0 = p_{01}$, $q_0 = q_{01}$ – решение системы (16–19) при $Y_0 = Y_{01}$, $H_0 = H_{01}$ и $P_i = P_{i1}$. Тогда, если параметры P_i для двух случаев связаны соотношениями (20), то решения удовлетворяют (21).

$$P_{00} = H_{01}H_{00}^{-1}P_{01}, P_{10} = P_{11}, P_{20} = H_{00}H_{01}^{-1}P_{21}, P_{30} = H_{00}^{3/2}Y_{01}^{1/2}H_{01}^{-3/2}Y_{00}^{-1/2}P_{31}, \quad (20)$$

$$P_{40} = H_{00}^3Y_{00}H_{01}^{-3}Y_{01}^{-1}P_{41}, P_{50} = P_{51}, P_{60} = H_{00}Y_{01}H_{01}^{-1}Y_{00}^{-1}P_{61}.$$

$$\tau_{00} = H_{01}^{5/2}H_{00}^{-5/2}\tau_{01}, (x_{00}, y_{00}, u_{00}, v_{00}) = Y_{00}Y_{01}^{-1}(x_{01}, y_{01}, u_{01}, v_{01}), z_{00} = H_{00}H_{01}^{-1}z_{01}, \quad (21)$$

$$(\Phi_{00}, \Psi_{00}) = H_{01}H_{00}^{-1}(\Phi_{01}, \Psi_{01}), (p_{00}, q_{00}) = H_{01}H_{00}^{-1}Y_{00}Y_{01}^{-1}(p_{01}, q_{01}).$$

Отсюда следует, что можно определить, например, $Y_0 = 0,5$, $H_0 = 0,01$, а при отличающихся начальных условиях переходить к данным значениям, используя формулы (20), (21). Таким образом, в рассматриваемой задаче остается только пять ключевых параметров (13) из девяти введенных.

Заключение.

На основе вводимых допущений и метрических соображений получена, приведена к безразмерному виду и исследована численно и теоретически система обыкновенных дифференциальных уравнений движения малой капли по вращающейся плоской горизонтальной смачиваемой поверхности. Проанализировано влияние на характер движения в безразмерном виде девяти введенных определяющих параметров, в результате чего из них выделено пять ключевых характеристик. Данная модель может быть использована в производстве волокон и порошков и при нанесении смазок и покрытий центробежно-дисковым способом для определения соответственно диаметров образующихся частиц и нитей и распределения толщины пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belinov, E. S. A thin drop sliding down an inclined plate / E. S. Belinov, M.S. Belinov // *Journal of Fluid Mechanics*. – Cambridge University Press, 2015. – Vol. 773. – P. 75–102. – doi: 10.1017/jfm.2015.226.
2. Schwartz, L. W. On the shapes of droplets that are sliding on a vertical wall / L. W. Schwartz, D. Roux, J. J. Cooper-White // *Physica D Nonlinear Phenomena*. – 2005. – Vol. 209, No. 1. – P. 236–244. – doi: 10.1016/j.physd.2005.07.001.
3. Абрамович А. Е. Приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске / А. Е. Абрамович, Е. В. Авдейчик, П. Н. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 36.
4. Winkels, K. G. Receding contact lines: From sliding drops to immersion lithography / K. G. Winkels, I. R. Peters, F. Evangelista, M. Riepen, A. Daerr, L. Limat, J. H. Snoeijer // *The European Physical Journal Special Topics*, 2011. – Vol. 192. – P. 195–205. – doi: 10.1140/epjst/e2011-01374-6.
5. Bikerman, J. J. Sliding of drops from surfaces of different roughnesses / J. J. Bikerman // *Journal of Colloid Science*. – 1950. – Vol. 5, Issue 4. – P. 349–359.
6. Конон П. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон, А. Е. Кулаго, Г. Н. Сицко, Н. П. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск : БНТУ, 2016. – Вып. 31. – С. 87–94.
7. Дехтярь Р. А. Переходные режимы течения при гравитационном стекании rivuleтов по нижней стороне наклонной пластины / Р. А. Дехтярь, В. Е. Накоряков, В. В. Овчинников, Е. Ю. Слесарева // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2015. – Т. 326, № 8. – С. 102–109.
8. Shikhmurzaev, Y. D. The moving contact line on a smooth solid surface / Y.D. Shikhmurzaev // *International Journal of Multiphase Flow*. – Pergamon Press Ltd, 1993. – Vol. 19, No. 4. – P. 589–610.
9. Yarnold, G. D. The Angle of Contact Between Water and Wax / G. D. Yarnold, B. J. Mason // *Proceedings of the Physical Society Section B*. – 1949. – Vol. 62, No. 2. – P. 125–129. – doi: 10.1088/0370-1301/62/2/306.
10. Ablett, R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water / R. Ablett // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 6*, 1923. – Vol. 46, Issue 272. – P. 244–256.
11. Ландау Л. Д. Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1987. – 736 с.
12. Вярвильская О. Н. Теоретическая механика : учеб. Пособие / О. Н. Вярвильская, Д. Г. Медведев, В. А. Савенков, В. П. Савчук; под редакцией Д. Г. Медведева. – Минск : БГУ, 2006. – 287с. : ил. – 500 экз. – ISBN 985-485-526-0.

Поступила: 31.01.2022

СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ НА ГИБРИДНОМ ПРИВОДЕ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

Кузнецов В. В., Марко А. Ф., Карпович С. Е.

УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск

Введение. Эффективным средством в реализации современного гибкого автоматизированного оборудования для приборостроения и микроэлектроники является широкое внедрение и использование систем перемещений, построенных на механизмах параллельной кинематики с гибридным многокоординатным приводом прямого действия [1, 2].

В статье в развитие этой концепции представлена новая разработанная авторами система перемещений с шестью степенями свободы, построенная на гибридном приводе прямого действия, компонованного из трех линейных и трех поворотных программно-управляемых координатных позиционеров кинематически связанных с исполнительным механизмом параллельной кинематики.

Система перемещений, рассматриваемая в настоящей статье, состоит из механизма параллельной кинематики, предложенного нами (патент РБ 11671 С2, МПК В25J 11/00; д. пуб. 30.04.2018), который приводится в движение также предложенной нами компоновкой соответствующего гибридного шестикоординатного привода прямого действия. Последний состоит из трехкоординатного шагового кольцевого двигателя и трех независимых шаговых двигателей, линейные направляющие которых установлены на подвижных сегментных модулях кольцевого двигателя. Структурно-кинематическая схема рассматриваемой системы перемещений представлена на рисунке 1.

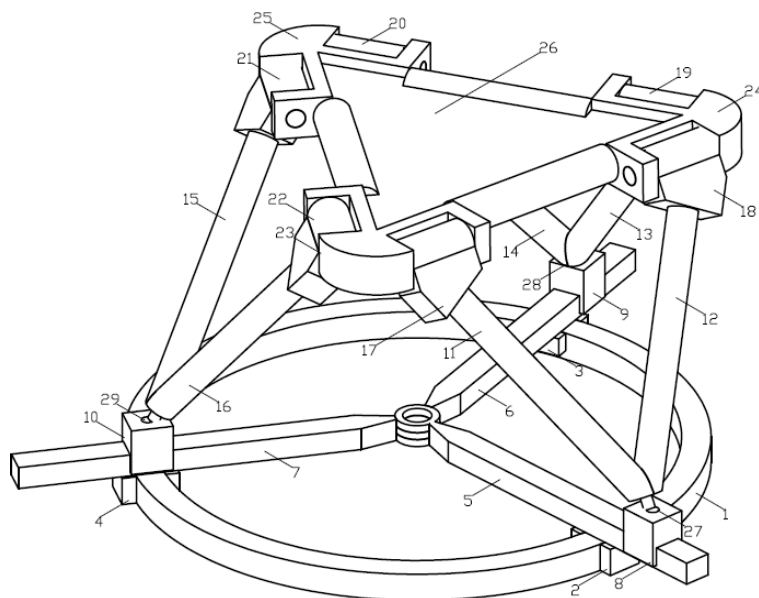


Рис. 1. Механизм параллельной кинематики с шестью степенями свободы

Техническая задача, на решение которой было направлено изобретение, является создание механизма параллельной кинематики на типовых координатных модулях с возможностью реализации прецизионных перемещений с шестью степенями свободы с расширенным диапазоном линейных и угловых перемещений подвижной треугольной платформы и повышенными кинематическими и динамическими характеристиками при высокой точности.

Механизм параллельной кинематики с шестью степенями свободы (рисунок 1) состоит из трех параллельных кинематических цепей, содержащих три подвижных треугольных шатуна в виде двойных элементов 11–12, 13–14, 15–16, связанных с одной стороны вращательными шарнирами 17–23, 18–24, 19–24, 20–25, 21–25, 22–23 с подвижной треугольной платформой 26, а с другой стороны связанных сферическими шарнирами 27, 28, 29 с тремя автономно управляемыми линейными шаговыми двигателями 8, 9, 10, линейные направляющие которых 5, 6, 7 с одной стороны, шарнирно соединены между собой, а с другой стороны жестко закреплены на соответствующих подвижных сегментных модулях 2, 3, 4 кольцевого шагового двигателя, неподвижная направляющая которых представляет основание замкнутого кольцевого статора 1. Он работает следующим образом. При секторных перемещениях трех сегментных модулей 2, 3, 4 в соответствие с заданными на входе системой управления законами их движения по неподвижной направляющей замкнутого кольцевого статора 1 кольцевого шагового двигателя и одновременно при линейных перемещениях, реализуемых тремя линейными шаговыми двигателями 8, 9, 10 в соответствие с заданными системой управления законами их движения по подвижным линейным направляющим 5, 6, 7 через сферические шарниры 27, 28, 29, шатуны 11–12, 13–14, 15–16 и соответствующие вращательные шарниры 17–23, 18–24, 19–24, 20–25, 21–25, 22–23 приводится в пространственное движение исполнительная платформа 26 (рисунок 1).

В зависимости от конкретно задаваемого секторного положения относительно статора 1 сегментных модулей 2, 3, 4 и конкретных положений линейных подвижных модулей 8, 9, 10 рабочая платформа 26 принимает однозначное и соответствующие им положение и ориентацию в трехмерном пространстве. Тем самым предложенным механизмом параллельной кинематики обеспечивается реализация перемещения платформы с шестью степенями свободы в трехмерном пространстве.

Предложенный механизм параллельной кинематики, как замкнутая кинематическая цепь, полностью удовлетворяет необходимым условием наличия шести степеней свободы благодаря тому, что он состоит из пространственной группы Ассур нулевой подвижности [3, 4], которая согласно теории структуры, будучи соединенной тремя сферическими шарнирами с ведущими элементами привода не изменяет его степени свободы.

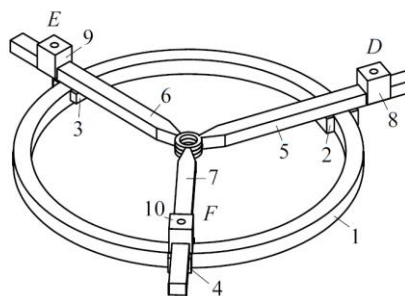


Рис. 2. Гибридный привод на кольцевом и линейных шаговых двигателях

Предложенный гибридный привод, схемное решение которого представлено на рисунке 2, состоит из кольцевого привода прямого действия с тремя степенями свободы и трех линейных шаговых двигателей, закрепленных на трех сегментных подвижных модулях.

Таким образом с помощью предложенного механизма параллельной кинематики могут быть реализованы прецизионные движения с шестью степенями свободы по шести независимым координатам в трехмерном пространстве, включая три линейные и три угловые, обеспечивая в то же время высокие кинематические и динамические характеристики перемещений при высокой точности их реализации. При этом обеспечивается реализация дополнительного управляемого разворота вокруг вертикальной оси в диапазоне ± 360 градусов, что расширяет область управляемого движения с перспективой построения на его основе современного прецизионного, фрезерного, сверлильного оборудования, прецизионных промышленных роботов и платформ, например, для телескопов, лазеров, телекоммуникационных антенн.

Алгоритмизация и имитационное моделирование. Для алгоритмизации математических моделей решения прямой и обратной задач кинематики была использована расчетная схема (рисунок 3), полученная по структурно-кинематической схеме системы.

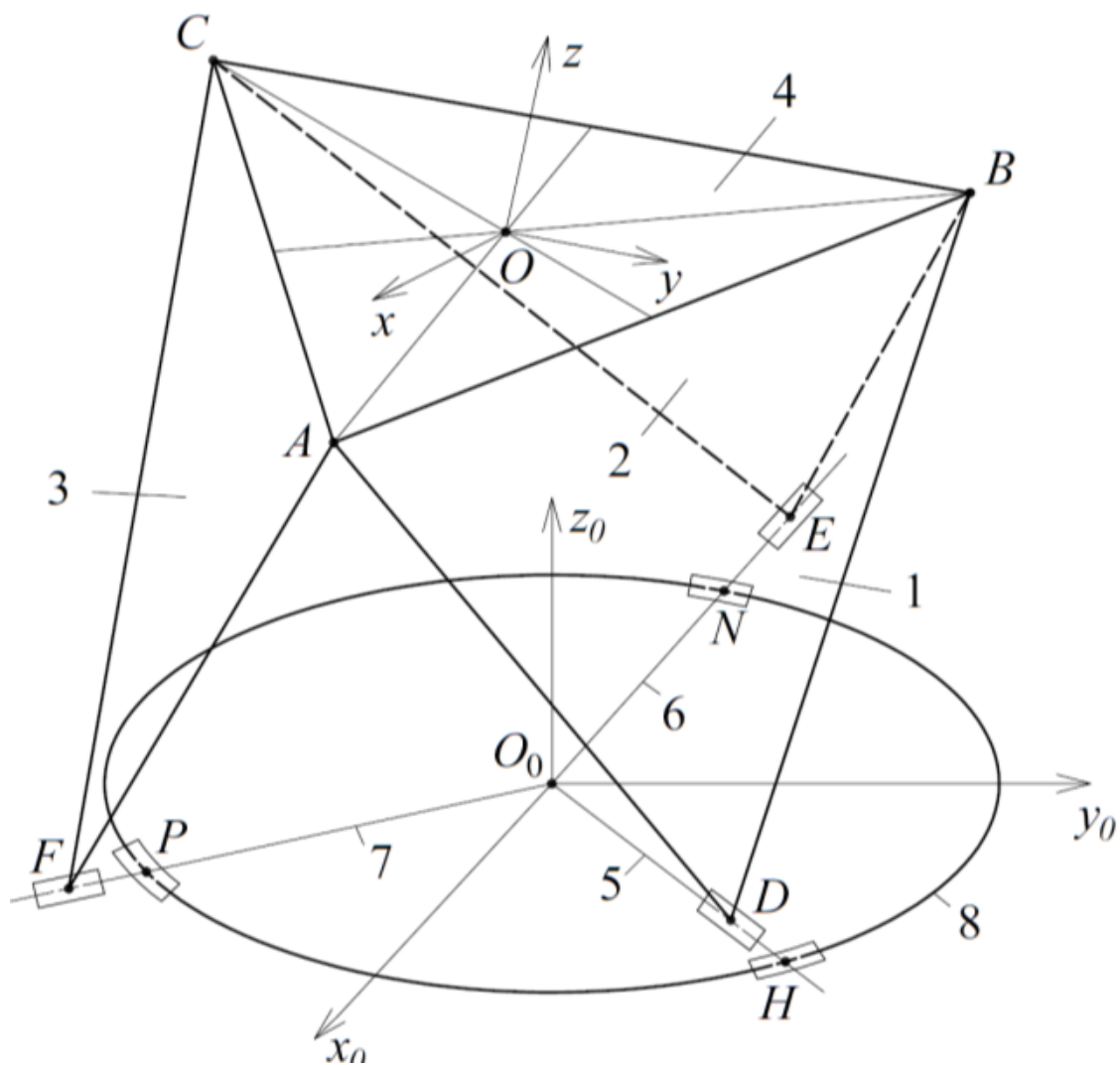


Рис. 3. Расчетная схема механизма параллельной кинематики

Конечной целью алгоритмизации явилось нахождение аналитической связи положения платформы 4, задаваемой в пространстве вершинами треугольника ABC и положением точек D , E и F , как выходными точками позиционирования шестикоординатного привода прямого действия, связанными с подвижной платформой 4 тремя параллельными кинематическими цепями 1, 2, и 3 в виде раскрывающегося тетраэдра (рисунок 3).

Проведенный в работе анализ возможных математических моделей алгоритмизации кинематики пространственных систем перемещений [5, 6] показал, что наиболее эффективные из них сводятся к системе из шести нелинейных трансцендентных уравнений. Выполненные нами исследования в этой области позволили разработать подход сведения алгоритма решения задач кинематики до трех уравнений такой же структуры.

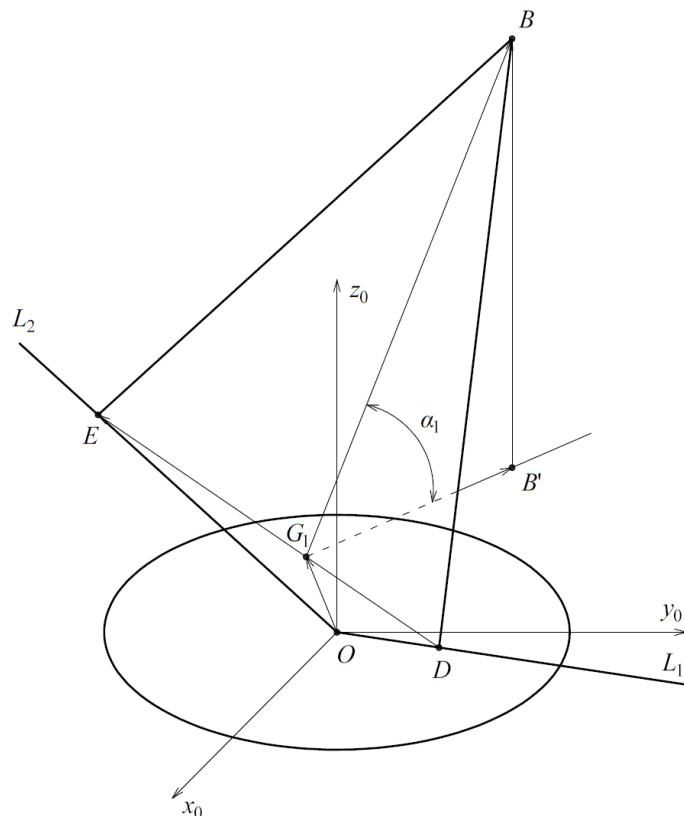


Рис. 4. Расчетная схема механизма параллельной кинематики

В результате реализации предложенного подхода по предложенной расчетной схеме, представленной на рисунке 4, удалось многопараметрическую задачу о положениях точек A , B и C , свести к однопараметрической задаче нахождения угловых параметров $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ соответственно для каждого из трех подвижных контуров DBE , ECF и FAD . Так, для контура DBE , определяющего положение точки B , вводится угловой параметр α_1 в виде угла образованного треугольником DBE с плоскостью кольцевого двигателя совпадающей с плоскостью x_0Oy_0 . Здесь DB и EB стороны соседних треугольных звеньев ADB и BEC (рисунок 1). Необходимо отметить, что алгоритм решения задачи о положениях является главной вычислительной составляющей алгоритмизации решения прямой задачи кинематики.

Из расчетной схемы (рисунок 4), видно, что при изменении положения точек D и E на направляющих L_1 и L_2 меняется положение и ориентация контура DBE , при

этом положение определяется задаваемыми координатами точек D и E , а ориентация определяется угловым параметром α_1 , связывающим искомые координаты точки $B(x_B, y_B, z_B)$ и задаваемые координаты точек $D(x_D, y_D, 0)$ и $E(x_E, y_E, 0)$ гибридного привода. Для нахождения уравнений этой кинематической связи необходимо рассмотреть векторные контуры OG_1B и $OG_1B'B$ (рисунок 4) согласно которым получим

$$\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1B} = \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1B'} + \overrightarrow{B'B}. \quad (1)$$

Так как треугольник DBE равнобедренный с переменным по длине основанием DE , то угловой параметр α_1 будет определяться углом между векторами $\overrightarrow{G_1B'}$ и $\overrightarrow{G_1B}$, где $\overrightarrow{G_1B'} \perp \overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{G_1B} \perp \overrightarrow{BE}$. В этом случае точка G_1 делит отрезок DE пополам, а это значит, что вектор $\overrightarrow{OG_1} = \left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2} \right)$ или $G_1 \left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2} \right)$.

Угол, образованный вектором \overrightarrow{DE} с осью x_0 , обозначим θ_1 , согласно рисунку 2 его можно определить по координатам двух точек D и E в виде

$$\theta_1 = \arctg \left(\frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} \right). \quad (2)$$

При этом однозначное определение угла θ_1 , связанное с выбором четверти решения, выполняется по результатам вычисления $\sin \theta_1$ и $\cos \theta_1$ по сопоставлению их знаков.

Угол между вектором $\overrightarrow{G_1B'}$ и осью x_0 , обозначенный θ_1' , согласно рисунку 4 равен

$$\theta_1' = \theta_1 - 90^\circ. \quad (3)$$

В свою очередь $G_1B' = G_1B \cos \alpha_1$, а $B'B = z_B = G_1B \sin \alpha_1$.

Для нахождения уравнений связей координат точки B и углового параметра α_1 спроецируем векторное уравнение (2) на оси x_0, y_0 и z_0 . В результате окончательно получим:

$$\begin{cases} x_B = x_G + G_1B \cos \alpha_1 \cos \theta_1'; \\ y_B = y_G + G_1B \cos \alpha_1 \sin \theta_1'; \\ z_B = G_1B \sin \alpha_1. \end{cases} \quad (4)$$

Учитывая, что исполнительный параллельный манипулятор, рассматриваемый в работе, представленный в виде раскрывающегося тетраэдра, содержит звенья в виде одинаковых равносторонних треугольников со сторонами равными a , то выражения (4) перепишем через исходные данные в виде:

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_E + x_D}{2} + G_1 B \cos \alpha_1 \cos \theta_1; \\ y_B = \frac{y_E + y_D}{2} + G_1 B \cos \alpha_1 \sin \theta_1; \\ z_B = G_1 B \sin \alpha_1, \end{cases} \quad (5)$$

где $x_D = \rho_1 \cos \varphi_1$, $y_D = \rho_1 \sin \varphi_1$, $x_E = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_E = \rho_2 \sin \varphi_2$.

Переменная длина $G_1 B$, входящая в (5) определяется текущими координатами точек D и E , положение которых задается системой управления гибридного привода. В координатном представлении $G_1 B$ будет иметь вид:

$$G_1 B = \sqrt{a^2 - \frac{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2}{4}}. \quad (6)$$

С учетом задаваемых параметров гибридного привода, выражение (6) преобразуется к виду

$$G_1 B = \sqrt{a^2 - \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)}{4}}. \quad (7)$$

Координаты точек A и C находим, используя тот же подход, что и для нахождения координат точки B . Окончательно получим следующие расчетные системы уравнения.

Для точки A получим

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_D + x_F}{2} + G_2 A \cos \alpha_2 \cos \theta_2'; \\ y_A = \frac{y_D + y_F}{2} + G_2 A \cos \alpha_2 \sin \theta_2'; \\ z_A = G_2 A \sin \alpha_2, \end{cases} \quad (8)$$

где $x_D = \rho_1 \cos \varphi_1$, $y_D = \rho_1 \sin \varphi_1$, $x_F = \rho_3 \cos \varphi_3$, $y_F = \rho_3 \sin \varphi_3$,

$$G_3 A = \sqrt{a^2 - \frac{\rho_1^2 + \rho_3^2 - 2\rho_1\rho_3(\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3)}{4}}.$$

Для точки C получим

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_E + x_F}{2} + G_3 C \cos \alpha_3 \cos \theta_3'; \\ y_C = \frac{y_E + y_F}{2} + G_3 C \cos \alpha_3 \sin \theta_3'; \\ z_C = G_3 C \sin \alpha_3, \end{cases} \quad (9)$$

где $x_E = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_E = \rho_2 \sin \varphi_2$, $x_F = \rho_3 \cos \varphi_3$, $y_F = \rho_3 \sin \varphi_3$,

$$G_3 C = \sqrt{\frac{a^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho_2\rho_3(\sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_3)}{4}}.$$

Положение точек A, B и C , реализуемыми тремя параллельными кинематическими цепями кинематически связаны с рабочей платформой 4 (рисунок 1), которая представляет собой равносторонний треугольник ABC со сторонами равными a . С учетом этого конечная математическая модель всей системы параллельной кинематики, предложенной в работе, будет выражаться следующей системой из трех уравнений

$$\begin{cases} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = a^2; \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = a^2; \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = a^2, \end{cases} \quad (10)$$

где все координаты точек A, B и C определяются по ранее полученным выражениям (5), (8) и (9), сводя решение прямой задачи кинематики к решению системы из трех нелинейных уравнений относительно трех неизвестных в виде угловых параметров α_1 , α_2 и α_3 . Нахождение последних выполняется одним из численных методов реализованных в программном обеспечении MATLAB [7]. Обратной подстановкой α_1 , α_2 и α_3 в соответствующие уравнения систем (5), (8) и (9), дает искомые координаты точек A, B и C в зависимости от управляемых положения точек D, E и F шести-координатного гибридного привода прямого действия.

Предложенная нами математическая модель позволила разработать алгоритмизацию решения прямой задачи кинематики для программирования в среде MATLAB. В результате был создан программный модуль компьютерного исследования для предложенного в работе параллельного манипулятора на гибридном приводе.

Для имитационного моделирования решения задач кинематики и других связанных с ними на основе предложенной алгоритмизации исполнительного механизма рассматриваемой системы перемещений была разработана в среде MATLAB программа имитационного моделирования с интерактивной визуализацией результатов, интерфейс которой представлен на рисунке 5, где 1 – входные конструктивные параметры; 2 – изменяемые параметры состояния механизма; 3 – визуализация механизма.

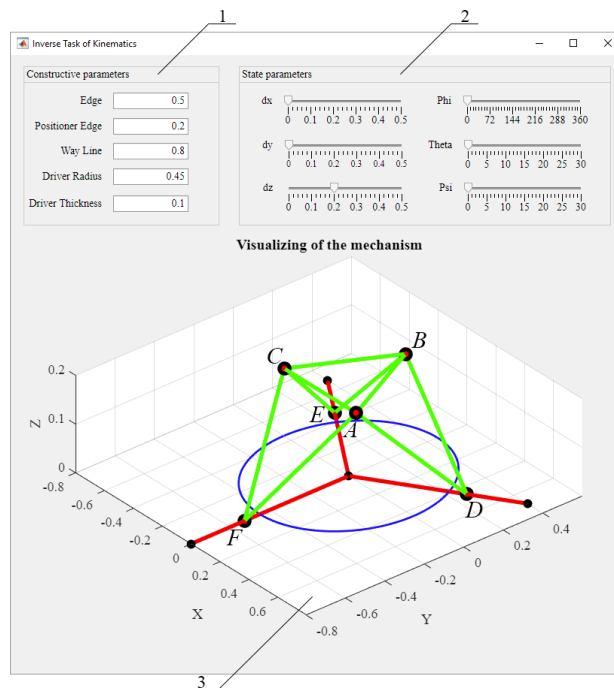


Рис. 5. Интерфейс программы моделирования кинематики

Система нелинейных уравнений (9) в алгоритме программы представлена совокупностью функциональных уравнений, содержащих переменные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, координаты расположения шести подвижных сегментов привода и конструктивные параметры механизма. Процесс решения системы нелинейных уравнений происходит до тех пор, пока значение оценочной функции, рассчитываемой в процессе итерационного поиска, не станет меньше заданной точности или новые значения переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, изменяются каждый раз на величину меньшую, чем заданная предельно допустимая. Параметры точности решения системы уравнений задаются непосредственно на программном уровне.

Следует отметить, что вычислительный процесс решения нелинейной системы уравнений может отличаться в зависимости от применяемого алгоритма оптимизации. В разработанной программе используются методы оптимизации Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта [2, 8].

Верификация результатов и макетирование системы. Верификация результатов компьютерного исследования кинематических характеристик разработанной системы перемещений выполнялась путем имитационного моделирования точности исполнения кинематических функций, задаваемых в виде тестовой калибровочной функции гармонического типа. Дискретные координаты x_i, y_i для траектории позиционеров в плоскости статора будут иметь вид

$$x_i = (R_t + \Delta R_t \sin k\varphi_i) \cos \varphi_i, \quad y_i = (R_t + \Delta R_t \sin k\varphi_i) \sin \varphi_i.$$

В результате представлены функции погрешности на сегментах, полученные в результате компьютерного моделирования кинематики в среде MATLAB/Simulink для конструктивного исполнения (рисунок 6).

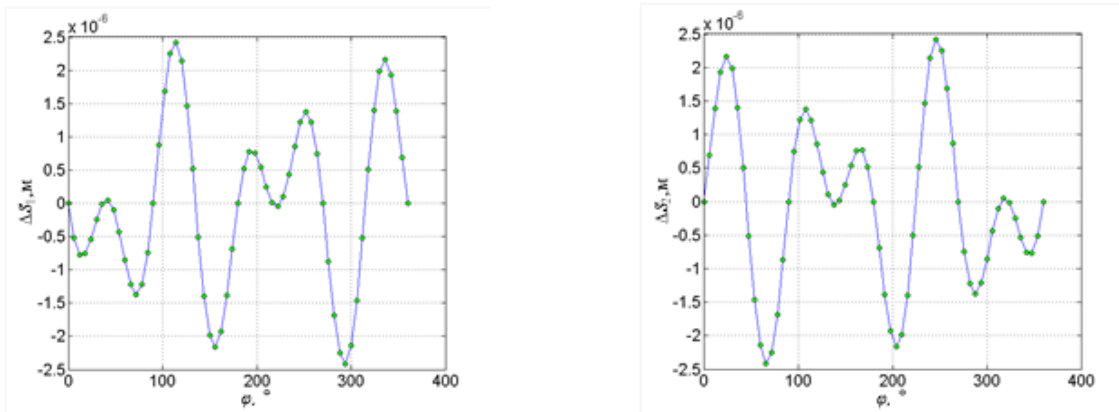


Рис. 6. Графики функций погрешности

Для натурального макетирования и наглядной верификации идеи о возможности реализации сложного пространственного движения исполнительной платформы с помощью системы перемещений (рисунок 7) на механизме параллельной кинематики в виде раскрывающегося тетраэдра на гибридном шестикоординатном приводе прямого действия был разработан и создан макет.



Рис. 7. Макет системы перемещений

Макетирование позволило подтвердить гипотезу об обеспечении предложенным исполнительным механизмом параллельной кинематики шести степеней свободы, а также позволило визуально проанализировать все выходные функции положения платформы, реализуемые по трем линейным и трем угловым координатам, сопоставить их с расчетными функциями положениями, полученными путем имитационного моделирования в среде MATLAB.

Проведенное в работе имитационное моделирование предложенной системы перемещений показало возможность реализации в рабочей области пространственных перемещений исполнительной платформы по трем линейным и трем угловым независимым координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович, С. Е. Системы многокоординатных перемещений на механизмах параллельной кинематики: монография / С. Е. Карпович [и др.]; под ред. Проф. С. Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2017. – 254 с.
2. Карпович, С. Е. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В. В. Жарский [и др.]. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
3. Heimann, V. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / V. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warszawa : PWN, 2001. – 351 s.
4. Shetty, D. Mechatronics System Design / D. Shetty, R. Kolk. – Cengage Learning, 2010. – 504 p.
5. Карпович, С. Е. Имитационное моделирование кинематики системы перемещений с интерактивной визуализацией результатов / С. Е. Карпович, В. В. Кузнецов, М. М. Форотан // Докл. БГУИР – Минск, 2016. – №. 3. – С 22–28.
6. Кузнецов, В. В. Алгоритмизация и моделирование пространственной системы параллельной кинематики на трех планарных позиционерах / В. В. Кузнецов // Известия НАН Беларуси. – 2016. – Вып. 3. – С. 310–319.
7. MATLAB. The Language of Technical Computing – The MathWorks, Natick, MA, 2004.
8. Chapman, S. MATLAB programming for engineers / S. Chapman – Cengage Learning, USA, 2015 – 665 p.

Поступила: 07.02.2022

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКОВ ТУРБИН ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ

Куликов И. С., Ширвель П. И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Диски турбин авиационных двигателей являются одними из самых нагруженных элементов: внешнее и внутреннее давление, действие центробежных сил и главное – высокотемпературный неравномерный нагрев. Поскольку сегодня мы имеем тенденцию повышения рабочих параметров двигателей и увеличения их ресурса с одновременным уменьшением веса, то при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) дисков необходимо учитывать дополнительные факторы, которые ранее не принимались во внимание. Одним из них является неравномерность температурного поля по периметру диска наряду с неравномерным ее распределением по радиусу. Решение такой задачи даже в предположении упругого деформирования представляет значительные трудности, не говоря уже об учете физически нелинейных эффектов (пластичность и ползучесть). Развитие численных методов и компьютерной техники позволяет перейти к решению такого класса задач. В предположении обобщенной плоской деформации ($\epsilon_{zz} = const$) в качестве примера рассмотрим сплошную цилиндрическую область, нагруженную равномерным давлением $P_{ext}(t)$ и имеющую неравномерное стационарное несимметричное поле температур $T(r, \theta)$ (рисунок 1).

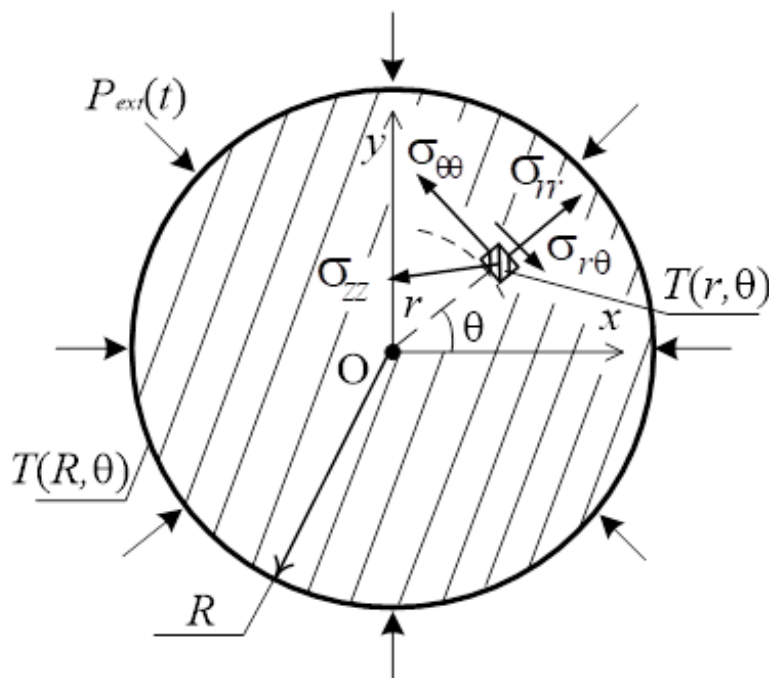


Рис. 1. Общая схема несимметричного НДС

Для решения задачи сделаем следующие предположения:

1. Уровень температур и закон их распределения в указанной плоской области зависят от теплофизических свойств материала и условий теплообмена на поверхности тела. При этом температурное поле в теле определяется либо экспериментально на основе теплового моделирования, либо путем решения задачи теплообмена с окружающей средой, которая сама по себе также является достаточно сложной. Иными словами считаем, что температурное поле в теле при решении задачи известно, т. е. деформации термического расширения могут быть определены в любой точке рассматриваемого тела.

2. Закон ползучести, полученный при одноосных испытаниях, распространяем на сложное напряженно-деформированное состояние (связь между интенсивностью скоростей деформаций ползучести и интенсивностью напряжений).

Таким образом, задача определения несимметричного НДС в данной постановке сводится к нахождению 10 функций: вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций. При этом эти функции должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, физическим и геометрическим соотношениям, а также граничным условиям.

Задачу можно свести к решению двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для искомых функций перемещений $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$. Эта система уравнений будет иметь следующий вид [1]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{2r^2(1-\mu)} \left((1-2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} - (3-4\mu) \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{1-2\mu}{(1-\mu)r} \left(\varepsilon_{rr}^c - \varepsilon_{\theta\theta}^c + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial r} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial r}; \\ & \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r^2(1-2\mu)} \left(2(1-\mu) \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + (3-4\mu) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{4}{r} \varepsilon_{r\theta}^c + 2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial r} - \frac{2}{r(1-2\mu)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial \theta} (\mu-1) - \mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{2(1+\mu)}{r(1-2\mu)} \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial \theta}, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где ε_{ij}^{th} , ε_{ij}^c – компоненты тензоров неупругих деформаций термического расширения и ползучести соответственно ($i, j = r, \theta, z$); μ – коэффициент Пуассона. Следует отметить, что (1) при отсутствии нагрева и ползучести вырождается в известные соотношения теории упругости и термоупругости [2], что доказывает правильность описания механико-математической модели.

Система уравнений (1) дополняется следующими смешанными граничными условиями:

$$u(0, \theta) = v(0, \theta) = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = -P_{ext}(t); \quad \sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0. \quad (3)$$

После решения системы уравнений (1) согласно соотношениям Коши и физическим уравнениям можно определить распределение перемещений, напряжений и деформаций во всех точках, включая деформации ползучести, по периметру и радиусу диска с течением времени t , в данном случае являющимся параметром. Данную задачу можно также решать и в напряжениях, если на поверхности тела заданы усилия. В слу-

чае заданных перемещений решение задачи в напряжениях практически невозможно, поскольку такие условия будут содержать интегралы от напряжений и их производные. В некоторых простейших не имеющих практического значения случаях такое возможно путем специальные преобразований. Однако такие преобразования не всегда приводят к конечному результату даже для упругой среды [3].

Система (1) должна быть также замкнута условиями:

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \vartheta(r, \theta)}{\partial \theta} = 0, \theta = 0, \theta^0, \quad (4)$$

где θ^0 может принимать различные значения в зависимости от закона распределения заданной функции температур $T(r, \theta)$ по периметру сечения; $0 \leq \theta \leq \theta^0$ – условие возможной периодичности решения, определяемое периодом функции распределения температур. Расчетная область интегрирования для механико-математической модели квазистатического несимметричного деформирования диска может быть представлена в виде, показанном на рисунке 2.

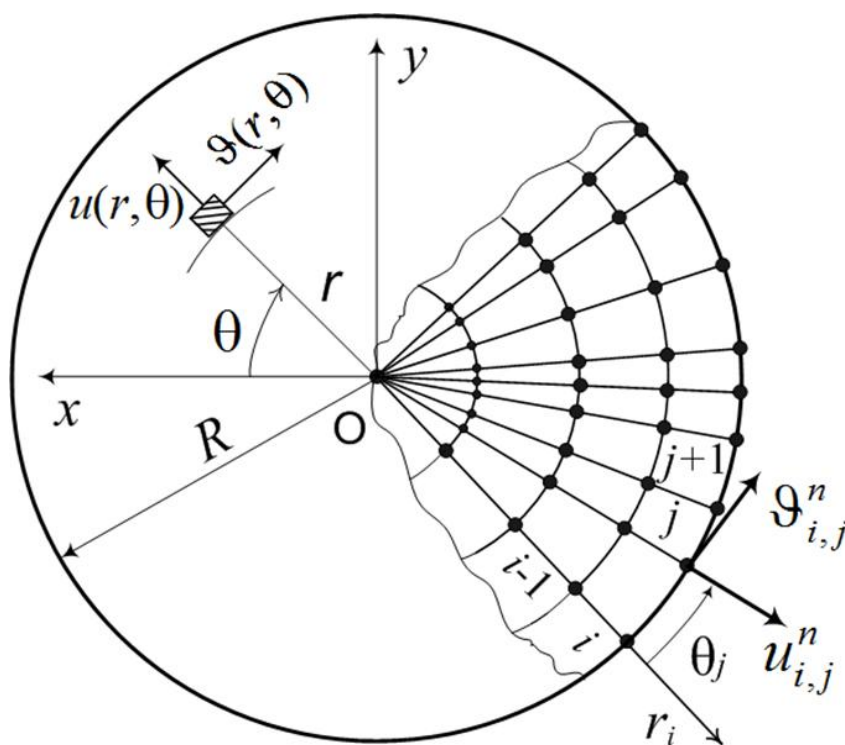


Рис. 2. Расчетная область неосесимметричной задачи

Для реализации численного подхода, в области изменения независимых переменных ($0 \leq \theta \leq \theta^0$, $0 \leq r \leq R$) строилась криволинейная структурированная сетка из линий $\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$, связанная с границами интегрируемой области (рисунок 2). Специальные дифференциальные операторы нелинейной системы аппроксимируем их конечно-разностными аналогами с учетом физических особенностей расчетной области. Для этого отрезок $[0, R]$ разбивается равноотстоящими точками: $r_0 = 0$, $r_k = R$, $r_i = ih_r$, $h_r = R/k$, $i = 0, 1, \dots, k$. Аналогично разобьем отрезок $[0, \theta]$: $\theta_0 = 0$, $\theta_m = \theta^0$; $\theta_i = jh_\theta$, $h_\theta = \theta^0/m$, $j = -1, 0, 1, \dots, m-1$, где h_r и h_θ – шаги сетки в ра-

диальном и окружном направлениях. Заметим, что слой по кольцевой координате $j = -1$ (т. е. плоскость $\theta = -h_\theta$,) является вспомогательным и служит исключительно для аппроксимации граничных условий. Регулярная структура такой сетки в дальнейшем должна позволить организовать эффективную работу с разреженными матрицами при решении систем уравнений, причем матрицы коэффициентов системы будут полнозаполненными. Для получения конечно-разностных уравнений заменим функции непрерывного аргумента u и ϑ их разностными, дискретными эквивалентами.

При построении шаблона использовались неявные разностные схемы с весовыми коэффициентами. В основу предлагаемого численного метода решения полученной разностной системы уравнений на основе заложены метод конечных разностей, метод матричной прогонки, идеи метода дробных шагов Н. Н. Яненко, теория аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функции, а также итерационные методы. Окончательно, дискретная система, описывающая общий случай неосесимметричного НДС была представлена в виде:

$$\begin{cases} \chi_{1i} u_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\chi_{1i}) u_{i,j+1}^n + \chi_{1,i} u_{i-1,j+1}^n = d_{i,j}^n; \\ \xi_{1i} \vartheta_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\xi_{1i}) \vartheta_{i,j+1}^n + \xi_{1i} \vartheta_{i-1,j+1}^n = k_{i,j}^n. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1i} &= \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha; \quad \chi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta; \\ \xi_{1i} &= \frac{r_i^2(1-2\mu)}{2(\mu-1)} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha; \quad \xi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta, \end{aligned}$$

где $d_{i,j}^n$, $k_{i,j}^n$ – функции от перемещений на предыдущих слоях по окружной координате $(j, j-1)$:

$$\begin{aligned} d_{i,j}^n &= -2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n(1 - \chi_{2i}\Lambda_2) - F_{1i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})H_i, \\ H_i &= 2r_i^2(1-\mu)h_\theta^2/(2\mu-1); \quad k_{i,j}^n = -2\vartheta_{i,j}^n + \vartheta_{i,j-1}^n(1 - \xi_{2i}\Lambda_2) - F_{2i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})M_i, \\ M_i &= r_i^2(1-2\mu)h_\theta^2/(2\mu-2); \quad \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Где нелинейные члены F_1 и F_2 определяются по выражениям, представленным в конечно-разностной форме, включающим частные производные от искомым функций и неупругие слагаемые в правой части (1): термическое расширение и деформации ползучести.

Для определения неизвестных функций $u_{i,j+1}$, $\vartheta_{i,j+1}$ на каждом шаге по окружной координате имеем систему уравнений с граничными условиями, которые в общем виде для n -го временного этапа деформирования переписываются в дискретной форме по формулам численного дифференцирования. Причем условия в напряжениях первоначально конвертируются в условия для перемещений через физические уравнения и формулы Коши. Полученные системы разностных уравнений имеют матрицы трехдиагональной структуры и могут быть решены по методу матричной прогонки, на основе модификации разработанной в [1] численной схемы.

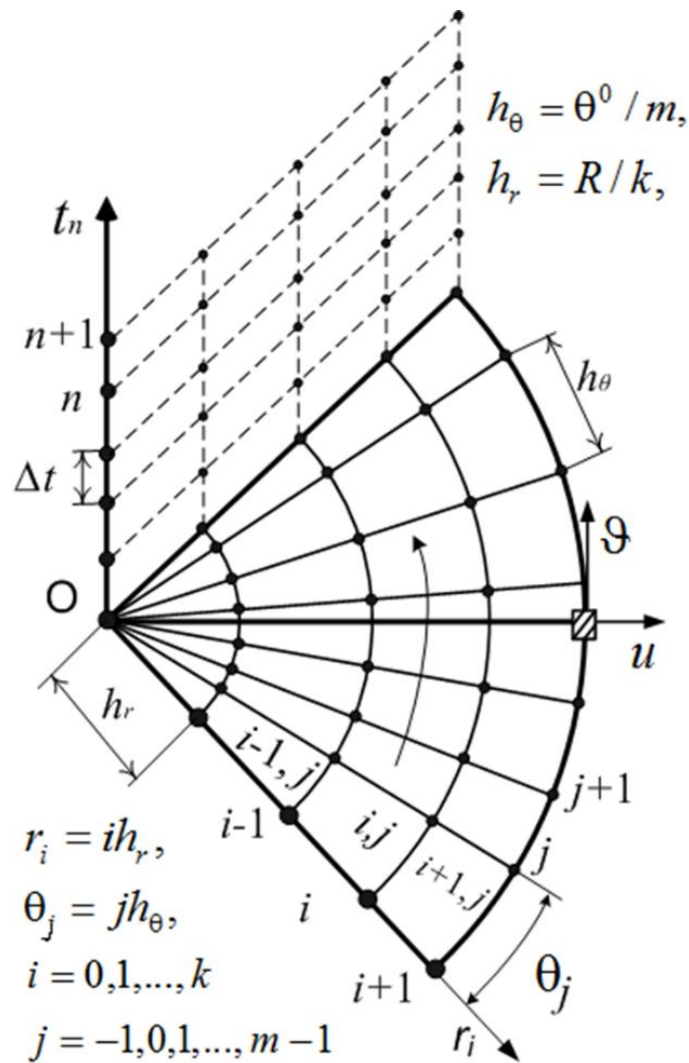


Рис. 3. Численная схема разбиения сечения модели

Так, система (1) расщепляется на две системы, которые решаются прогонками с учетом параметра времени t : первая по радиальному перемещению, а вторая по окружному. Прогонка осуществляется по радиусам, которые для каждого луча начинаются в центре сечения и оканчиваются на границах исследуемой области. Такие прогонки имеют свои особенности, вызванные характером сетки, расчетной областью и видом рассматриваемых физически нелинейных эффектов. По окончании текущего шага расчета в алгоритме, реализующем механико-математическую модель с учетом необратимых деформаций, фиксируются величины, характеризующие НДС каждой точки по периметру модельного тела в конце n -го этапа нагружения, и начинается расчет $(n + 1)$ -го этапа. В результате, для получения решения на следующем $n + 1$ временном слое решается новая система неоднородных линейных уравнений по изложенной выше численной методике. Таким образом, для любого текущего момента времени t_n имеем полную замкнутую систему из $2km$ неоднородных алгебраических уравнений с $2km$ неизвестными. Общая схема численного решения представлена на рисунке 2. Необходимая точность в процессе решения достигается, с одной стороны, измельчением шага криволинейной структурированной сетки в радиальном и окружном направлениях, с другой стороны повышением степени порядка аппроксимации выражений производных в конечных разностях.

Для проведения дальнейших исследований реализован алгоритм расчета несимметричного НДС и компьютерная программа решения $2D(r, \theta)$ задачи ползучести. Программная модель реализована на C# в среде Microsoft Visual Studio 2011 и позволяет обрабатывать и визуализировать результаты расчетов цилиндрических тел (сплошные, полые, многослойные диски и длинные цилиндры) для различных типов граничных условий и видов физической нелинейности. Архитектура программного комплекса является модульной, что дает возможность в дальнейшем добавлять новые функциональные возможности и вносить улучшения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И. С. О неосесимметричном НДС неравномерно нагретых длинных цилиндрических тел в условиях ползучести и облучения / И. С. Куликов, А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: в. 2 ч. Ч. 2. – Чебоксары, 2014. – Ч. 2. – С. 5–16.
2. Колтунов М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, – М.: Высш. Школа, 1975. – 526 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

Поступила: 16.12.2021

МКЭ-АНАЛИЗ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕР ПО УСИЛЕНИЮ БЕТОНОМ КОМПАКТНОГО 5-ОСЕВОГО СТАНКА

¹Довнар С. С., ¹Яцкевич О. К., ¹Авсиевич А. М., ¹Колесников Л. А.,
²Яворский А. В.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²ОАО «СтанкоГомель», Гомель

Введение. Работа связана с созданием на ОАО «СтанкоГомель» машины-лидера для гаммы компактных токарно-фрезерных станков (ТФС) с ЧПУ. Станок имеет пять степеней свободы (рисунок 1), из которых три (X, Y, Z) являются линейными, а две (A, C) – вращательными, вынесенными на глобусный стол. ТФС является результатом развития прототипа – многоцелевого станка [1].

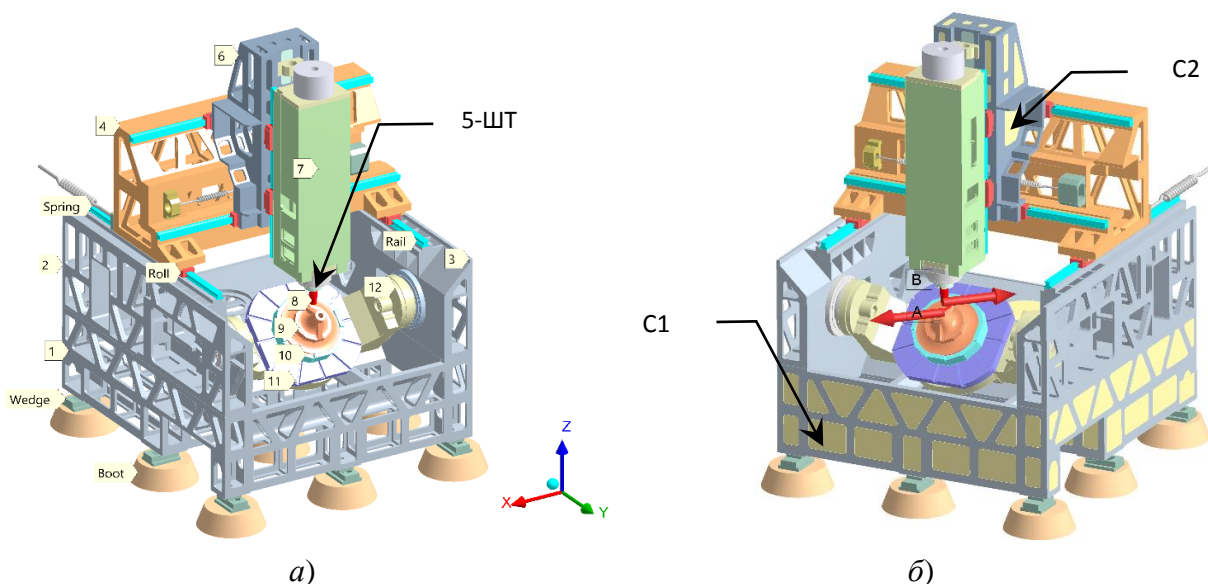


Рис. 1. Несущая система ТФС в пустотелом (а; ПЧ) и частично бетонированном (б; БТСС) вариантах: 5-ШТ – стык ШУ и торца ползуна

По сравнению со станком-прототипом, ТФС требуется усиление несущей системы (НС) без ее глубокого перестроения. НС создается литыми чугунными структурными деталями (СД). Несущая система должна обеспечить высокую статическую и динамическую жесткость для инструмента и детали.

Обозначения:

- НС – несущая система (станка);
- СД – структурная деталь (обычно, корпусная литая чугунная деталь);
- Бетон – обобщение разных марок полимербетонов и бетонов УНРС;
- ТФС – токарно-фрезерный станок;
- ШУ, ШТ – шпиндельный узел, шпиндельный торец (на ползуне);
- СВ – структурный вариант НС (перечислены ниже):
- ПЧ – пустотелая чугунная НС (*исходный вариант*),
- БТСС – «бетон только в станине и суппорте» (*бетон по низу*),
- ЧБ – чугунно-бетонная НС (*полное бетонирование*).

Цель исследования. Нужно предложить структурные варианты несущей системы станка, проанализировать их жесткость и дать рекомендации по усилению НС. Анализ должен быть проведен до производства станка. Поэтому необходимо МКЭ-моделирование.

Замысел работы заключался в применении бетона (полимербетона, бетона УНРС и т. д.). Бетоном можно заполнить полости в отливках и усилить НС [2]. Виртуально испытать эффективность этого решения нужно с помощью МКЭ.

Геометрическая модель объекта исследования. Станок включает в себя (рисунок 1) станину 1, стенки 2 и 3, траверсу 4 (подвижную по Y), суппорт 6 (движется по траверсе вдоль X), ползун 7 с вертикальной подвижностью по Z. Шпиндельный узел 5 находится на нижнем, шпиндельном торце ползуна (реперная точка 5-ШТ) и удерживает инструмент 8. Деталь 9 закреплена через патрон 10 во вращающейся планшайбе 11 глобусного стола. Основой стола является качающаяся люлька 12.

Станок размещен на 11-ти фундаментных опорах (Boot) и выставлен горизонтально с помощью клиновых механизмов (Wedge). Подвижность по X, Y, Z обеспечивается тремя парами направляющих качения, состоящих из рельсов (Rail) и танкеток (Roll). Привода подачи представлены как пружины (Spring).

На рисунке 1, а показан структурный вариант ПЧ с пустотелыми корпусными деталями. Это исходное решение. Вариант частичного заполнения полостей БТСС представлен на рисунке 1, б. Маркеры C1, C2 указывают на бетон в станине и суппорте соответственно.

Вариант полного бетонирования ЧБ показан на рисунке 5, б. Здесь видны затвердевшие бетонные блоки. Охватывающие их чугунные отливки скрыты.

На рисунке 1, б стрелками показаны две противоположные по направлению и равные по величине силы. Их будем называть *парой сил*. Они нагружают инструмент и деталь для тестирования их жесткости. Направление пары сил будет варьироваться. Эти силы уравнивают друг друга в масштабах станка. Инструмент и деталь в данной работе не связаны между собой непосредственно.

Постановка исследования и допущения. Виртуальные испытания трех структурных варианта ПЧ, БТСС и ЧБ заключаются в статическом, модальном и гармоническом анализе. Статический анализ характеризует нагружение НС при установившемся резании (точение). Модальный анализ выявляет резонансные моды. В случае переменного резания (фрезерование) осциллирующие силы способны на резонансах раскачать НС и нарушить точность и стабильность обработки. Это должен предсказать гармонический анализ.

МКЭ-моделирование было проведено в линейной постановке. Материалы приняты подчиняющимися закону Гука и нагружаемыми в пределах упругости. Геометрическими нелинейностями пренебрегали ввиду малости деформационных перемещений. Сухое или вязкое трение не моделировалось. Контактные нелинейности отсутствовали.

Напряжения в станочных системах в большинстве случаев являются низкими. Эти НС работают на жесткость, а не на прочность. Для выявления линейной жесткости сила нагружения не принципиальна. В данной работе каждой силе в паре устанавливали величину (амплитуду) в 1 кН. Направление пары сил варьировали, делая их параллельными X, Y и Z. Данные допущения сделаны как для статического, так и для гармонического анализа.

Жесткость ШУ на шпиндельном торце ползуна (5-ШТ, рисунок 1, а) $J_{x,y,z}^{шт}$ оценивается как отношение приложенной силы (например, $F_{x,y,z}$) к деформационному перемещению в том же направлении ($u_{x,y,z}$).

Вращение шпинделя с инструментом не моделируется. Тормоза глобусного стола включены. Поэтому люлька и планшайба заблокированы от поворотов.

МКЭ-модель и ее параметры. МКЭ-модель представляет собой совокупность конечно-элементных сеток отдельных солидов (198 штук). Главными материалами солидов являются сталь, чугун и бетон. Механические свойствами материалов взяты согласно апробированным случаям МКЭ-анализа станков [2–4]. Модуль упругости бетона принят равным $E_6 = 36$ ГПа. Плотность бетона взята как $\rho_6 = 2650$ кг/м³. Соответствующие показатели чугуна – $E_ч = 130$ ГПа и $\rho_ч = 7200$ кг/м³.

Масса чугунных структурных деталей составляет 3957 кг. Частичное бетонирование (БТСС) требует 3269 кг бетона. Для полного бетонирования нужно бетона 5587 кг. Масса ползуна в сборе составляет 601 кг.

Жесткость пружин – привод подач по Y, настроена равной 300 Н/мкм. Пружинам по X и Z согласно каталогам установлена жесткость по 400 Н/мкм.

Все детали в сборках неподвижно скреплены друг с другом контактными парами в статусе *bonded*. Именно так бетонные вставки сцеплены с солидами–отливками. На линейных направляющих разрешено идеализированное скольжение без трения. Для этого контактные пары между рельсами и танкетками установлены в статус *no separation*.

Для гармонического анализа материалам приписаны осредненные коэффициенты демпфирования ξ величиной 1, 2, 3 % для стали, чугуна и бетона.

Статический анализ. Статические деформационные перемещения u_x отражены на рисунке 2. Для пустотелой конструкции на рисунке 2, а наблюдается неравномерный изгиб податливых стенок вправо (маркеры –3,7014 и –9,9601 мкм). Это обуславливает сдвиг траверсы вправо на –11,631 мкм. Относительно траверсы происходит перекося суппорта (пр.ч.с.) в направляющих по X, а относительно суппорта перекашивается ползун. В результате ползун существенно поворачивается как жесткий рычаг (различие маркеров –12,212 и –41,403 мкм). На конце шпинделя перемещение достигает –47,035 мкм.

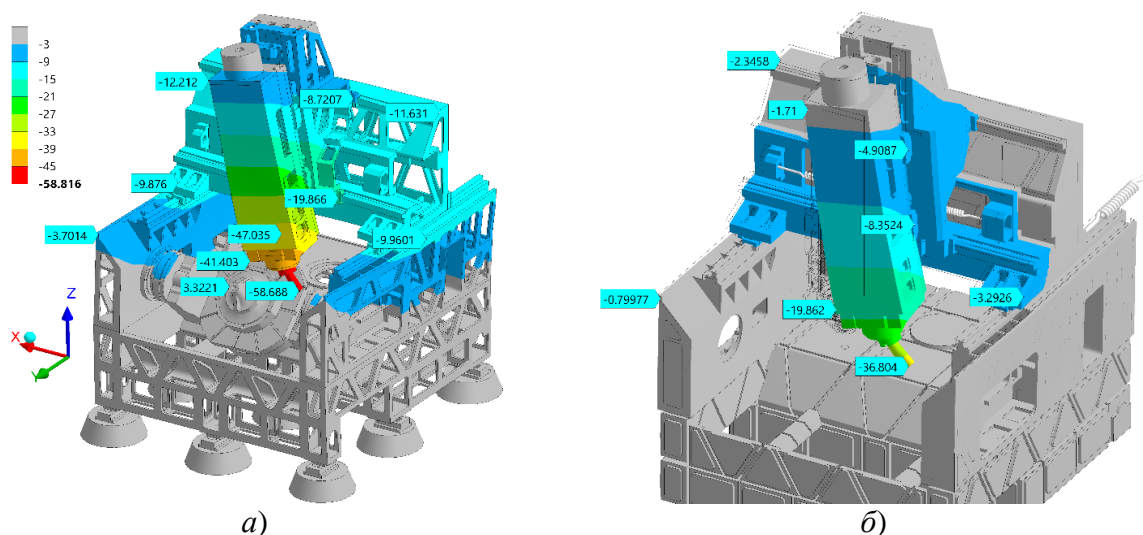


Рис. 2. Деформационные перемещения u_x (мкм) под действием силы $F_x = 1$ кН: а – ПЧ; $\times 8000$; б – ЧБ; $\times 12000$; нижние отливки скрыты)

На режущей кромке из-за изгиба самого инструмента наблюдается смещение –58,688 мкм. Это соответствует жесткости $j_x^{ПК} = 17,03$ Н/мкм. Такая жесткость меньше станочной нормы [$j^{norm} = 20$ Н/мкм]. Следовательно, пустотелый ТФС слишком податлив. Он будет склонен к неточностям обработки и возбуждению грубых автоколебаний.

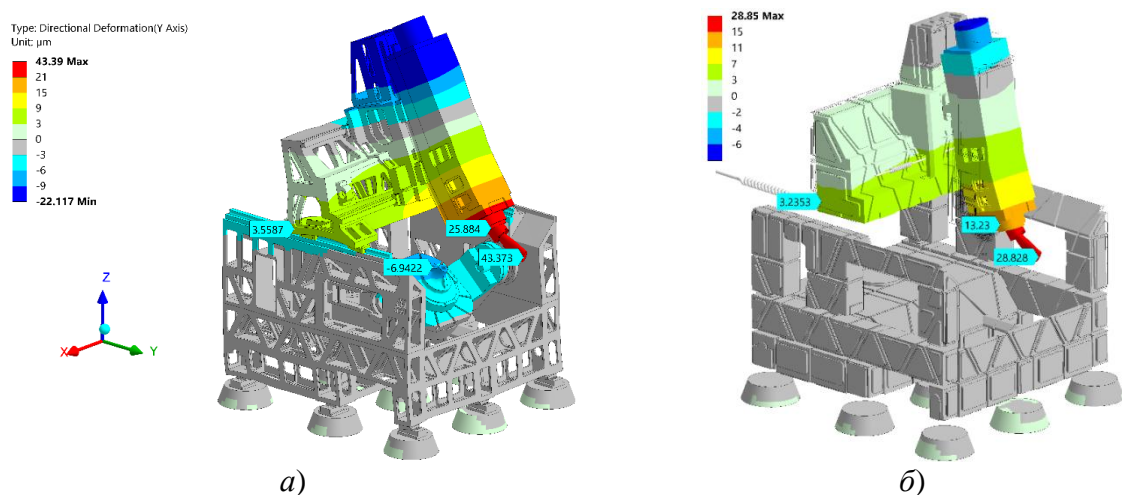


Рис. 3. Перемещения по оси Y (мкм; $\times 20000$) для несущих систем: *а* – пустотелой (ПЧ); *б* – бетонированной (ЧБ; большинство СД скрыто)

Полное бетонирование (ЧБ) дает эффект (рисунок 2, б). Усиленные бетоном внутри и снизу стенки почти неподвижны ($-0,9977$ мкм). Сдвиг траверсы вправо минимален ($-2,3458$ мкм). Сохраняется, однако, двойной перекося в цепочке траверса – суппорт – ползун. Он обусловлен направляющими – их компоновкой и податливостью. На ШТ перемещение составляет только $-19,862$ мкм (по сравнению с $-41,403$ мкм для ПЧ). Происходит удвоение жесткости (таблица 1) и выход ее на допустимый уровень.

Обратим внимание, что нагружение обрабатываемой детали дает малые отклонения ($3,3221$ мкм на рисунке 2, а). Следовательно, жесткость глобусного стола достаточна. Его усиление не является первоочередной задачей.

В направлении Y сила на шпинделе $F_y = 1$ кН приводит к повороту ползуна в плоскости YZ (рисунок 3). Шпиндельный торец отклоняется на $25,884$ мкм для пустотелой НС (рисунок 3, а). Отчасти это связано с изгибом ползуна. Но ведущей причиной является кручение пустотелой податливой траверсы.

При усилении траверсы бетоном (рисунок 3, б) ползун меньше отклоняется от вертикали. Перемещение $u_{y}^{шт}$ падает до $13,23$ мкм. Жесткость возрастает в 1,95 раза (таблица 1).

Главным здесь является увеличение крутильной жесткости траверсы. Однако, разместить утяжеленную траверсу на податливых пустотелых стенках динамически рискованно. Этим обусловлено полное бетонирование (ЧБ).

В таблице 1 дана сводка жесткостей шпиндельного торца по всем направлениям для всех СВ. Получается, что направление X всегда является более податливым, чем Y и Z. Различие колеблется в интервале 1,54–1,96 раз. Наибольшую жесткость станок показывает по вертикали, в направлении Z.

Главный вывод из таблицы 1 – полное бетонирование (ЧБ) эффективно. Оно удваивает статическую жесткость по каждому направлению.

Таблица 1 – Жесткость на шпиндельном торце $j_{x,y,z}^{шт}$ (Н/мкм)

Структурный вариант	Направление		
	X	Y	Z
ПЧ	24,15	38,63	47,35
БТСС	29,33	45,37	49,88
ЧБ	50,35	75,58	95,97
Рост жесткости на переходе ПЧ – ЧБ	208 %	195 %	203 %

Промежуточный вариант бетонирования *БТСС* (усилены станина и суппорт) в статике малоэффективен. Он дает рост жесткости на 21% в направлении X. Это происходит благодаря лучшей поддержке стенок снизу. Бетонирование суппорта – полезная, но второстепенная мера. Чугунная отливка суппорта и в пустотелом состоянии достаточно жестка.

Модальный анализ. Обнаружено, что в диапазоне от 0 до 100 Гц несущей системе станка свойственны 7 устойчивых резонансных мод.

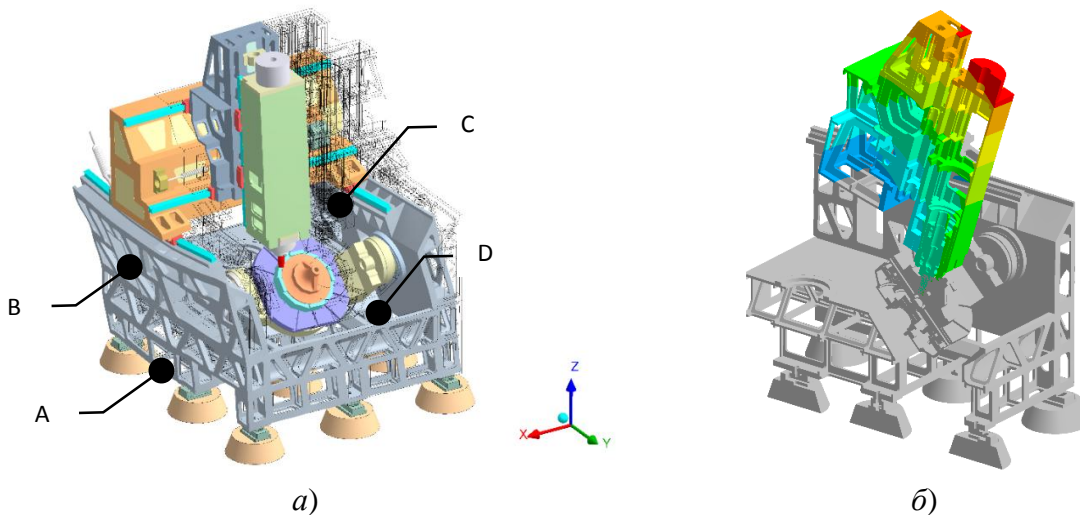


Рис. 4. Нижние резонансы: *a* – параллелограммный (*ABCD*) изгиб стенок по X (*Walls*; 19,5 Гц); *б* – кручение траверсы и клевки ползуна (*Tors1*; 27,9 Гц)

Их можно разделить на группы *Mx* (моды *Walls*, *Pend sy*, *Yaw*, *Pend an*) и *Myz* (моды *Tors1*, *Tors2*, *Tors3*). Моды *Mx* возбуждаются компонентами силы резания в направлении X. Моды *Myz* возбуждаются как с направления Y, так и с направления Z. Кроссинг колебаний между группами невелик.

Нижний резонанс станка *Walls* (рисунок 4, *a*) заключается в синхронных изгибах стенок (параллелограмм *ABCD*), что влечет колебания вдоль X траверсы, суппорта, ползуна и инструмента. Данному резонансу соответствуют пики *Walls* на АЧХ на рисунке 6. Моду *Walls* можно понимать, как колебания углов параллелограмма – портала *ABCD*, образованного стенками и траверсой. Рисунок 4, *a* подчеркивает опасность бетонирования траверсы при пустотелых стенках.

Все три моды группы *Myz* являются торсионными. Они связаны с кручением траверсы вокруг оси, параллельной X (рисунок 4, *б*). Торсионные моды визуально подобны друг другу и включают клевки ползуна. Различия связаны с местоположением оси кручения. В исходном варианте ПЧ особенно мощной является мода *Tors2*. Ей соответствует самый высокий пик на АЧХ по Y на рисунке 7.

В группе мод *Mx* на частотах выше 55 Гц обнаружена триада подобных друг другу мод, характеризующаяся двумя согласованными по фазе движениями. Одним движением является рыскание (*yawing*) траверсы – суппорта – ползуна в плоскости XY. Вторым движением оказывается колебание ползуна, как маятника (*pendulum*) в плоскости XZ (центр O на рисунке 5).

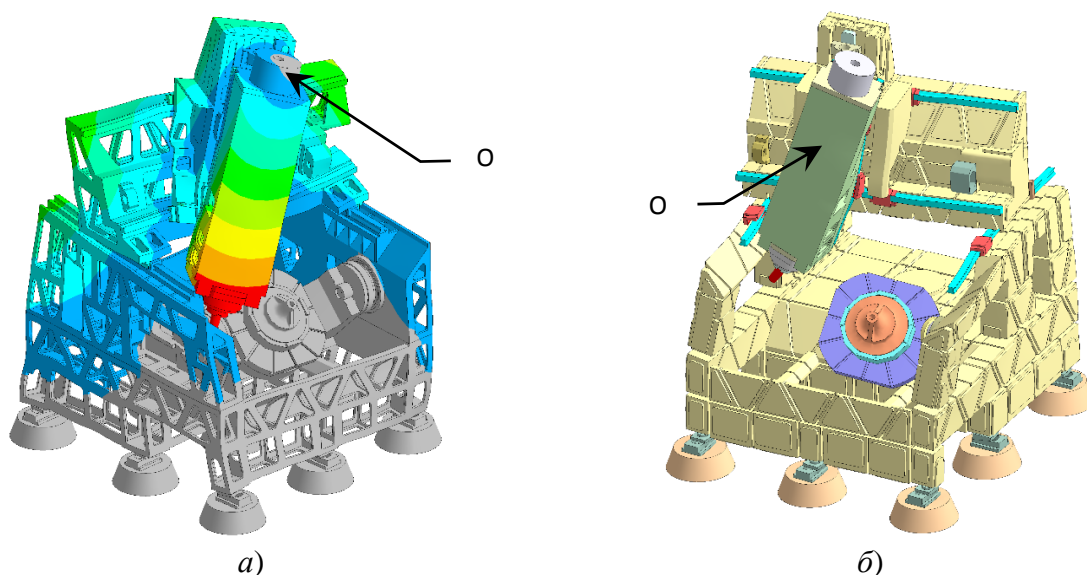


Рис. 5. Среднечастотные резонансы станка: *a* – рыскание ползуна в XY (мода *Yaw*; 68,1 Гц) (ПЧ); *б* - антифазный (*Pend an*, 104,2 Гц), (ЧБ)

В обсуждаемой триаде (обозначим ее как *Pend-Yaw*) одна из мод имеет доминирующим движением рыскание. Поэтому как отмечена (рисунок 5, *a*) как *Yaw*. В двух других модах ведущим является раскачивание «маятника – ползуна». Оно сопровождается или синфазным качанию изгибом стенок (мода *Pend sy*), или антифазным (балансирующим) изгибом стенок (мода *Pend an*; рисунок 5, *б*). Триада пиков мод *Pend-Yaw* хорошо видна в правой части АЧХ на рисунке 6.

Гармонический анализ. При гармоническом анализе силы на детали и инструменте осциллировали в противофазе с амплитудой в 1 кН. АЧХ были построены в диапазоне от 1 до 110 Гц с шагом в 1 Гц. Для направлений X и Y они даны на рисунке 6 и 7. АЧХ для направления Z показывает те же эффекты, что и АЧХ по Y. Для каждой точки ордината является амплитудой колебаний ШТ. Раскачка НС через ползун более интенсивна, чем через глобусный стол.

АЧХ по X (рисунок 6) показывает, что для пустотелого станка (ПЧ) опасны два пика: *Walls A* (22 Гц) и *Yaw A* (68 Гц). *Бетонирование по низу (БТСС)* ослабляет по амплитуде и сдвигает вверх по частоте только первый из них (*Walls B*). Из-за утяжеления суппорта бетоном пик *Yaw B* даже перемещается (без ослабления) вниз на частоту 64 Гц.

Полное бетонирование (ЧБ) ослабляет резонанс станка *Walls C* в 2,33 раза и смещает его вверх на частоту 36 Гц. В триаде резонансов *Pend-Yaw* происходит перераспределение возбуждаемости. Ведущим становится пик *Pend C sy* (84 Гц). Он слабее исходного пика *Yaw A* в 1,66 раза. Дальнейшее ослабление пиков *Pend-Yaw* можно осуществить переходом на двойные параллельные привода подачи суппорта, а также расширением опорной базы ползуна.

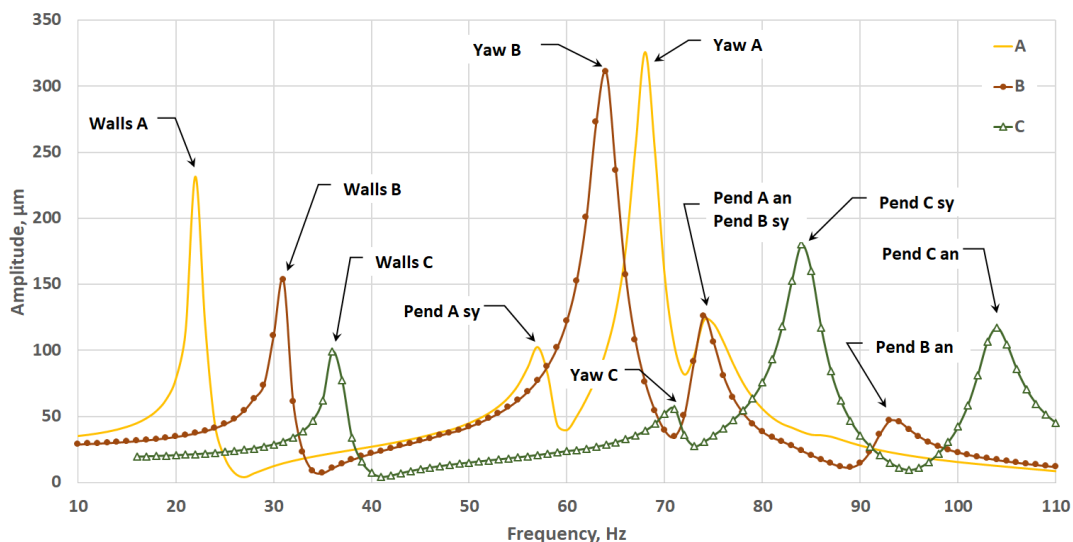


Рис. 6. АЧХ шпиндельного торца в направлении X для вариантов ПЧ, БТСС и ЧБ (линии А, В, С соответственно)

Кривые на рисунке 7 показывают возбуждение крутильных резонансов траверсы. Нижний резонанс *Tors1 A* в пустотелом станке (ПЧ) слаб в направлении Y (действует по Z). Основную опасность вдоль Y представляет пик *Tors2 A*. Из-за него на частоте 47 Гц динамическая жесткость падает до 3,7 Н/мкм. Это несовместимо с точным резанием.

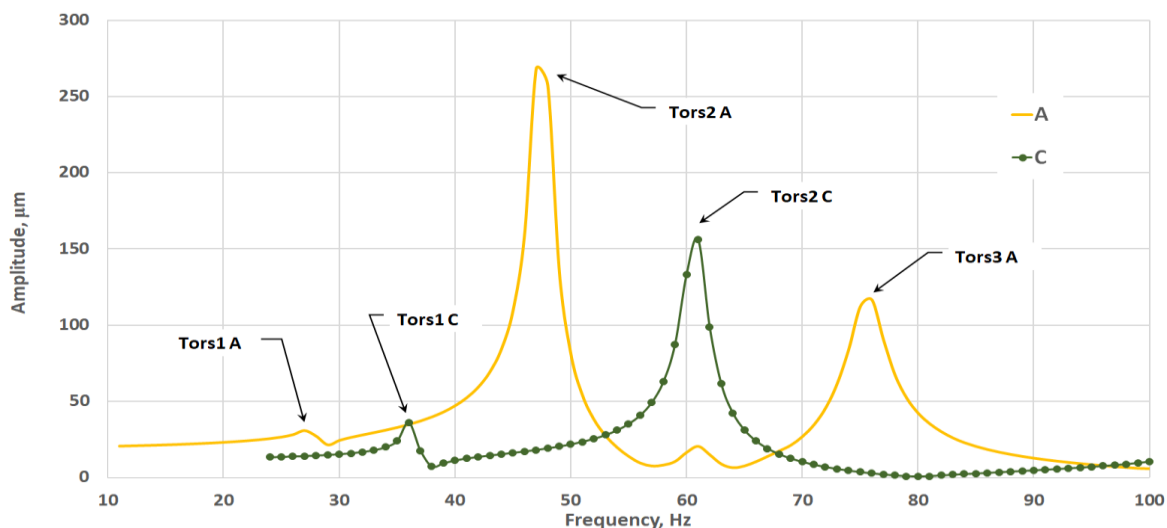


Рис. 7. АЧХ шпиндельного торца по Y: линии А, С – варианты ПЧ, ЧБ

Выходом является *полное бетонирование (ЧБ)*. Пик *Tors2 C* смещается вверх, ослабевает в 1,72 раза, но остается слишком опасным, чтобы фрезеровать на его частоте (60 Гц; жесткость только 6,4 Н/мкм). Однако, резонанс *Tors1* ослабляется и равномернее распределяется между направлениями Y и Z. Поэтому *полное бетонирование* освобождает для точной и производительной обработки частоты от 0 до 55 Гц и от 65 до 100 Гц.

Выводы:

1. Станок в исходном состоянии недостаточно жестко удерживает инструмент в ползуне. Деталь на глобусном столе фиксируется на порядок жестче. Стол усиливать не нужно.

2. Бетонирование только станины (БТСС) почти не влияет на статическую жесткость станка и умеренно демпфирует резонансные пики. Данное решение поднимает вверх только нижний резонанс *Walls* (с 22,1 до 31 Гц).

3. Бетонирование рационально проводить для всего станка. Бетонирование по частям малоэффективно и в статическом, и динамическом плане.

4. Полное бетонирование чугунных деталей (ЧБ) увеличивает статическую жесткость станка примерно вдвое по каждому направлению X, Y, Z.

5. Полное бетонирование увеличивает динамическую жесткость: в 2,33 раза для пика *Walls*; в 1,72 раза для *Tors2*; в 1,81 раза для триады пиков *Pend-Yaw*.

6. Направление X является наименее жестким в станке и уступает другим направлениям в 1,82 раза. Его следует усилить при модернизации станка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Довнар, С. С.; Авсиевич, А. М.; Колесников, Л. А.; Мищенко, Е. Ф.; Ермилова, А. А. МКЭ-моделирование 5-осевого станка // Инновации в машиностроении: 18-ая Международная науч.-техн. Конференция «Наука – образованию, производству, экономике» – Минск : БНТУ, 2021. – С. 42–46. <https://rep.bntu.by/handle/data/94525>

2. Vasilevich Y. V., Dounar S. S., Karabaniuk I. A. Finite element analysis of concrete filler influence on dynamic rigidity of heavy machine tool portal. *Science & Technique*. 2016;15(3):233-241. (In Russ.) <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2016-15-3-233-241>

3. Dounar, S., Iakimovitch, A. & Jakubowski, A. (2021) Finite element analysis of the dynamically created portal in the huge machine tool of “travelling column” type. *Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie* 65 (137) <https://doi.org/10.17402/458>

4. Dounar, S. & Jakubowski, A. (2021) Dynamic finite element analysis of rotor-shaft fastening into a heavy precise lathe. *Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie* 66 (138), <https://doi.org/10.17402/467>

Поступила: 05.02.2022

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОГО ИЗНОСА ШАХТНОГО ПРОВОДНИКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С НАПРАВЛЯЮЩИМИ РОЛИКАМИ

Николайчик М. А., Маевский П. С.

Белорусский Государственный Университет, Минск

Введение. Подъемные установки занимают чрезвычайно важное место в работе предприятия по подземной добыче полезного ископаемого. Они предназначены не только для подъема полезных ископаемых на поверхность, но и для спуска в шахты крупногабаритной техники.

Комплекс шахтного подъемного сосуда (скипа) является одним из ключевых систем подъемного шахтного комплекса. Обеспечение безаварийного и оптимального режима работы системы требует решения сразу нескольких задач механики.

Сложность исследования таких проблем обусловлена большим количеством элементов в системе и в том, что каждый элемент может выполнять отдельную функцию и иметь собственный режим работы.

Одним из центральных элементов в конструкции подъемного сосуда является контактная группа «ролики подъемного сосуда – направляющие проводники». Актуальной является проблема построения таких механико-математических моделей, на основе которых может быть исследовано поведение элементов под действием повторяющихся с течением времени нагрузок [1]. Важность проведения анализа долговечности конструкции на основе этих моделей обусловлена тем, что без понимания как конструкция работает в условиях циклического нагружения и без использования методов визуального контроля, оценка безопасности шахтных подъемов невозможна. Проведение экспериментов для всех возможных сценариев разрушения являются слишком затратными.

В статье приводятся результаты анализа долговечности элементов конструкции, полученные путем проведения усталостного анализа на основе существующей конечно-элементной модели, разработанной для решения задачи контактного взаимодействия направляющих роликов с проводником при движении скипа [2], а также расчетных величин воздействия скипа на направляющие проводники в зависимости от конструкций ствола и параметров движения скипа [3, 4]. Рассматривается конструкция шахтного подъема с двумя ограничительными проводниками, расположенными с противоположных сторон скипа. По каждому проводнику движется набор из трех роликов, прижатых пружинами к разным сторонам проводника.

Отметим, что при проведении усталостного анализа рассматривалось как взаимодействие отдельного направляющего ролика с проводником, так и системы из двух направляющих роликов.

Постановка задачи. В ходе выполнения исследования рассмотрена следующая задача: исследовано влияние контактных условий на количество циклов до усталостного разрушения конструкции при взаимодействии в наиболее опасном сечении (по центру проводника) как в одном направлении (контакт 1 ролика с проводником), так и в 2 направлениях (контакт 2 роликов с проводником). Также, было определено количество циклов приводящих к разрушению проводника при заданной контактной нагрузке.

При построении конечно-элементной модели использовались следующие геометрические параметры тел:

Ролик: внешний диаметр – 320 мм, внутренний диаметр – 200 мм, ширина ролика – 100 мм.

Сечение проводника: длина направляющей – 6000 мм, сторона внешнего квадрата – 200 мм, сторона внутреннего квадрата – 164 мм, толщина стенок – 18 мм.

При построении конечно-элементной модели был выбран линейный порядок элементов, так как для проведения усталостного анализа необходимо сначала решить задачу контактного взаимодействия роликов с проводником, что подразумевает многократные циклы вычислений, что в свою очередь требует много вычислительных ресурсов. Для настройки сетки был использован метод MultiZone mesh, обеспечивающий разбиение геометрии на отображаемые (структурированные) и свободные (неструктурированные) области [5]. Алгоритм автоматически генерирует чистую шестигранную сетку там, где это возможно, а затем заполняет более трудные области неструктурированной сеткой.

Граничные условия. Рассматривается ситуация закрепления проводника на концах направляющей, система роликов расположена по центру балки. На ролики действует распределенная нагрузка амплитудой 100 кН.

Физико-механические свойства тел. Материал проводника – сталь. Ролик представляет собой прорезиненную снаружи сталь, поэтому были выбраны усредненные значения констант. Эффективный модуль Юнга рассчитывался по формуле:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2},$$

где $E_1 = 200$ ГПа – модуль Юнга стали, а $E_2 = 180$ МПа – модуль Юнга резины.

Коэффициент Пуассона для резины составляет 0,49, для стали – 0,3.

Проводник и ролики в рассматриваемой задаче принимаются изотропными линейно-упругими телами.

Положение системы роликов моделируется в середине балки, так как в этом случае, на наибольшем расстоянии от концов одного пролета проводника создаются самые благоприятные условия для возникновения максимального изгибающего момента, а, следовательно, и максимальных напряжений.

При выполнении усталостного анализа рассматривались такие два типа контактного взаимодействия:

а) нелинейный контакт, когда имеет место скольжение в области контакта, при этом коэффициент трения равен нулю, а нормальное давление принимает нулевое значение в случае отрыва (тип Frictionless);

б) контакт с трением, когда в области контакта тел возникают касательные напряжения, при достижении которыми предельного значения имеет место скольжение тел друг относительно друга (тип Frictional).

При проведении усталостного анализа необходимо выбрать цикл изменения напряжений, другими словами, какой характер нагрузки испытывает анализируемая деталь во время эксплуатации. Существует два основных вида циклов напряжения: симметричный и несимметричный. Однако всякий несимметричный цикл можно рассматривать как сумму постоянного напряжения и симметричного цикла. В настоящей статье был выбран частный случай несимметричного цикла напряжения – отнулевой [6].

Был вычислен коэффициент асимметрии:

$$R = \frac{S_{\min}}{S_{\text{mean}}},$$

где S_{\min} – минимальное напряжение цикла, S_{mean} – среднее напряжение цикла.

Для симметричного цикла $R = -1$. В случае, когда он отличен от этого значения, в детали существует среднее напряжение. Объем разрушений, вызванный циклом напряжений, зависит не только от переменного напряжения, но и от среднего напряжения. Переменное напряжение вычисляется как половина разности максимального и минимального напряжений в цикле

$$S_a = \frac{(S_{\max} - S_{\min})}{2}.$$

Влияние средних напряжений на количество циклов до разрушения конструкции демонстрируется диаграммой Хейя (рисунок 5) [7].

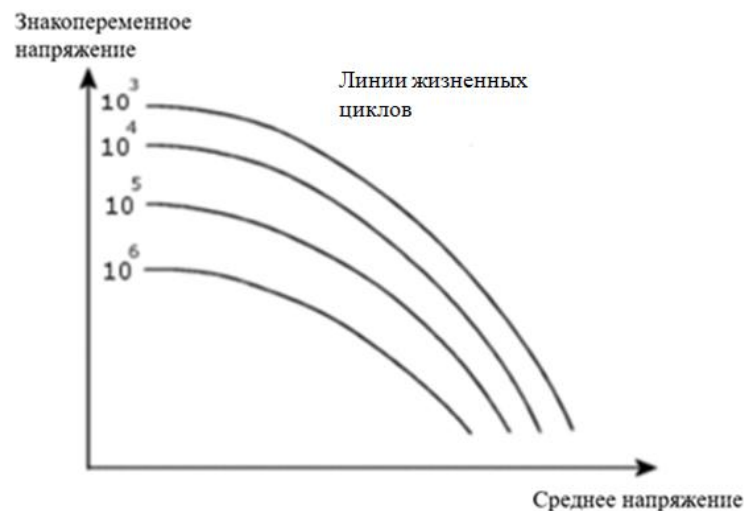


Рис. 1. Диаграмма Хейя

Из приведенной диаграммы можно сделать вывод о том, что увеличение средних напряжений больше влияет на изменение количества циклов до усталостного износа детали, чем увеличение переменных напряжений. Следовательно, при проведении усталостного анализа с использованием несимметричного цикла, следует учитывать среднее напряжение.

Свойства выносливости материала обычно определяются на основе испытаний с использованием симметричного цикла напряжений с постоянной амплитудой. На практике эксплуатируемые детали редко испытывают такой тип нагрузки. С другой стороны, проведение испытаний для различных средних напряжений или соотношений напряжений может оказаться неэффективным и очень затратным. В таком случае существуют эмпирические методы корректировки среднего напряжения. При исследовании рассматриваются следующие методы:

а) метод Гудмана – обычно используется для хрупких материалов:

$$S_{ca} = \frac{S_a}{1 - \left(\frac{S_{mean}}{S_u}\right)};$$

б) метод Гербера – обычно используется для пластичных материалов:

$$S_{ca} = \frac{S_a}{1 - \left(\frac{S_{mean}}{S_u}\right)^2};$$

в) метод Содерберга – самый консервативный:

$$S_{ca} = \frac{S_a}{1 - \left(\frac{S_{mean}}{S_y}\right)^2};$$

где S_y – предел текучести, S_{ca} – скорректированное переменное напряжение, S_{mean} – среднее напряжение, S_u – предел прочности.

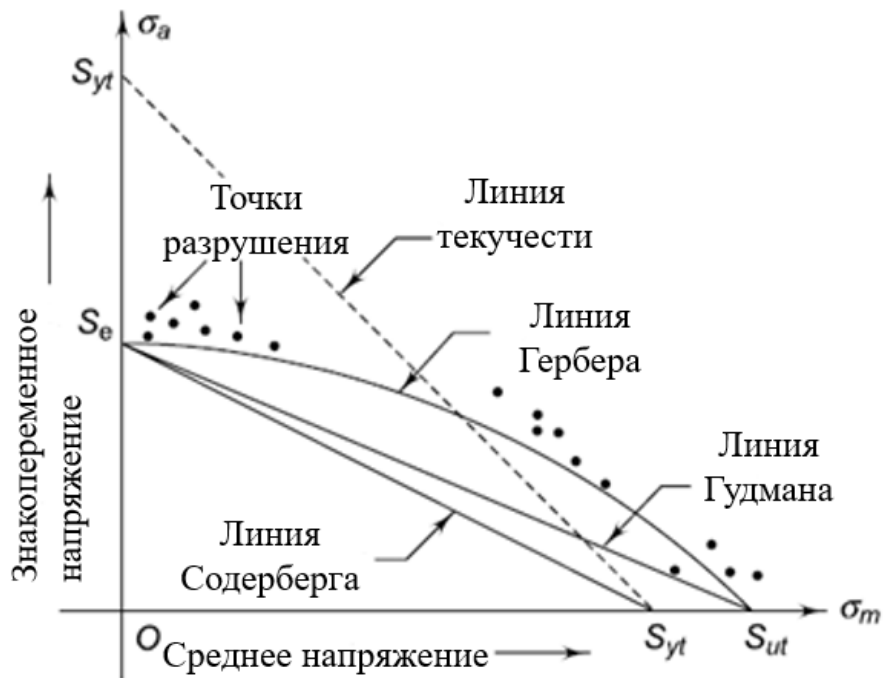


Рис. 2. Графики уравнений методов коррекции среднего напряжения

Эти методы используются для учета средних напряжений, чтобы скорректировать уровень напряжений, для того, чтобы сравнить циклы напряжений со стандартной S-N кривой, полученной для симметричного цикла напряжений при $R = -1$.

Для выбора типа напряжений по которому будет идти оценка усталости конструкции воспользуемся коэффициентом Надаи-Лодэ:

$$\mu = 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)} - 1.$$

Значение $\mu = 1$ соответствует одноосному сжатию, $\mu = -1$ – растяжению, а $\mu = 0$ – чистому сдвигу.

Результаты моделирования (рисунок 3, а, б) показывают, что в области концентрации напряжений для обоих рассматриваемых случаев преобладают напряжения растяжения и сдвига. Поэтому в качестве напряжений для оценки усталости конструкции помимо эквивалентных выберем также касательные напряжения.

Результаты выполнения компьютерного моделирования.

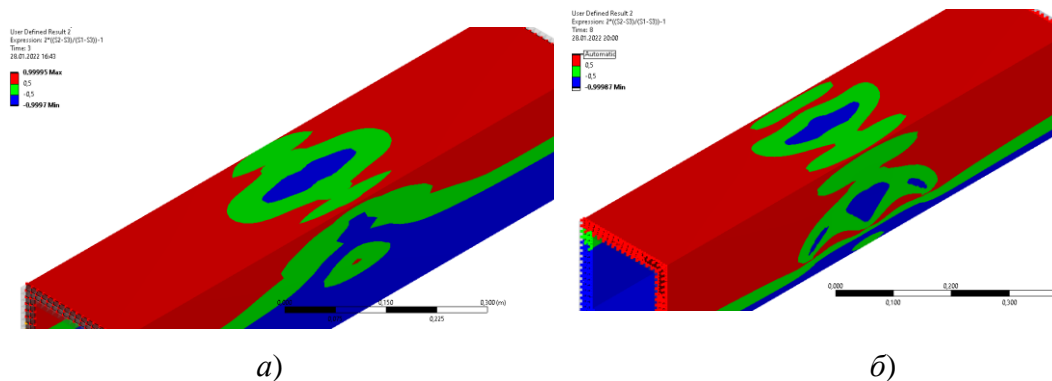


Рис. 3. Распределение коэффициента Надаи-Лодэ в контактной зоне для типа Frictional с коэффициентом трения 0,3: а – для одного ролика; б – для двух роликов

Далее на рисунках приведены некоторые результаты численных экспериментов.

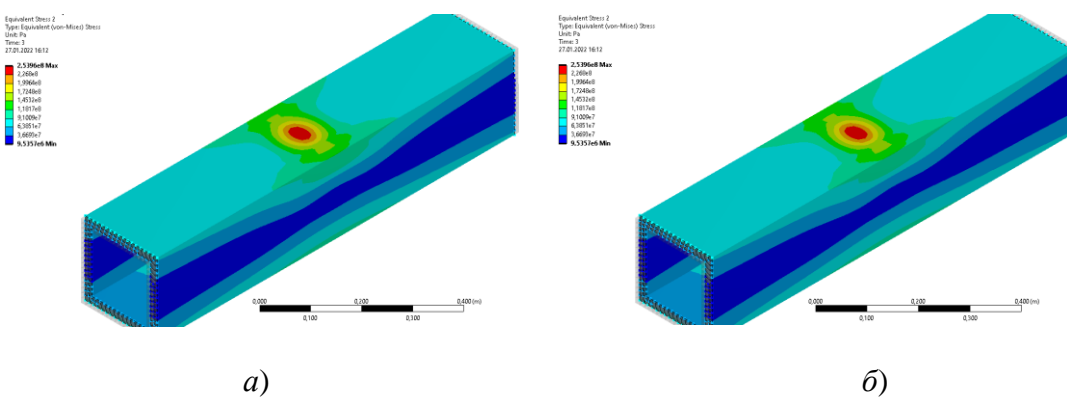


Рис. 4. Эквивалентные напряжения при воздействии на проводник одного ролика: а – для типа Frictionless; б – для типа Frictional с коэффициентом трения 0,3

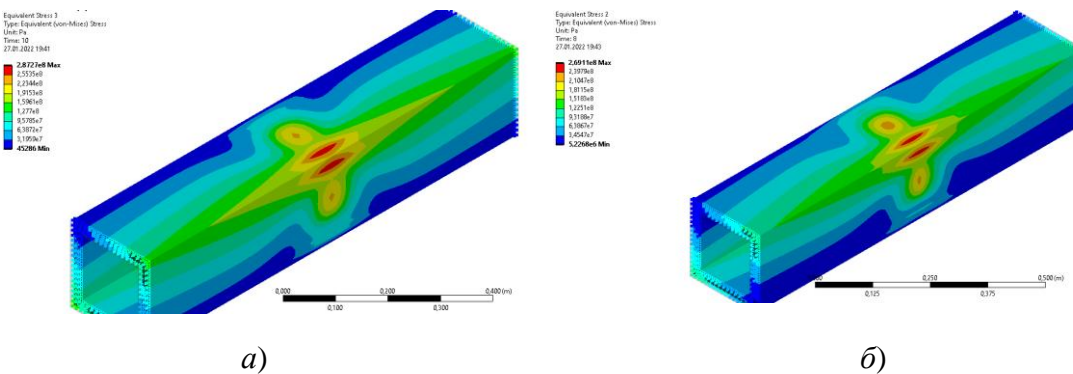


Рис. 5. Эквивалентные напряжения при воздействии на проводник двух роликов: а – для типа Frictionless; б – для типа Frictional с коэффициентом трения 0,3

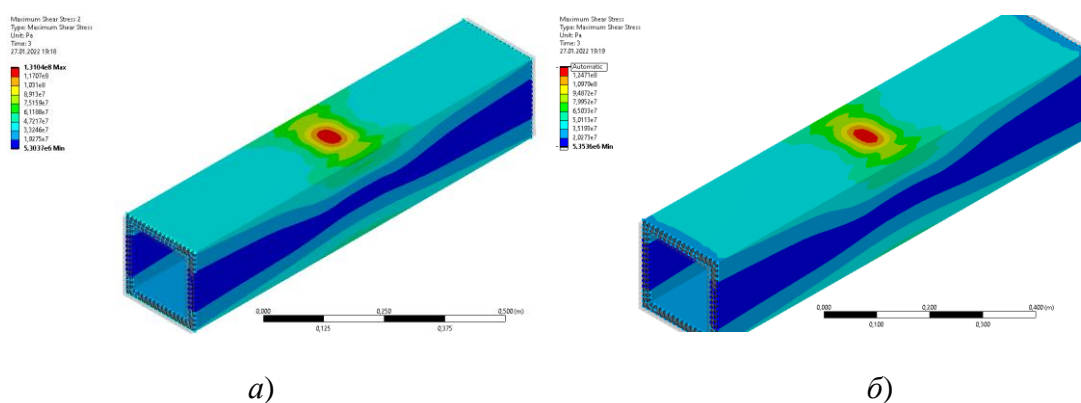


Рис. 6. Максимальные касательные напряжения при воздействии на проводник одного ролика:
а – для типа Frictionless; *б* – для типа Frictional с коэффициентом трения 0,3

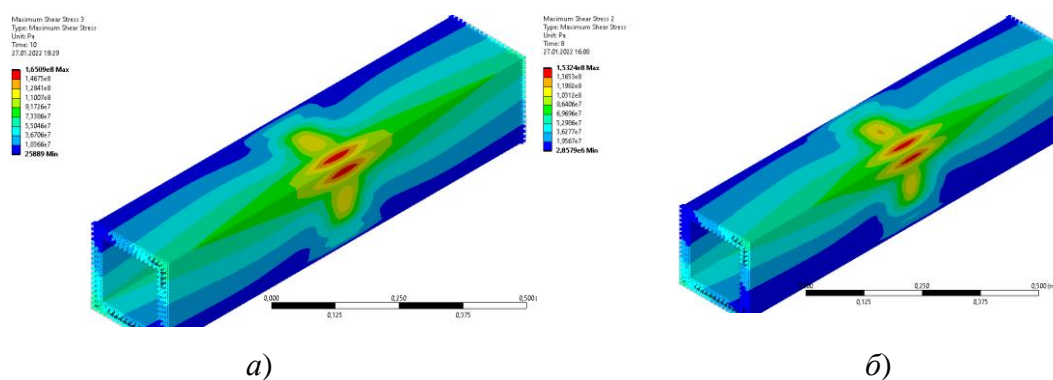


Рис. 7. Максимальные касательные напряжения при воздействии на проводник двух роликов:
а – для типа Frictionless; *б* – для типа Frictional с коэффициентом трения 0,3

Таблица 1 – Сравнение значений количества циклов до усталостного разрушения проводника при взаимодействии с одним роликом

Тип контакта	Без трения	Без трения	С трением	С трением
Компонента напряжения	Эквивалентные напряжения	Максимальные касательные напряжения	Эквивалентные напряжения	Максимальные касательные напряжения
Метод Гудмана	53480	35335	41495	25406
Метод Содерберга	14848	8570,9	10536	5587,8
Метод Гербера	1,2542e5	88626	1,0146e5	67185

Таблица 2 – Сравнение значений количества циклов до усталостного разрушения проводника при взаимодействии с двумя роликами

Тип контакта	Без трения	Без трения	С трением	С трением
Компонента напряжения	Эквивалентные напряжения	Максимальные касательные напряжения	Эквивалентные напряжения	Максимальные касательные напряжения
Метод Гудмана	5917,6	4063,1	13736	9490,2
Метод Содерберга	565,24	254,27	2266,8	1309,2
Метод Гербера	17830	12625	39319	28150

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1) при взаимодействии одного ролика с проводником прослеживается следующая зависимость – при учете трения, количество циклов до усталостного разрушения проводника заметно понижается для любых комбинаций методов коррекции среднего напряжения и компонент напряжений;

2) при взаимодействии двух роликов с проводником количество циклов до усталостного разрушения уменьшается, по сравнению со значениями при взаимодействии проводника с одним роликом;

3) в случае воздействия на проводник двух роликов, значения количества циклов до возникновения усталостных трещин для контакта с трением больше, чем для контакта без трения. Это обусловлено тем, что в случае взаимодействия с одним роликом, зоной концентрации напряжений и, как следствие, областью зарождения усталостных трещин является зона контакта ролика с проводником. Соответственно, при повышении коэффициента трения, концентрация напряжений в зоне контакта возрастает. В то же время, область зарождения усталостного износа в случае воздействия со стороны двух роликов находится вне зоны контакта. Таким образом, при повышении коэффициента трения, в случае контакта проводника с двумя роликами, величины деформаций и, как следствие, напряжений в зоне их максимальной концентрации падают.

Заключение. На основе разработанной в предыдущих исследованиях конечно-элементной модели контактного взаимодействия роликов с проводником проведено сравнение результатов усталостного анализа при различных типах контактного взаимодействия, моделях усталостного износа и количества роликов, действующих на проводник.

Выявлены зависимости влияния типа контакта на количество циклов жизни системы при использовании различных моделей усталостного износа. Установлено, что наиболее оптимальными методами коррекции среднего напряжения для рассмотренной конструкции и материалов является методы Гудмана и Содерберга. Метод Содерберга позволяет получить количество циклов, которое выдерживает деталь до появления пластических деформаций, а метод Гудмана допускает наличие пластических деформаций и позволяет получить более точное значение количества циклов до усталостного износа, чем значение, полученное с использованием метода Герберга.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. I. Samusia, I. S. Piina, S. S. Piina. Computer modeling and investigation of dynamics of system «vessel–reinforcement» in shafts with broken geometry. Bulletin of PNRPU. Geology. Oil & Gas Engineering & Mining. 2016. Vol. 15, no. 20. P.277–285.

2. Журавков М. А., Николайчик М. А., Маевский П. С. Контактная задача о взаимодействии направляющего ролика с шахтным проводником. Механика Машин Механизмов и Материалов, 2021, № 3, стр. 83–89.

3. Журавков М. А., Хвесеня С. С., Николайчик М. А. Определение силового взаимодействия скипа с направляющими по данным профилировки проводников. Актуальные вопросы машиноведения. 2020, выпуск 9, стр. 38–42.

4. Nikolaitchik M. A., 2020. Determination of the skip force effect on guides in mine shaft. E3S Web of Conferences. Vol. 201, 01007.

5. Федорова Н. Н., Вальгер С. А., Данилова М. Н., Захарова Ю. В. Основы работы в Ansys 17. – Москва: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.

6. Вахромеев А. М. Определение циклической долговечности материалов и конструкций транспортных средств. – Москва: МАДИ, 2015. – 8 с.

7. Fisible State Product Development and Support Innovation Cycle R&D [Электронный ресурс]; авт. Fisible State – Электрон. Текстовые дан. – Режим доступа: (<https://fisible.wordpress.com/fatigue-life-analysis/>), свободный. – Загл. с экрана. Fatigue Life Analysis.

8. Kuznetsov N. K., Eliseev S. V., Perelygina A. Yu. (2018). Reduction of Dynamic Loads in Mine Lifting Installations. *Journal of Physics: Conference Series*, 944, 1–9.

9. Renyuan Wu, Zhencai Zhu, Guohua Cao. (2015). Computational Fluid Dynamics Modeling of Rope-Guided Conveyances in Two Typical Kinds of Shaft Layouts. *PLoS ONE*, 10(2), 1–12.

10. Renyuan Wu, Zhencai Zhu, Guoan Chen, Guohua Cao, Wei Li. (2014). Simulation of the lateral oscillation of rope-guided conveyance based on fluid-structure interaction.

11. Pershin V., Kopytov A., Wetti A. (2019). Research in the Impact of Dynamic Loads for the Development of Pentice Designs when Sinking Skip Shafts. *IVth International Innovative Mining Symposium*, 105, 1–6.

12. Wolny S., Matachowski F. (2010). Analysis of loads and stresses in structural elements of hoisting installations in mines. *Engineering Transactions*, 58(3–4), 153–174.

13. Журавков М. А., Старовойтов Э. И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учебное пособие. – Минск: БГУ, 2011 – 543 с.

14. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория упругости. – Москва: 1987. – 246 с.

15. Попов В. Л. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Физматлит, 2013. – 352 с.

16. Дрозд М. С., Матлин М. М., Сидякин Ю. И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. – Москва: Машиностроение, 1986. – 224 с.

Поступила: 30.01.2022

ПРОЦЕССЫ КОНДЕНСАЦИИ И СУШКИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА В ДВУХСЛОЙНОЙ ДЫМОВОЙ ТРУБЕ

¹Конон П. Н., ²Поддубная М. А.

¹УО «Белорусский государственный университет», Минск

²УО «Полоцкий государственный университет», Полоцк

Республика Беларусь находится в таком климатическом регионе, где различия в потреблении энергии в зимний и летний периоды существенны. Поэтому создание надежных энергетических аппаратов, в том числе высотных дымовых труб ТЭС и ГРЭС, в условиях частых пусков и остановок котельного оборудования [4], при которых необходимо рассматривать нестационарные условия тепло- и массообмена в конструкциях труб, учитывающие перенос влаги в виде конденсата и интенсивные фазовые превращения как на поверхности конструкций, так и поровой структуре материала футеровки [6], является значимой задачей. Кроме того, многократные циклы «нагрев-выдержка-охлаждение» оказывают наиболее существенное влияние на параметры напряженно-деформированного состояния конструкции.

Постановка задачи. Исследуем нестационарные процессы тепломассопереноса в двухслойной дымовой трубе во время подъема температуры дымовых газов. Внутренний слой пористый и называется футеровкой, внешний слой – железобетонный. Подробная постановка задачи для двухслойной и многослойной конструкции дымовой трубы дана в работах [7, 8]. В данной работе особое внимание будет уделено образованию пленки конденсата, оценке ее толщины, влиянию конденсации на температурное поле в конструкции, процессу просушивания материала футеровки.

Так как труба имеет форму усеченного конуса, то это приводит к постановке задачи в цилиндрической системе координат с учетом независимости процессов переноса относительно окружной координаты. Однако в силу того, что радиус трубы достаточно большой, и температура дымовых газов в пределах одной зоны порядка 25 м по высоте меняется незначительно на 2–3 °С, будем рассматривать нестационарные процессы тепло- и массообмена, зависящие от координаты x , что показано на рисунке 1. При повышении температуры дымовых газов из холодного состояния происходят процессы конденсации водяных паров и паров серной кислоты. Потоки этого агрессивного компонента через поверхность футеровки составляют незначительную величину и их влияние на температурно-влажностный режим не учитывается. Образующийся конденсат частично проникает в поры футеровки, основная же часть стекает по вертикальной, длинной, неровной стенке. Термическим сопротивлением пленки конденсата в модели пренебрегаем. Процессы конденсации происходят при температуре дымовых газов ниже точки росы, то есть когда давление водяных паров превышает давление насыщения на внутренней поверхности футеровки. В дальнейшем начинается процесс испарения – сушка увлажненной части трубы [9].

Температура и давление дымовых газов считаются известными функциями времени. В определенном сечении трубы $y = const$ можно считать, что уравнение поверхности пленки есть $x = h(t)$. Выделим следующие области при исследовании тепло- и массопереноса: 1 – область $x < h(t)$ – поток перегретой паровоздушной смеси, которая конденсируется на пористой поверхности; 2 – область $h(t) < x < 0$ – сплошная жидкая пленка, стекающая по неровной вертикальной поверхности; 3 – область $0 < x < \delta_1$ – ка-

пиллярно-пористая среда, в которой исследуется тепло- и влагоперенос; 4 – область $\delta_1 < x < \delta_1 + \delta_2$ – твердое тело, в котором рассматривается теплоперенос.

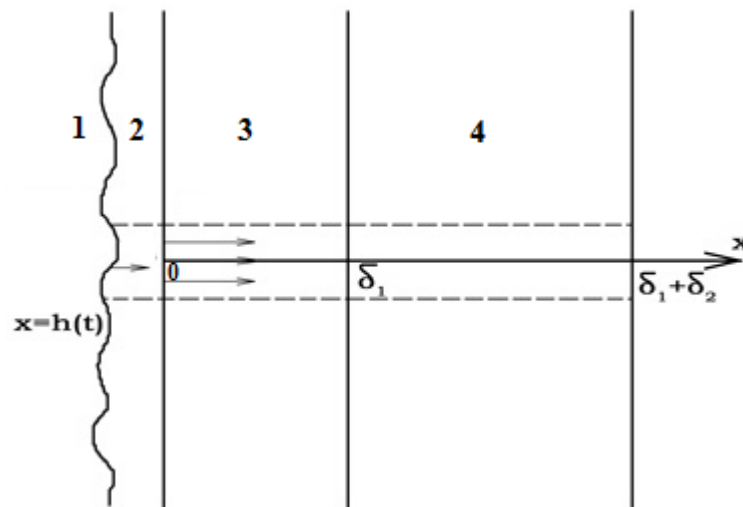


Рис. 1. К исследованию тепломассопереноса в двухслойной конструкции трубы

В области 2 имеем движение жидкой пленки конденсата под действием силы тяжести по неровной поверхности. Эта задача имеет свой гидродинамический интерес. Граница раздела фаз $x = h(t)$ находится после решения задачи тепломассообмена по скорости конденсации $g_k(t)$, определяемой как количество сконденсировавшейся жидкости на единице площади поверхности в единицу времени.

В области 3 рассматривается диффузия жидкости через пористый скелет тела, а также капиллярное впитывание. Термическим сопротивлением пленки конденсата в модели пренебрегаем. Определим удельное влагосодержание U как количество жидкости в единице объема скелета пористого тела. Полная модель процессов тепломассопереноса дана в работе [7]. В данном исследовании представлены новые результаты исследования по модели, рассмотренной в работе [8], усложненной процессом сушки.

Модель включает уравнения диффузии тепла $T(x,t)$ и влаги $U(x,t)$ с переменными коэффициентами переноса. Перенос влаги рассматривается только в пористом слое футеровки толщиной δ_1 . На границе $x=0$ для температуры задаются граничные условия третьего рода с учетом конденсации на свободной поверхности, учитывая, что температура дымовых газов линейно изменяется со временем. На внешней границе $x = \delta_1 + \delta_2$ задаются граничные условия теплообмена третьего рода. На поверхности соприкосновения слоев ставятся условия равенства температур и потоков тепла.

Граничные условия для определения влажностного поля определяются из следующих соображений. Если поток влаги $-a_m \partial U / \partial x$ не превосходит интенсивности конденсации $g_k(t)$, то на границе $x=0$ задается значение влагосодержания, соответствующее полному насыщению. Если же поток влаги больше интенсивности конденсации, то на границе ставится условие равенства потока влаги и интенсивности конденсации. Описанные уравнения, граничные и начальные условия имеют вид:

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T,U) \frac{\partial T}{\partial x} \right],$$

$$\lambda(T,U) = \begin{cases} \lambda_1(T,U), & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ \lambda_2(T), & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases}, \quad c\gamma = \begin{cases} c_1\gamma_1, & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ c_2\gamma_2, & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad 0 \leq x \leq \delta_1. \quad (2)$$

$$-\lambda_1(T,U) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 [T_2 - T(0,t)] + g_\kappa(t)r, \quad T_2 = T_g + kt. \quad (3)$$

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=\delta_1} = 0, \quad [T]_{x=\delta_1} = 0. \quad (4)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1+\delta_2} = \alpha_2 [T(\delta_1 + \delta_2, t) - T_g]. \quad (5)$$

$$U(0,t) = U_{nn}, \quad -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq g_\kappa(t),$$

$$-a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_\kappa(t), \quad -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} > g_\kappa(t). \quad (6)$$

$$U|_{x=\delta_1} = U_p. \quad (7)$$

$$T(x,0) = T_g, \quad U(x,0) = U_0. \quad (8)$$

Для расчета коэффициента теплоотдачи α_1 от потока турбулентного течения дымовых газов к футеровке использовано уравнение [3]

$$Nu = 0.032 Re^{0.8} Pr^{0.3} \left(\frac{d}{h} \right)^{0.054}. \quad (9)$$

Интенсивность конденсации $g_\kappa(t)$ определяется формулой:

$$g_\kappa(t) = g_\kappa(T(0,t)) = \beta \{ P_n(t) - P_H[T(0,t)] \}. \quad (10)$$

Для определения давления насыщения P_H на стенке при $x=0$ использовалась эмпирическая формула [6]:

$$P_H(T) = \begin{cases} 165914 e^{\frac{7.331(T-374)}{T+273}}, & T > 100 \text{ }^\circ\text{C} \\ 760 e^{\frac{13.963(T-100)}{T+273}}, & T < 100 \text{ }^\circ\text{C} \end{cases}. \quad (11)$$

Если давление насыщения на стенке $x=0$ сравнивается с давлением паровоздушной смеси P_n , то конденсация заканчивается. Из этого условия можно определить время конденсации t_k .

При $t > t_k$ процесс конденсации прекращается и начинается сушка увлажненной футеровки. Модель этого процесса описывается на основе теории углубления фронта фазового превращения свободной влаги [9]. Подвижная граница фазового перехода $x = \xi(t)$ имеет температуру равную температуре кипения воды T_n , что показано на рисунке 2. На этой границе происходит переход от жидкого состояния в парообразное, на что требуется теплота перехода r (ккал/кг). На границе раздела $x = \xi(t)$ выполнено условие Стефана [1]

$$\lambda_{11} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} - \lambda_{12} \frac{\partial T_{12}}{\partial x} = -rU(t) \frac{d\xi}{dt}. \quad (12)$$

Здесь $T_{11}(x,t)$, λ_{11} – температура и коэффициент теплопроводности сухой фазы 1 футеровки $T_{12}(x,t)$, λ_{12} – эти же величины для влажной фазы 2 футеровки. Поля температур $T_{11}(x,t)$ и $T_{12}(x,t)$ определяются решением уравнения (1).

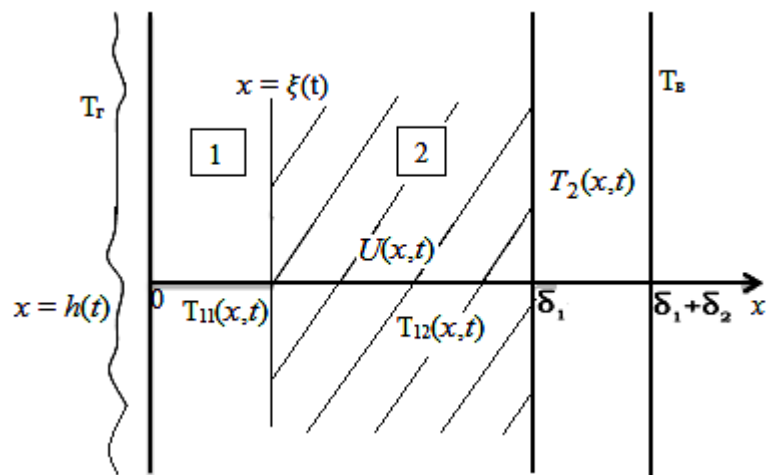


Рис. 2. Схема сушки в футеровке

В соотношениях (1–12) обозначены: Nu – число Нуссельта, $Nu = \alpha_1 d / \lambda_2$; Re – число Рейнольдса, $Re = wd / \nu$; Pr – число Прандтля при средней температуре газов, $Pr = \nu / a$; d – внутренний диаметр трубы, м; h – высота рассматриваемой зоны, м; λ_r – теплопроводность дымовых газов, ккал/(м·ч·°C); w – средняя скорость газа, м/ч; ν – коэффициент кинематической вязкости газа, м²/ч; a – коэффициент теплопроводности дымовых газов, м²/ч; δ_1, δ_2 – толщина футеровки и железобетонного ствола соответственно, м; $\lambda(T, U)$ – коэффициент теплопроводности, вообще говоря, функция температуры T (°C) и влагосодержания U (кг/м³), ккал/(м·ч·°C); c – теплоемкость материала, ккал/(кг·°C); γ – объемная масса, кг/м³; α_1, α_2 – коэффициент теплоотдачи, соответственно, от газа к внутренней поверхности трубы и от наружной поверхности трубы к воздуху, ккал/(м²·ч·°C); r – теплота фазового

да, ккал/кг; $a_m(U)$ – коэффициент диффузии влаги, функция влагосодержания, м²/ч; T_z, T_g – температура, соответственно, дымовых газов в трубе и наружного воздуха, °С; $g_k(t)$ – массовая скорость конденсации, кг/(м² · ч); β – коэффициент чп, кг/(м² · ч · мм. рт. ст.); P_n – парциальное давление пара, мм. рт. ст.; $P_n[T(0, t)]$ – давление насыщения, известная функция температуры, мм. рт. ст.; k – скорость подъема температур дымовых газов, °С/ч; $U_p = U_0$ – равновесное значение, кг/м³.

Соотношения (1–12) определяют постановку задачи о совместном тепло- и массообмене в конструкции двухслойной трубы с учетом конденсации парогазовой смеси и процесса сушки увлажненной футеровки. При постановке задачи для многослойной конструкции необходимо учесть равенство потоков тепла и влаги на границе слоев.

Результаты численных расчетов. Численным методом конечных разностей с использованием консервативных схем проведен расчет полей температур, влагосодержания, тепловых и влажностных потоков через поверхность, а также интенсивности конденсации на внутренней поверхности дымовой трубы при нестационарном температурном режиме движения дымовых газов.

Нестационарный режим работы дымовой трубы при расчетах соответствовал одному из реальных условий их эксплуатации и задавался следующим образом: подъем температуры дымовых газов T_r от $T_B = -38$ °С до $T_M = 160$ °С по линейному закону со скоростью $k = 10$ °С/ч или 30 °С/ч, выдержка до стационарного режима при $T_z = T_M$, охлаждение от $T_z = T_M$ до $T_B = -38$ °С линейно со скоростью $V = 30$ °С/ч, дальнейшее охлаждение трубы при $T_z = T_g$.

Численные расчеты приведены при следующих исходных данных. Толщины стенок: $\delta_1 = 0,2$ м, $\delta_2 = 0,62$ м; теплоемкости материалов футеровки и железобетонного ствола: $c_1 = c_2 = 0,2$ ккал/(кг · °С); объемные массы: $\gamma_1 = 1700$ кг/м³, $\gamma_2 = 2200$ кг/м³; коэффициенты теплоотдачи, соответственно, от газа к внутренней поверхности трубы и от наружной поверхности трубы к воздуху: $\alpha_2 = 20$ ккал/(м² · ч · °С), $\alpha_1 = 17$ ккал/(м² · ч · °С); теплота фазового перехода: $r = 540$ ккал/кг; равновесное значение влагосодержания: $U_p = 25$ кг/м³, влагосодержание при полном намокании: $U_{п.н.} = 200$ кг/м³; максимальное давление водяных паров:

$P_n = 150$ мм. рт. ст.; коэффициент массообмена: $\beta = 0.71$ кг/(м² · ч · мм. рт. ст.); коэффициент теплопроводности футеровки из кирпича, как функция температуры: $\lambda_1(T) = 0.33 + 2.03 \times 10^{-3} \cdot T$ ккал/(м · ч · °С); коэффициент теплопроводности железобетонного ствола: $\lambda_2 = 1.33$ ккал/(м · ч · °С).

На рисунке 3 представлены поля температур при нестационарной работе дымовой трубы в различные моменты времени $t = 5$ ч, $t = 8$ ч, $t = 15$ ч, $t = 20$ ч, $t = 48$ ч с начала прогрева дымовой трубы со скоростью 30 °С/ч и выдержке до стационарного режима. Штриховой линией отражено влияние влажностного поля на температурное. При учете переноса влаги градиенты температур в слое значительно больше, что неблагоприятно сказывается на напряженном состоянии в конструкции.

Наибольший перепад в футеровке наблюдается при росте температуры дымовых газов и при указанных выше данных более 140 °С, что существенно превышает допустимое значение в 80 °С, что нарушает на некоторое время рекомендуемый режим эксплуатации.

Как показывают расчеты влажностных полей по предложенной модели влагосодержание приближается к равновесному равному $U_p = 25 \text{ кг/м}^3$ в течение 23 часов после начала эксплуатации трубы.

Для определения толщины пленки конденсата, стекающей по вертикальной пористой стенке дымовой трубы, приближенно принимается следующая модель. Схема течения изображена на рисунке 2. Считаем, что пленка образуется вследствие конденсации и что часть жидкости проникает в футеровочный слой толщиной δ_1 . Тогда уравнение, определяющее изменение толщины слоя конденсата плотности ρ_κ в данном сечении, запишется в виде

$$\frac{dh}{dt} = \frac{g_\kappa}{\rho_\kappa} - \frac{g_{nom}(t)}{\rho_\kappa}, \quad g_{nom}(t) = -a_m \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (12)$$

Учитывая соотношение (12), получим:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\beta\{P_n(t) - P_n[T(0,t)]\}}{\rho_\kappa} + \frac{1}{\rho_\kappa} \left(a_m \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) \right). \quad (13)$$

Расчеты интенсивности конденсации показывают, что $g_{nom} \ll g_\kappa$ практически во все время подъема температуры газов. Тогда максимальную толщину пленки конденсата на неподвижной поверхности можно оценить выражением

$$h_{max} = \int_0^{t_\kappa} \frac{g_\kappa}{\rho_\kappa}(t) dt, \quad (14)$$

где t_κ – время конденсации.

Вычисления показывают [7], что толщина пленки конденсата при скорости подъема температуры газов $k = 30 \text{ }^\circ\text{C/ч}$ не превышает $h_{max} = 2 \text{ мм}$, а при более длительной конденсации при $k = 10 \text{ }^\circ\text{C/ч}$ толщина $h_{max} = 4 \text{ мм}$, что согласуется с результатами в книге [2]. Зная величину интенсивности конденсации и площадь поверхности конденсации, т.е. площадь внутренней поверхности трубы, приближенно можно определить общее количество конденсата по формуле

$$M = 2\pi R_{cp} H g_{k_{cp}} t_k, \quad (15)$$

где R_{cp} – средний радиус трубы; H – высота трубы; $g_{k_{cp}}$ – средняя интенсивность конденсации.

Согласно результатам работы [7] средняя интенсивность конденсации при скорости подъема температуры дымовых газов $V_{II} = 10 \text{ }^\circ\text{C/ч}$ составляет $0,3 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{ч)}$ в течение 11 часов. Вычисления по формуле (15) показывают, что при нестационарной работе трубы при ее разогреве в процессе конденсации могут образовываться тонны воды, которую необходимо отводить.

После окончания процесса конденсации начинается сушка увлажненной футеровки толщиной δ_1 . Для оценки времени сушки используем решение задачи Стефана о фазовом переходе. Рассмотрим задачу о движении фронта превращения воды в пар в пористой футеровке дымовой трубы. Будем считать, что в начальный момент произошло

полное намокание поверхности, т. е. $u(x, 0) = const = U_0$. На границах стенки задаются граничные условия первого рода. Известно аналитическое решение задачи, когда $\delta_1 \rightarrow \infty$ [1]. Поэтому представленное ниже решение достаточно точно, если $\xi \ll \delta_1$. С течением времени процесс образования новой сухой фазы 1 захватывает все больший объем исходной фазы, количество новой фазы увеличивается, а граница раздела фаз ξ передвигается в объем исходной увлажненной фазы 2, как на рисунке 2. Если начальная температура T_e равна температуре фазового перехода T_n , то граница раздела фаз перемещается по закону

$$\xi = \beta\sqrt{t}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2\lambda_1(T_e - T_n)}{rU_0}}. \quad (16)$$

Область толщиной δ_0 будет полностью просушена, если граница $\xi = \delta_0$. Отсюда можно получить время сушки $t_{\text{суш}}$ стенки толщиной δ_0

$$t_{\text{суш}} = \frac{rU_0\delta_0^2}{2\lambda_1(T_e - T_n)}. \quad (17)$$

Формула (17) получена при значениях δ_0 значительно меньших значения всей области сушки δ_1 . Для всей области формула (17) является приближенной. Проведем расчеты по формуле (17) при следующих данных: $\delta_1 = 0,2$ м; $c_1 = 0,2$ ккал/(кг · °С); $\rho = 1000$ кг/м³; $T_r = 160$ °С, $T_n = 100$ °С, $r = 540 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$; $\lambda_1 = 0,53$ ккал/м · ч°С, $U_0 = 100$ кг/м³. Расчеты позволяют получить оценку времени сушки в 40 часов, что согласуется с рекомендуемыми в инструкциях значениями [9, 11].

Заключение. Построена модель совместного тепло- и массопереноса с переменными теплофизическими характеристиками с учетом конденсации на внутренней поверхности трубы, определения пленки конденсата, диффузного проникновения влаги вглубь футеровочного слоя и сушки увлажненного пористого скелета трубы.

Численным методом конечных разностей с использованием консервативных разностных схем исследована задача определения нестационарных температурных и влажностных полей в двухслойной трубе конструкции в период пуска и устойчивой работы. Определены наиболее опасные зоны с большими градиентами температур и время возвращения дымовых газов на установившийся режим работы. Разработана приближенная модель определения толщины пленки при нестационарном тепло- и массообмене. Оценено значение максимальной толщины пленки конденсата и общего количества выпавшего конденсата во время запуска холодной дымовой трубы. Получена инженерная формула определения времени сушки увлажненного скелета трубы.

Результаты работы по нестационарному расчету тепло- и массообмена могут быть использованы проектными организациями при совершенствовании конструкций и выборе режимов эксплуатации высотных дымовых труб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 740 с.
2. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – Москва: Атомиздат, 1979. – 659 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
4. Шишков И. А., Лебедев В. Г., Беляев Д. С. Дымовые трубы энергетических установок. – М.: Энергия, 1976.
5. Дужих Ф. П. Осмоловский В. П., Лагидычев М. Г. Промышленные дымовые и вентилиционные трубы. – Теплотехник, М.: 2004.
6. Петров-Денисов В. Г., Конон П. Н. Процессы тепло- и массообмена в стволах дымовых труб в нестационарном режиме. Всесоюзная конф. «Современные проблемы разработки, проектирования, возведения и эксплуатации монолитных железобетонных труб». – М.:1983, с. 66–68.
7. Конон, П. Н. Моделирование нестационарных процессов тепло- и массообмена в многослойных дымовых трубах в условиях фазовых переходов / П. Н. Конон, М. А. Поддубная // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2014. – Вып. 29. – С. 244–250.
8. Конон, П. Н. Исследования нестационарных процессов тепло- и массопереноса в двухслойных дымовых трубах / П. Н. Конон, Н. А. Докукова // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – 2013. – Вып. 28. – С. 188–194.
9. Петров-Денисов, В. Г. К теории углубления фронта фазового перехода свободной влаги и образования избыточного давления при нагреве влажностных тел / В. Г. Петров-Денисов // Химическая промышленность. – 1979. – № 6.
10. Конон, П. Н. Исследования нестационарных процессов тепло- и массообмена в многослойных дымовых трубах / П. Н. Конон, Н. А. Докукова, М. А. Поддубная // Международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция». – 2012. – Ч. 3 – С. 70.
11. Заседателев, И. Б. Инструкция по теплоаэродинамическому расчету дымовых железобетонных труб с противодавлением в зазоре между стволом и футеровкой / И. Б. Заседателев, Ф. П. Дужих, Л. А. Славгородская. – Москва: Центральное бюро научно-технической информации, 1979. – 66 с.

Поступила: 21.03.2022

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Степаненко Д. А.

Белорусский национальный технический университет

Традиционным способом усиления колебаний по амплитуде, используемым в ультразвуковой технике и технологии, является применение стержневых концентраторов, представляющих собой металлические стержни с изменяющейся по длине продольной жесткостью ES , где E – модуль продольной упругости материала стержня, S – площадь поперечного сечения [1]. Изменение жесткости обычно достигается за счет уменьшения площади S в направлении от входного к выходному сечению концентратора. Недостатками стержневых концентраторов являются значительные габаритные размеры и масса, возрастающие с уменьшением рабочей частоты концентратора. В качестве альтернативы стержневых концентраторов могут применяться кольцевые концентраторы, представляющие собой упругие элементы кольцевой формы с изменяющейся по длине окружности изгибной жесткостью EI , где I – осевой момент инерции поперечного сечения [2, 3]. Осевой момент инерции может изменяться за счет эксцентрического взаимного расположения наружной и внутренней цилиндрических поверхностей концентратора, либо за счет придания концентратору клиновидной формы с непараллельным взаимным расположением плоских торцовых поверхностей. Принцип действия кольцевого концентратора основан на преобразовании продольных колебаний связанного с его входным сечением возбудителя в изгибные колебания, происходящие в плоскости кольца, усилении изгибных колебаний по амплитуде и их трансформации обратно в продольные колебания связанного с выходным сечением концентратора рабочего инструмента. Аналогичная схема усиления продольных колебаний по амплитуде была ранее описана в работе [4], однако она является более сложной в реализации с конструктивной и технологической точек зрения. Кольцевые концентраторы имеют более низкие габаритные размеры и массу по сравнению со стержневыми и просты в изготовлении. Недостатком является то, что коэффициент усиления колебаний по амплитуде кольцевыми концентраторами имеет сравнительно низкие значения. Например, для концентратора с радиусом внутренней цилиндрической поверхности 20 мм, радиусом наружной поверхности 22,75 мм и эксцентриситетом 0,75 мм коэффициент усиления изменяется в диапазоне 1,48–1,69 [5]. Повышение коэффициента усиления может быть достигнуто путем увеличения отношения толщин входного и выходного сечений концентратора, однако это приводит к снижению его статической жесткости, что в свою очередь усложняет механическую обработку концентратора. Альтернативным вариантом, рассматриваемым в данной статье, является использование многоступенчатых концентраторов.

В случае стержневых концентраторов для получения больших по величине коэффициентов усиления колебаний по амплитуде обычно используют последовательное соединение нескольких концентраторов [6], однако такое решение не является оптимальным с точки зрения габаритных размеров колебательной системы. В случае кольцевых концентраторов построение многоступенчатой колебательной системы может быть реализовано по принципу «матрешки», то есть путем вложения $(n + 1)$ -й ступени в

n -ю ступень, что позволяет сократить габаритные размеры, но это представляется нерациональным по нескольким причинам:

1. Необходимость согласования собственных частот колебаний ступеней, имеющих неодинаковые геометрические размеры.

2. Сложность отвода усиленных по амплитуде колебаний от внутренней ступени при введении колебаний в наружную ступень концентратора.

3. Необходимость механического соединения ступеней между собой, приводящая к потерям энергии в местах соединения.

Анализ указанных недостатков позволяет сформулировать следующие требования к «идеальному» многоступенчатому кольцевому концентратору:

1. Концентратор должен иметь малые габаритные размеры.

2. Концентратор должен состоять из одинаковых по размерам ступеней.

3. Конструкция концентратора должна обеспечивать возможность всестороннего доступа к любой из его ступеней.

4. Концентратор должен иметь монолитную конструкцию без механических соединений между ступенями.

Примером технического объекта, состоящего из кольцевых сегментов и отвечающего перечисленным выше требованиям, является цилиндрическая прорезная пружина, которая была принята в качестве прототипа для разработки конструкции многоступенчатого кольцевого концентратора, представленной на рисунке 1.

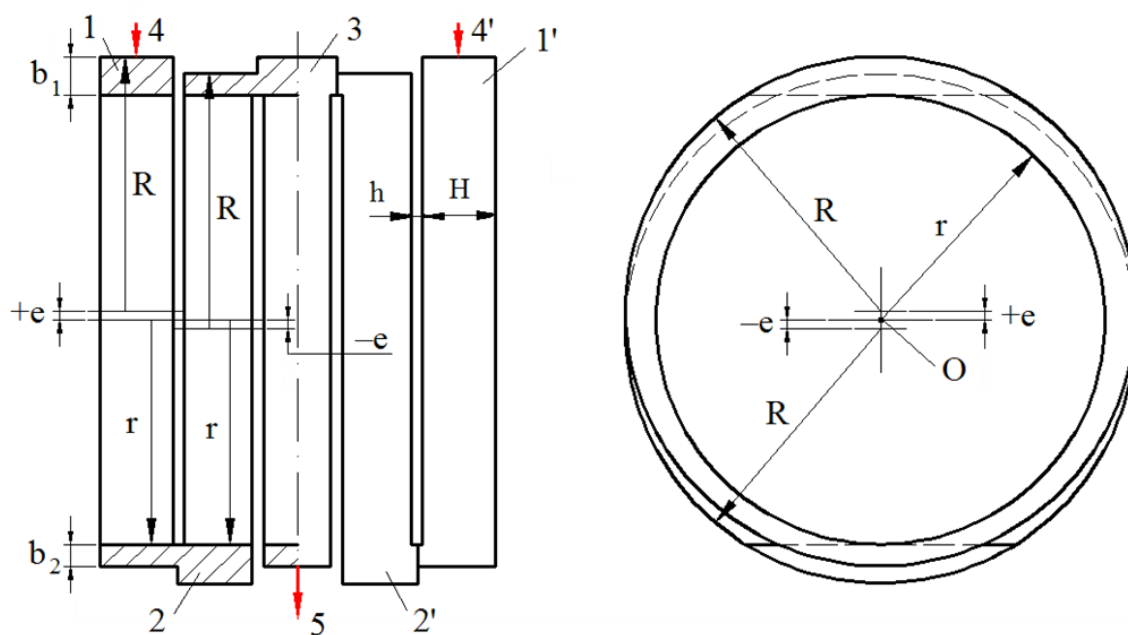


Рис. 1. Конструкция многоступенчатого кольцевого концентратора

В отличие от цилиндрической прорезной пружины, имеющей равнотолщинную стенку, многоступенчатый кольцевой концентратор имеет неравнотолщинную стенку, благодаря чему обеспечивается усиление колебаний по амплитуде. Неравнотолщинность реализуется за счет расположения наружных цилиндрических поверхностей ступеней концентратора, имеющих радиус R , с эксцентриситетом по отношению к внутренней цилиндрической поверхности радиусом r : нечетные ступени 1, 1' и 3 выполняются с положительным эксцентриситетом $+e$, а четные 2 и 2' – с отрицательным эксцентриситетом $-e$. Продольные колебания 4 и 4' вводятся в крайние ступени 1 и 1' концентратора, а усиленные по амплитуде колебания 5 отводятся от центральной ступени 2.

пени 3. Ступени разделяются между собой пазами, прорезанными таким образом, что участок n -й ступени с наименьшей изгибной жесткостью оказывается связанным с участком $(n + 1)$ -й ступени, имеющим наибольшую изгибную жесткость.

Для компьютерного моделирования многоступенчатых кольцевых концентраторов использовался метод конечных элементов (МКЭ), реализованный с помощью программы Comsol Multiphysics. Рассматривалась геометрическая модель в виде четверти концентратора с наложением симметричных граничных условий на плоскости разреза, выделенные на рисунке 2 заливкой.

Колебательное смещение линии $L1$, принадлежащей входному сечению концентратора, в направлении оси z было задано равным нулю, что имитирует соединение концентратора с источником продольных (по отношению к оси x) колебаний. При моделировании были использованы те же значения геометрических параметров, для которых ранее производился расчет единичной ступени [5]: радиус внутренней поверхности $r = 20$ мм; максимальное и минимальное значения толщины в радиальном направлении $b_1 = 3,5$ мм и $b_2 = 2$ мм; радиус наружной поверхности $R = 22,75$ мм; эксцентриситет $e = 0,75$ мм. Ширина пазов была принята равной $h = 1$ мм, а толщина ступеней в осевом направлении варьировалась в диапазоне $H = 3,5$ – 7 мм.

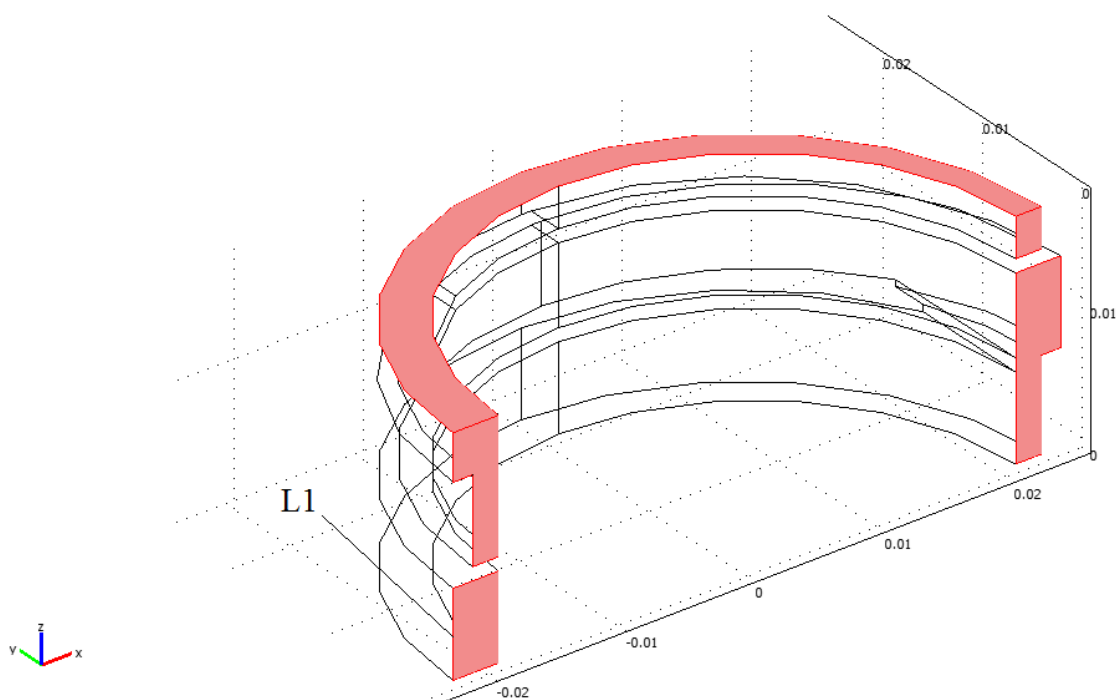


Рис. 2. Геометрическая модель концентратора

На рисунке 3 представлена одна из расчетных собственных форм колебаний многоступенчатого концентратора с толщиной ступени $H = 3,5$ мм, соответствующая частоте 19,9 кГц.

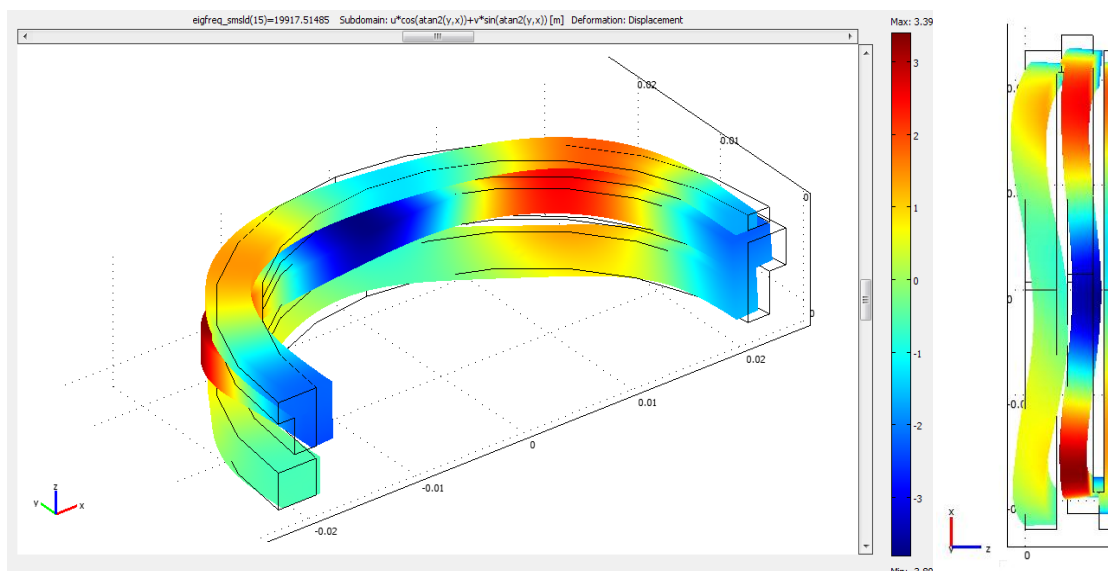


Рис. 3. Расчетная собственная форма колебаний многоступенчатого концентратора с толщиной ступеней 3,5 мм

Расчетная собственная частота 19,92 кГц совпадает с расчетной собственной частотой колебаний единичной ступени. Как видно из проекции на плоскость $x-z$, в ступенях концентратора возникают паразитные внеплоскостные изгибные колебания, ограничивающие амплитуду полезной радиальной составляющей колебательного смещения. Коэффициент усиления составляет $K = 3,17$. Очевидным способом снижения амплитуды паразитных внеплоскостных колебаний является увеличение толщины H ступеней концентратора. В качестве примера на рисунке 4 представлена та же собственная форма колебаний для концентратора с толщиной ступеней $H = 7$ мм.

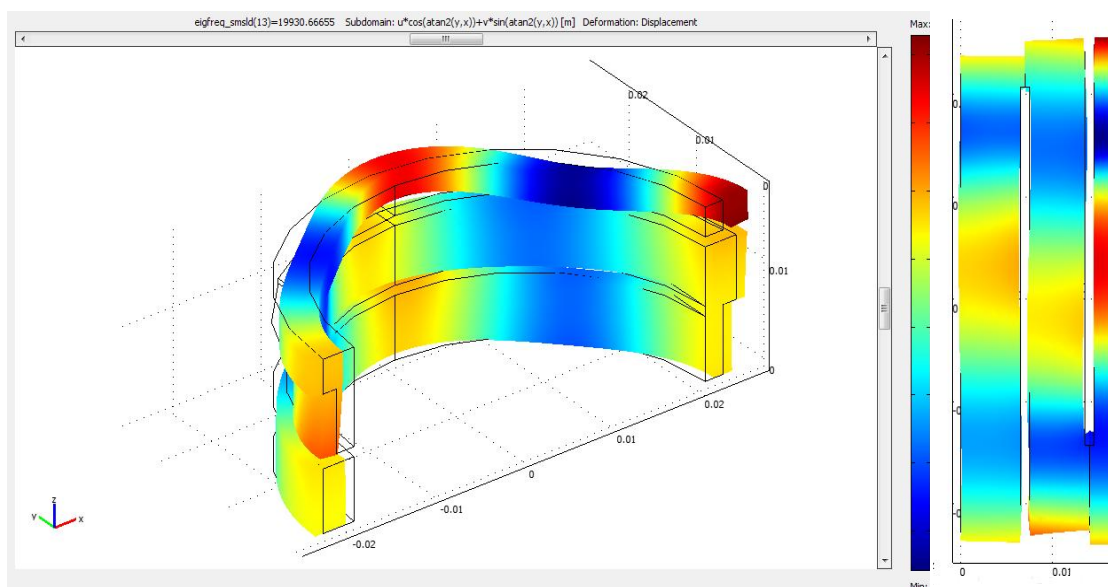


Рис. 4. Расчетная собственная форма колебаний многоступенчатого концентратора с толщиной ступеней 7 мм

Как видно из проекции на плоскость $x-z$, амплитуда паразитных внеплоскостных колебаний значительно снижается. Коэффициент усиления возрастает при этом до величины $K = 3,22$ при максимальном теоретически возможном значении $K_{\max} = K_1^3 = 3,76$, где $K_1 = 1,56$ – расчетный коэффициент усиления для единичной ступени. Собственная частота колебаний 19,93 кГц практически не изменяется по сравнению с собственной частотой колебаний концентратора с толщиной ступеней 3,5 мм, составляющей 19,92 кГц.

На основе вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Моделирование с помощью МКЭ показывает, что применение многоступенчатых кольцевых концентраторов позволяет повысить коэффициент усиления колебаний по амплитуде по сравнению с коэффициентом усиления для единичной ступени при сохранении малых габаритных размеров колебательной системы.

2. Наиболее рациональным является конструктивное исполнение многоступенчатых кольцевых концентраторов, основанное на использовании в качестве прототипа цилиндрической прорезной пружины. Такой концентратор имеет монолитную конструкцию, состоящую из ступеней с одинаковыми геометрическими параметрами и обеспечивающую возможность всестороннего доступа к каждой из ступеней.

3. Изменение толщины ступеней концентратора практически не влияет на собственную частоту его изгибных колебаний, однако при увеличении толщины снижается амплитуда паразитных внеплоскостных колебаний, что позволяет повысить коэффициент усиления колебаний по амплитуде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ultrasonics: Data, Equations and their Practical Uses / Ed. by D. Ensminger and F. V. Stulen. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. – 496 p.

2. Луговой, И. В. Разработка кольцевых концентраторов с переменной жесткостью для ультразвукового прошивания отверстий в хрупких материалах: автореф. дисс. канд. техн. наук / И. В. Луговой. – Мн., 2017. – 27 с.

3. Степаненко, Д. А. Расчет и проектирование ультразвуковых акустических систем для использования в медицине и технике: дисс. д-ра техн. наук / Д. А. Степаненко. – Мн., 2020. – 323 с.

4. Iula, A. A high displacement ultrasonic actuator based on a flexural mechanical amplifier / A. Iula [et al.] // Sensors and Actuators A. – 2006. – Vol. 125. – P. 118–123.

5. Степаненко, Д. А. Применение метода гармонического баланса для расчета и проектирования кольцевых усилителей упругих колебаний / Д. А. Степаненко, К. А. Бунчук, В. И. Жуков, А. С. Роговцова // Приборостроение – 2021: материалы Четырнадцатой междунар. науч.-техн. конф., Минск, 17–19 ноября 2021 г. / Редкол.: О. К. Гусев [и др.]. – Мн., 2021. – С. 343–344.

6. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Глав. ред. И. П. Голямина. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.

Поступила: 30.01.2022

МКЭ-АНАЛИЗ БЕТОННО-БИОНИЧЕСКОГО БАНДАЖА ПОДВИЖНОЙ КОЛОННЫ СТАНКА

Довнар С. С., Якимович А. М., Лапука А. Д.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Поле исследования. Станки с подвижной колонной ("Travelling column") являются эффективным видом тяжелых многоцелевых СФР-станков (сверлильно-фрезерно-расточных). Их используют в судостроении, энергетике и т. д. Деталь неподвижна. Обработку резанием осуществляют инструменты в шпинделе Sp (рисунок 1), установленном в ползуне R , подвижном по Z . Ползун перемещается вертикально по Y суппортом Su по стандартной колонне SC . Колонна может двигаться по X на салазках Sl .

Перечисленные структурные детали (СД) отливают из чугуна. Их связывают обычно гидростатическими направляющими. Возникает несущая система (НС) станка. С точки зрения производительности и точности, главной проблемой НС является упругая податливость колонны, особенно в верхних положениях суппорта. Это касается как статических отклонений от силы резания, так и динамических раскачек (на резонансах НС). Требование современной металлообработки «*производительность и точность на одном станке*» не выполняется.

Настоящая работа связана с серией проектов по реновации тяжелых СФР-станков. Черта реновации – сохранение большинства старых (*legacy*) структурных деталей. Эти дорогие отливки за годы службы путем естественного старения освободились от остаточных напряжений. В результате, например, колонна SC приобретает размерную стабильность и может обеспечить долговременную точность после реновации. Накопление усталостных повреждений в SC не является проблемой ввиду исходного запаса прочности.

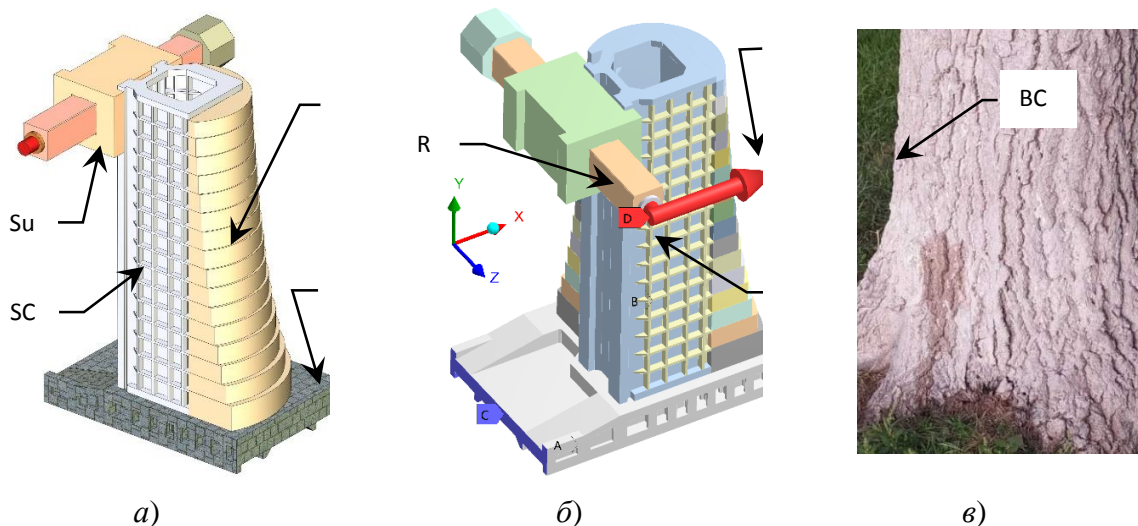


Рис. 1. Геометрическая модель колонны SC в сборе с бандажом BB , салазками Sl и суппортом Su (а); сила резания F_x , действующая на шпиндель Sp в ползуне R (б); ствол дерева (в) с бионической кривой BC , использованной для профилирования бандажа BB

Требуется усилить колонну *SC*. В данной работе это предлагается сделать с помощью бетонного бандажа. Его предлагается создать в бионической форме, напоминающий ствол долговечного дерева. Возникает бетонно-бионический (*BB*) бандаж (рисунок 1, *a*). Он монолитно сцеплен с колонной с двух ее тыловых сторон.

В станкостроении распространено усиление станков полимербетоном. Осваивается высокопрочный бетон УНРС. Обычно бетон заливают в полости чугунной СД или делают структурную деталь из бетона целиком. В данной работе предлагается формировать бетон снаружи, например, слоями (рисунок 1, *б*). Свободной стороне возникающего бандажа *BB* разумно придать форму прикорневой части дерева (рисунок 1, *в*) и скопировать бионическую кривую *BC*.

Ствол дерева является вертикальной консолью переменного сечения. Такая консоль эффективна в смысле соотношения жесткости, прочности и массы. Бионическая консоль, в сущности, является воплощением идеи *равнопрочной балки (балки равно сопротивления)*. Форму ствола дерева неоднократно переносили на технические сооружения башенного типа.

Цель работы. Целью работы является проведение МКЭ-анализа для конструктивного решения: усилить типовую колонну (*SC*) станка с помощью *BB*-бандажа. Представляет интерес статическая и динамическая жесткость на шпинделе. Виртуальные испытания были проведены как статический, модальный и гармонический анализ.

Геометрическая и конечно-элементная модели. Колонна *SC*, бандаж *BB* и салазки *SI* весят соответственно 9,21, 10,48 и 10,94 тонны. Высота колонны равна 4,5 м при постоянном сечении $1,225 \times 1,118$ м. Масса суппорта *Su* составляет 4,93 т. Ползун *R* сечением $0,45 \times 0,45$ м весит 1,38 т и выдвинут на 1,25 м. Ползун с суппортом поднят в верхнее положение на высоту 4,4 м над предполагаемой станиной.

Бандаж *BB* сделан ступенчатым (рисунок 3, *б*) и насчитывает 16 слоев (солидов). Каждый слой очерчен радиусом от 840 до 1350 мм. *BB* не мешает движению суппорта в сборе. В части решений смоделировано внутреннее усиление колонны бетонной облицовкой *L (lining)*. Это бетон, покрывающий внутреннее оребрение колонны (на рисунке 3 маркеры “*No L*” и “*L*” указывают на отсутствие и присутствие облицовки). Толщина бетонной облицовки равна 90 мм. Внутреннее усиление сложно создать. Оно сейчас рассматривается для сравнения.

Конечноэлементная модель станка включает 88847 конечных элементов и 188941 узел. Каждому солиду (80 шт.) соответствует своя сетка конечных элементов из тетраэдрических и гексаэдрических элементов. Бетонные слои соединены в монолитный *BB* с помощью контактных пар со статусом *bonded*. Гидростатические направляющие могут находиться как в режиме скольжения (*no separation* – трение не учитывается, разъединение не происходит), или в состоянии гидрозажима (схватывание направляющих – *bonded*).

Механические свойства применяемых материалов даны в табл. 1.

Таблица 1 – Механические свойства материалов

№пп	Моделируемый материал	Модуль упругости E , ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Удельная плотность ρ , кг/м ³	Коэффициент демпфирования ζ , %
1	Чугун	130	0,28	7200	2,5
2	Сталь	200	0,3	7850	1
3	Варианты бетона (полимербетон, УНРС)	25–35	0,18	2200	4

В данной работе станок нагружен только силой резания, точнее, ее компонентой по оси X. Сила F_x приложена к инструменту (рисунок 1, б). Имеющийся расчетный опыт указывает, что самыми опасными для точности резания являются крутильные колебания колонны.

Смещения по X рабочего торца ползуна (фактически – шпиндельного узла) $u_x^{r,s}$ прямо влияют на точность диаметральных размеров изделия. Для статического анализа сила F_x является константой $F_x^s = 1 \text{ kN}$. Статическая жесткость станка $j_x^{r,s}$ оценивалась по общеизвестной формуле жесткости $j_x^{r,s} = F_x^s / u_x^{r,s}$.

В гармоническом анализе сила осциллирует с испытующей частотой f в ходе времени t по уравнению $F_x^h = A_{F_x} \sin(2\pi f / t)$. Здесь константой является амплитуда силы $A_{F_x} = 1 \text{ kN}$. Виртуальные испытания производятся многократно с разными частотами f от 1 до 100 Гц с шагом 0,5 Гц. Динамическая жесткость $j_x^{r,h}$ всегда относится к определенной частоте. Она вычислялась по X для рабочего торца ползуна по амплитуде перемещения $a_{u_x}^{r,h}$. Использована стандартная формула $j_x^{r,h} = A_{F_x} / a_{u_x}^{r,h}$.

Статический анализ. Статический МКЭ-анализ показал, что бионический бандаж препятствует изгибу и кручению колонны силой резания F_x (рисунок 2). Стандартная колонна (рисунок 2, а) одновременно изгибается и закручивается, допуская отклонение ползуна $u_x^{r,s} = 21,33 \text{ мкм}$. Это соответствует приемлемой, но невысокой жесткости $j_x^{r,s} = 1000 / 21,33 = 46,8 \text{ Н/мкм}$.

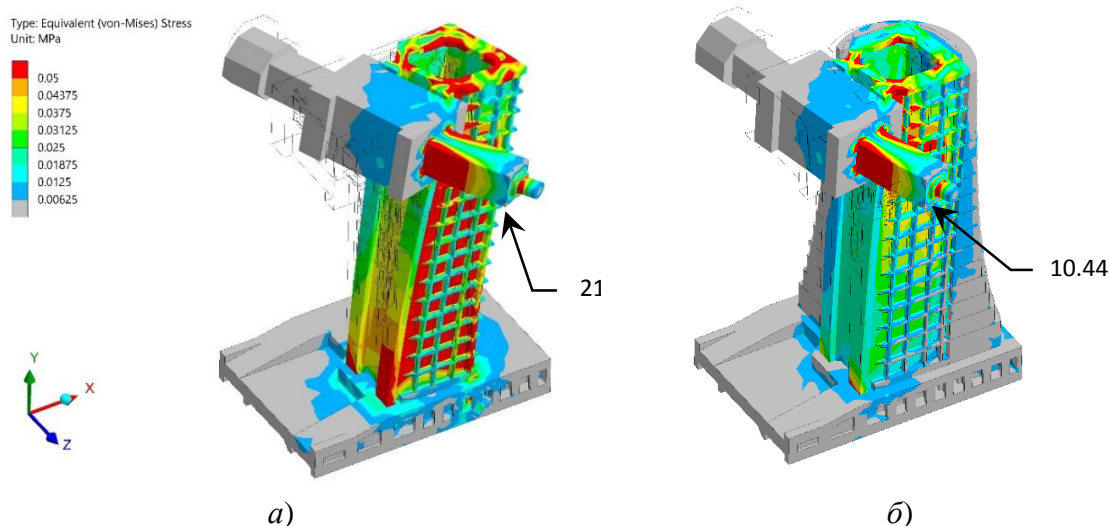


Рис. 2. Картины эквивалентных напряжений (МПа) под действием силы $F_x = 1 \text{ kN}$ для колонны SC (а) и колонны с бандажом ВВ (б): $\times 60000$. Маркеры – перемещения по X (мкм)

ВВ ограничивает как крутильные, так и изгибные деформации. Отклонение ползуна (рисунок 2, б) составляет только 10,44 мкм. Жесткость в направлении X увеличивается в 2,04 раза и достигает 95,7 Н/мкм. Этого вполне достаточно для точной обработки.

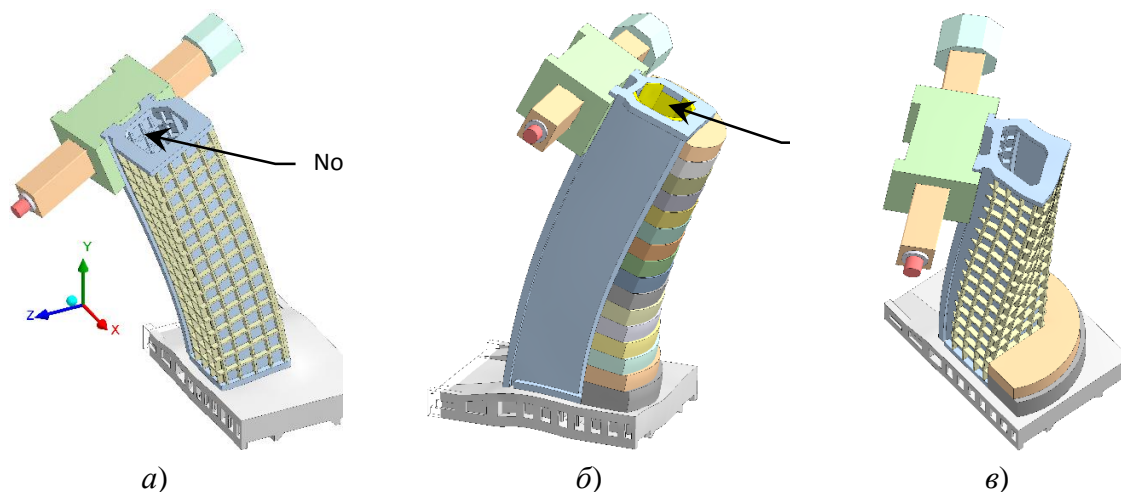


Рис. 3. Три нижние моды резонансных колебаний станка: *a* – изгиб в поперечном направлении $Z - M1b$ (14,77–26,38 Гц); *б* – изгиб в продольном направлении $X - M2b$ (17,87–30,29 Гц); *в* – кручение колонны $M2t$ (35,25–52,91 Гц)

Эквивалентные напряжения σ_e в НС станка невелики и не превышают 0,4 МПа. Прочность всегда обеспечена. Однако, сравнение стандартной и бандажированной колонн показательно (рисунок 2) при общей цветовой шкале (выше 0,05 МПа – красный цвет). Видно, что *SC* (рисунок 3, *a*) относительно напряжена (красный цвет по всей передней стенке). Колонна с бионическим бандажом *BB* (рисунок 3, *б*) почти свободна от красного цвета. Следовательно, *BB* выполняет функцию усиления, повышая жесткость и запас прочности одновременно.

Модальный анализ. Модальным анализом выявлено три главные моды (самые низкие по частоте – рисунок 3). Система из них оказалась принципиально одинаковой для стандартной колонны и для колонны с бионическим бандажом. Поэтому на рисунке 3 резонансные частоты указаны парами. Меньшая частота соответствует *SC*, а большая – добавлению *BB*.

На (рисунок 3, *a*) показана мода изгиба (bending) колонны в поперечном направлении (приблизительно в плоскости YZ). Эта мода обозначена как *M1b*. Она заключается в клевковых движениях ползуна в сторону обрабатываемой детали (в основном, по Z).

Мода изгиба *M2b* (рисунок 3, *б*) возбуждается в продольном направлении приблизительно в плоскости XY . Здесь суппорт раскачивается вдоль направляющих станины, по X .

Изгибные моды *M1b* и *M2b* подобны друг другу и образуют пару. Колебания при их возбуждении происходят в перпендикулярных друг другу плоскостях на близких частотах.

Выше по частоте, чем изгибные моды, лежит крутильная (torsional) мода *M2t* (рисунок 3, *в*). Колонна закручивается вокруг вертикальной оси. Опасность крутильной моды заключается в эффекте рычага. Даже небольшой угол закручивания колонны поворачивает концы ползуна (как рычаг) на существенные линейные расстояния.

Гармонический анализ. В рамках гармонического анализа получены две АЧХ, сопоставленные на рисунке 4. Кривая “*SC*” относится к стандартной колонне, а кривая “*SC + BB*” – к колонне, усиленной бионическим бандажом. Линия “*SC + L*” относится к колонне без бандажа, но с внутренней бетонной облицовкой *L*. Линия “*SC + BB + L*” соответствует виртуальному варианту, когда сделаны и внутренняя облицовка, и наружный бандаж.

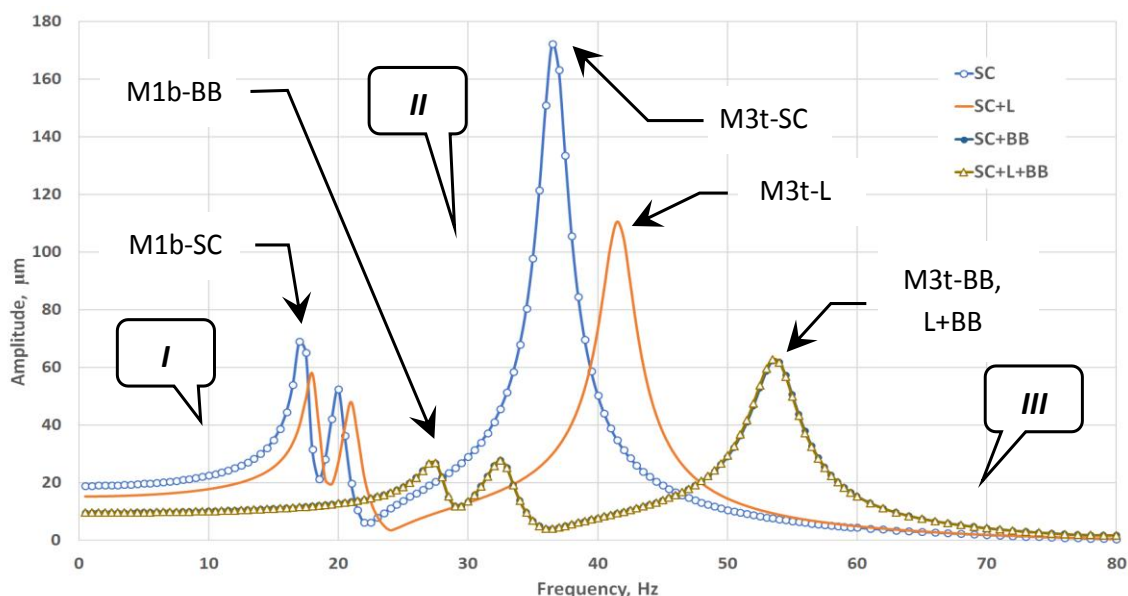


Рис. 4. АЧХ для торца ползуна в направлении X (сила F_x – перемещение U_x) для стандартной колонны (UX SC) и для колонны с бионическим бандажом (UX SC+BB); I, II, III – дорезонансный, межрезонансный и зарезонансный диапазоны

Для всех АЧХ входом является сила F_x^h на инструменте (фактически – шпиндель), а выходом – амплитуда колебательного перемещения $u_x^{r,h}$ рабочего торца ползуна (примыкает к шпинделю). Сила и перемещение направлены по оси X.

На рисунке 4 видно, что АЧХ для вариантов “SC + BB” и “SC + L + BB” практически совпадают. Следовательно, влияние облицовки L мало в случае присутствия бандажа BB. Поэтому тонкая облицовка изнутри неэффективна при бионическом усилении снаружи.

Принципиально, все АЧХ одинаковы. Они выявляют три резонансных возбуждения. Изгибные моды M1b и M2b проявляют себя двойным пиком, отмеченным маркерами “M1”, а крутильная мода M3t – маркером “M3”. Индексы “SC” соответствуют стандартной колонне, “L” – внутренней облицовке, а “BB” – бионическому усилению.

Видно, что, как облицовка L, так и бандаж BB влияют на динамику станка одинаково. Однако, бандаж делает это гораздо сильнее. BB смещает все резонансные пики вправо, в сторону высоких частот. Это положительно с точки зрения сдерживания резонансных раскачек. Еще более важно, что введение BB уменьшает высоту пиков (таблица 2).

В результате динамическая жесткость шпинделя $j_x^{r,h}$ в направлении X после бионического усиления возрастает на трех пиках M1b, M2b, M3t до уровней 37,4; 35,9 и 16,1 Н/мкм соответственно. Этого достаточно, чтобы уклониться от грубых автоколебаний.

Таблица 2 – Высоты резонансных пиков

Расчетный вариант	Высота резонансного пика, мкм		
	M1b	M2b	M3
SC	68,92	52,45	172,13
SC+BB	26,76	27,85	62,25
Степень снижения пика	257 %	188 %	276 %

Нормативная жесткость $[j_{norm}^{s,h}] = 20$ Н/мкм обеспечивает на всех резонансных пиках (немного не дотягивая – 16,1 Н/мкм – на крутильном резонансе. Однако, в целом, станок, усиленный бетонно–бионическим бандажом, способен обрабатывать деталь, например, фрезой, на всех частотах, включая резонансные.

Рассмотренные АЧХ (рисунок 9–11) позволяют выделить три частотных диапазона. Ниже изгибных пиков $M1b$, $M2b$ лежит дорезонансный диапазон I. Между пиками $M1b$, $M2b$ и $M3t$ находится межрезонансный диапазон II. Правее крутильного пика $M3t$ начинается зарезонансный диапазон III.

Выводы:

1. Введение бионического бандажа (BB) не требует существенного утяжеления подвижной колонны. Бандаж отвечает только за 28 % (10,48 т) веса колонны в сборе (37,38 т).

2. BB увеличивает статическую жесткость колонны (на торце ползуна) в 2,03 раза (с 47,0 Н/мкм до 95,7 Н/мкм). Жесткость становится достаточной для силовой обработки

3. Формирование бандажа на колонне не изменяет резонансную картину. Проявляются два изгибных резонанса $M1b$, $M2b$ и опасный крутильный резонанс $M3t$.

4. После бионического усиления три нижних резонанса поднимаются вверх по частоте. Динамическая жесткость повышается для резонансов $M1b$, $M2b$, $M3t$ соответственно в 2,57, 1,88 и 2,76 раза (до ~37, 36 и 16 Н/мкм).

5. Динамическая жесткость на резонансных пиках оказывается достаточной для ведения обработки (на крутильном резонансе $M3t$ – с осторожностью).

6. Редизайн колонны путем присоединения к ней BB является перспективным и довольно экономичным проектным решением.

Поступила: 06.02.2022

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЕГО ПЕРЕРАБОТКЕ МЕТОДОМ РАССОГЛАСОВАННОЙ ПРОКАТКИ

Акимов В. А., Гончарова С. В., Беляцкая Л. Н.

Белорусский национальный технический университет

Введение. Актуальность данной работы тесным образом связана с экологической безопасностью Беларуси, что, в первую очередь, и побудило творческий коллектив к ее написанию. Опишем проблему вкратце.

Переработка изношенных автомобильных шин становится насущной проблемой во всем мире. С ежегодным увеличением производства колесных транспортных средств растут и объемы отслужившей резины. В развитых странах мира этой проблеме уделяется больше внимания, так как широкое распространение автомобильного транспорта у них наступило раньше, и они поняли какую экологическую угрозу несут залежи складированных и медленно разлагающихся покрышек.

Переработка шин в отдельных государствах заключается в их вывозе в более бедные страны, также их используют в качестве топлива, измельчают в резиновую крошку, которую используют в качестве строительного материала для стадионов, дорожных покрытий и детских площадок. Однако значительная часть бывших в употреблении шин в мире продолжает складываться в захоронения и отравлять окружающую среду. Хотя автомобильная резина разлагается в природе за длительный период.

В нашей республике пока основная часть изношенной резины используется в качестве топлива. Крупнейшие потребители – это «Красносельскстройматериалы» и Белорусский цементный завод. Небольшие предприятия, утилизирующие резину, используют механическое оборудование для измельчения покрышек в резиновую крошку.

Экологическая переработка шин требует значительных капиталовложений. Современное оборудование требует значительных капиталовложений, и, хотя оно окупается быстро и способно приносить большую прибыль, не все страны в состоянии найти средства до нескольких миллионов евро на перерабатывающий завод, чтобы очистить свою территорию от использованных автомобильных покрышек. Таким образом, переработка шин продолжает оставаться нерешенной проблемой для Беларуси.

На первом этапе научных исследований, с целью оценки возможностей разрушение материала, предлагается получить формулы для вычисления усилий, создаваемых устройствами типа прокатного станка и наметить пути дальнейшего решения этой задачи. Ее успешное решение позволит конструктору осуществить выбор той или иной конкретной схемы разрушающего устройства в зависимости от силовых и энергетических характеристик [1, 2].

Для определенности рассмотрим двухслойный композиционный материал подверженный продольным сдвиговым деформациям и нормальному обжатию. Пусть радиусы валков равны между собой $R_1 = R_2 = R$ и имеется рассогласования скоростей $\omega_1 > \omega_2$, $h = h_1 + h_2$ – толщина элемента покрышки, φ_0 – угол захвата (рисунок 1).

Тогда нормальные и сдвиговые усилия в сечении будут рассчитываться по формулам:

$$\sigma = \frac{2ER}{h} (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad (1)$$

$$\tau = \frac{G(1 - \omega_2 / \omega_1)R\varphi_0}{h - 2R(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (2)$$

Среднее значение величин σ и τ можно охарактеризовать при помощи соотношений $\sigma_{cp}^{(1)} = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \sigma d\varphi$, $\tau_{cp}^{(1)} = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \tau d\varphi$ или $\sigma_{cp}^{(2)} = \sigma(\varphi = \frac{\varphi_0}{2})$, $\tau_{cp}^{(2)} = \tau(\varphi = \frac{\varphi_0}{2})$. Для второго случая воспользовавшись геометрией задачи на (рисунок 1), получим:

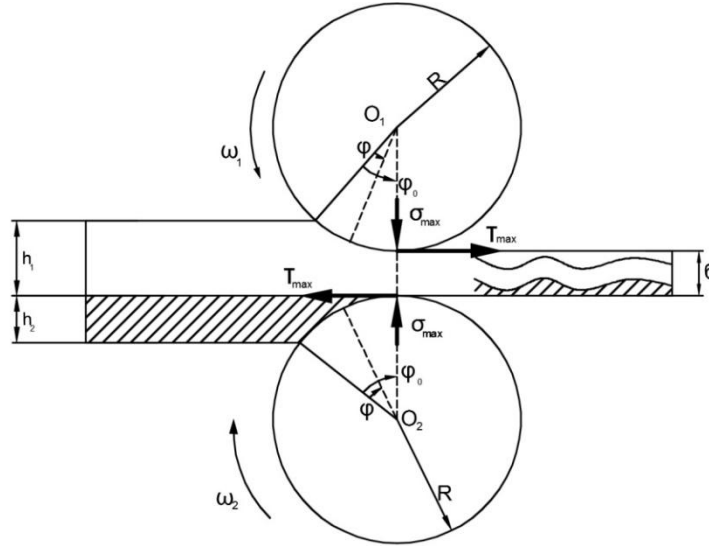


Рис.1. Схема разрушающего устройства

$$\sigma_{cp}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) E, \quad (3)$$

$$\tau_{cp}^{(2)} = \frac{2G(1 - \omega_2 / \omega_1)R\varphi_0}{h + \delta}. \quad (4)$$

Максимальные сжимающие и сдвиговые усилия, расположенные в сечении O_1O_2 будет рассчитываться по формулам:

$$\sigma_{max} = \left(1 - \frac{\delta}{R}\right) E, \quad (5)$$

$$\tau_{max} = \frac{G(1 - \omega_2 / \omega_1)R\varphi_0}{\delta}. \quad (6)$$

Зафиксировав для простоты вычислений в (2) среднюю базу для сдвиговых деформаций, т. е. полагая что в знаменателе стоит выражение $\frac{h + \delta}{2}$, получим следующие интегральные оценки для малых значений угла $\varphi_0 \ll 1$:

$$\sigma_{cp}^{(1)} = \frac{2ER}{h\varphi_0} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{ER\varphi_0^2}{h}, \quad (7)$$

$$\tau_{cp}^{(1)} = \tau_{cp}^{(2)} = \frac{2G(1 - \omega_2 / \omega_1)R\varphi_0}{h + \delta}. \quad (8)$$

Величина силы трения сцепления рассчитывается по формуле:

$$F_{cy} = \frac{2}{3} \mu ER l \varphi_0^2, \quad (9)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, l – ширина заготовки.

В случае $F_{cy} \leq \tau_{cp} l R \varphi_0$, т. е.

$$\mu \leq \frac{3G(1 - \omega_2 / \omega_1)R}{E(h + \delta)}, \quad (10)$$

может происходить проскальзывания валков по заготовке. Максимальная потребляемая мощность установки в ватах:

$$N = F_{cy} (\omega_1 + \omega_2) R = \frac{2}{3} \mu ER^2 l \varphi_0^2 (\omega_1 + \omega_2).$$

В качестве характеристики разрушения материала, на основании принципа осреднения [3] введем величину

$$K_c = \frac{h_1 K_c^{(1)} + h_2 K_c^{(2)}}{h_1 + h_2},$$

где $K_c^{(i)}$ ($i=1,2$) – сопротивление i -го слоя разрушению.

Полученные выше формулы позволяют дать приближенную оценку основным силовым параметрам, необходимым для разрушения материала. Более точная оценка характера разрушения может быть получена при наличии информации о полях напряжений, а также при учете микрповреждений, их дальнейших накоплений условий роста и так далее.

Итак, два вращающихся приводных валика, осуществляющих один из самых распространенных технологических процессов обработки металлов давлением прокатку [4, 5, 6], положены в основу схемы разрушающего устройства для осуществления процесса переработки материалов с целью их утилизации. Оба этих процесса (прокатка и утилизация), основаны на необратимости преобразований формоизменения исходных заготовок посредством пластической деформации, но решаемые ими задачи противоположны. Если в первом случае металлы и сплавы должны деформироваться без нарушения связи между кристаллами, т. е. без разрушения деформируемого тела, то во втором случае требуется как можно сильнее разрыхлить материал, разрушить его структуру. Существенное отличие физико-механических свойств подлежащих прокатке металлов и сплавов от свойств таких сложных композитов подлежащих утилизации, которыми являются, например шины, также откладывает отпечаток на характер сопротивления материалов пластическому деформированию в очаге деформации между валиками. Кроме того следует учитывать и тот факт, что теория продольной практики детально разработана лишь для случая вращения валиков с одинаковыми угловыми скоростями [4, 5, 6], тогда как при переработке материалов величина рассогласования скоростей является одним из наиболее важных управляемых параметров. Все вышеизложенное позволяет утверждать, что, несмотря на то, что многие научные положения и гипотезы, используемые в теории продольной прокатки, являются бесспорными и для

случая разрушения материалов, но все-таки воспользоваться ими следует весьма осмотрительно.

Приведем ниже вывод формулы для определения контактных напряжений при переработке материалов методом рассогласованной прокатки. При этом будем предполагать однородность процесса пластического деформирования, как в зоне отстаивания, так и в зоне опережения, а также то, что имеет место прилипание материала к валкам по некоторой части дуги касания.

Изобразим на рисунке 2 действующие на элемент полосы внутренние σ_x и внешние P, τ силы.

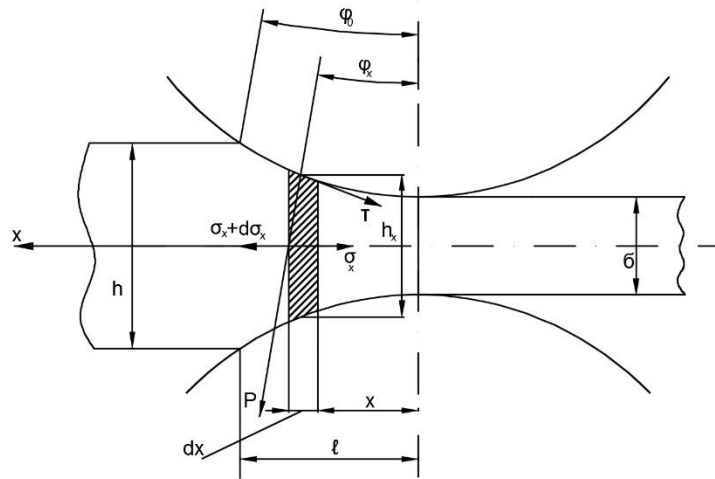


Рис. 2. Схема очага усилий разрушающего устройства

Уравнения равновесия в проекции на ось x примут

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h_x + dh_x) - \sigma_x h_x + 2P_x \sin \varphi_x dx - 2\tau_x dx = 0. \quad (11)$$

Условие пластичности в нашем случае принимает вид:

$$-P_x - \sigma_x = 2\tau_s. \quad (12)$$

где τ_s – сопротивление чистому сдвигу.

Знак «минус» в проекции сил в выражении (12) на ось Ox , согласуется с выбранным на рисунке 1 направлением этой оси.

Подставляем это значение в (11), получим основное дифференциальное уравнение для определения контактного нормального напряжения:

$$dP_x = -\left(2\tau_s + \frac{\tau_x}{\operatorname{tg} \varphi_x}\right) \frac{dh_x}{h_x}. \quad (13)$$

Выше, при выводе основного дифференциального уравнения рассогласованной прокатки, было учтено, как и в [4, 5], что $\tau_s = \operatorname{const}$, т. е.

$$d\sigma_x = d(-P_x - 2\tau_s) = -dP_x.$$

Заметим, что в случае вращения валков с разными скоростями предполагается их взаимное проскальзывание вдоль материала, в отличие от [4, 5], где принято $\tau_x \equiv 0$.

В нашем случае будем предполагать, что $\tau_x \neq 0$ и изменяется по линейному закону от нулевого значения при входе в валки до некоторого максимального значения, которое в соответствии с формулой (6) закон изменения τ_x имеет вид:

$$\tau_x = \frac{h - h_x}{\alpha}, \quad (14)$$

где $\alpha^{-1} = G(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}) \frac{R\varphi_0}{\delta(h - \delta)}$.

Так как радиус валков значительно превышает высоту разрушаемой заготовки, то с большой степенью точности можно положить $\varphi_x = \varphi_0 / 2$.

После подстановки (14) в (13), получим:

$$dP_x = -(2\tau_s - \frac{h}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2} + \frac{h_x}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}) \frac{dh_x}{h_x}.$$

Проинтегрировав данное выражение, найдем P_x :

$$P_x = -(2\tau_s - \frac{h}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}) \ln h_x - \frac{h_x}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2} + C.$$

Используем начальные условия $P_x = 0$ при $h_x = h$, определяем $C = (2\tau_s - \frac{h}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}) \ln h + \frac{h}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}$, после чего выражение P_x принимает окончательный вид:

$$P_x = (2\tau_s - \frac{h}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}) \ln \frac{h}{h_x} + \frac{h - h_x}{\alpha \operatorname{tg} \varphi_0 / 2}. \quad (15)$$

В местах проскальзывания валков по заготовке, следует брать зависимость $\tau_x = \mu P_x$, где μ – коэффициент сухого трения скольжения, а P_x получается как частный случай формулы (15), если в ней положить $\omega_2 = \omega_1$.

В результате получим:

$$P_x = 2\tau_s \ln \frac{h}{h_x}. \quad (16)$$

Можно непосредственно убедиться в том, что соотношение совпадает с общеизвестным [4] и тем самым свидетельствует правомочности выбранной концепции.

Следует помнить, что величина рассогласования скоростей является одним из важнейших управляемых параметров, посредством выбора значений которых можно достичь наиболее оптимальные условия переработки материалов. Кроме того полученное новое соотношение (15) и известное (16) позволяют определить мощностные и энергетические затраты, необходимые для разрушения материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Целиков А. И., Никитин Г. С., Рокотян С. Е. Теория продольной прокатки.: Металлургия , 1980. – 320 с.
2. Теория прокатки. Справочник. Целиков А. И., Томленов А. Д., Зюзин В. И., Третьяков А. В., Никитин Г. С. – М.: Металлургия, 1982, – 335 с.
3. Старченко Д. И. Кинематика прокатки. – Киев: УМК ВО , 1992 – 276 с.
4. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988–288 с.
5. Композиционные материалы: справочник / Василевич В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др./ – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
6. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1988 – 296 с.

Поступила: 06.02.2022

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ИСХОДНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ВСТАВКИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРИ ВЫДАВЛИВАНИИ ДОРОЖНЫХ РЕЗЦОВ

Быков К. Ю., Качанов И. В., Ленкевич С. А.

Белорусский национальный технический университет

Аннотация. Показана возможность применения программного комплекса DEFORM-3D при исследованиях, направленных на изучение особенностей формирования биметаллического соединения при скоростном комбинированном выдавливании биметаллических дорожных резцов.

Проведено компьютерное моделирование процесса скоростного комбинированного выдавливания биметаллических дорожных резцов на предмет выявления влияния исходных размеров рабочей вставки на геометрические параметры биметаллического соединения.

По результатам моделирования с помощью программного комплекса DEFORM-3D установлены характерные особенности образования биметаллического соединения в процессе скоростного комбинированного выдавливания биметаллических дорожных резцов.

Введение. В настоящее время, для повышения эффективности различных видов научной, научно-технической и производственно-конструкторской деятельности широко используются системы автоматизированного проектирования (САПР). Среди этих систем особое место занимают средства инженерного анализа – САЕ-системы.

Важнейшим преимуществом использования САЕ-системы при исследовании и разработке новых технологических процессов является интенсификация внедрения этих процессов в производство.

Среди всех САЕ-системы особый интерес представляют системы симуляции и моделирования сложных технологических процессов, таких как обработка металлов давлением. Отличительной особенностью моделирования таких процессов является совместное решение задач, описывающих различные физические процессы – пластическое течение металла, теплопередачу, упрочнение и т. д.

Использование таких САЕ-системы становится особенно актуальным при разработке технологий изготовления биметаллического инструмента. Исследования совместного пластического течения двух металлов, еще на стадии разработки, позволяет установить степень их пластической деформации, выявить тенденции формирования биметаллического соединения в зависимости от исходных размеров составных частей заготовки. Все это позволяет в определенной степени спрогнозировать возможность получения качественного биметаллического соединения, от которого зависят эксплуатационные свойства получаемых изделий.

Цель исследований – с помощью компьютерного моделирования установить влияние различных исходных размеров рабочей вставки на геометрические параметры биметаллического соединения, полученного в результате совместного пластического течения двух металлов при скоростном комбинированном выдавливании биметаллических дорожных резцов.

Методика моделирования. Моделирование процесса скоростного комбинированного выдавливания биметаллических дорожных резцов проводилось в специализированном программном комплексе DEFORM-3D.

DEFORM-3D – система конечно-элементного моделирования, которая предназначена для анализа трехмерного течения металла при различных процессах обработки металла давлением [1, 2].

Для проведения исследований, используя размеры и форму составной заготовки, отштампованного биметаллического резца (рисунок 1), формообразующего пуансона и матрицы, была создана трехмерная компьютерная модель процесса скоростного комбинированного выдавливания биметаллических дорожных резцов (рисунок 2).

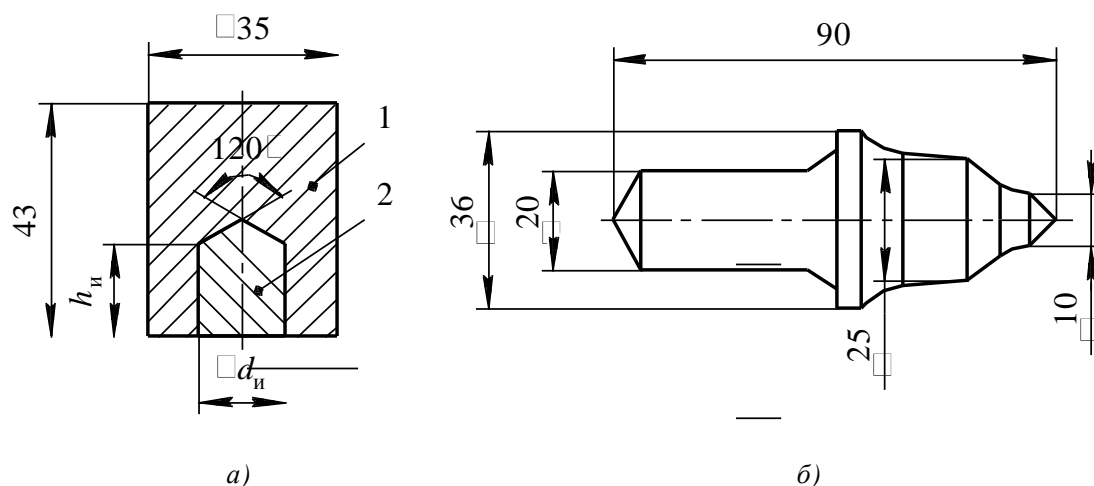


Рис. 1. Биметаллическая составная заготовка (а) и эскиз резца после штамповки (б): 1 – металлический корпус; 2 – рабочая вставка; d_n – исходный диаметр рабочей вставки; h_n – исходная высота рабочей вставки

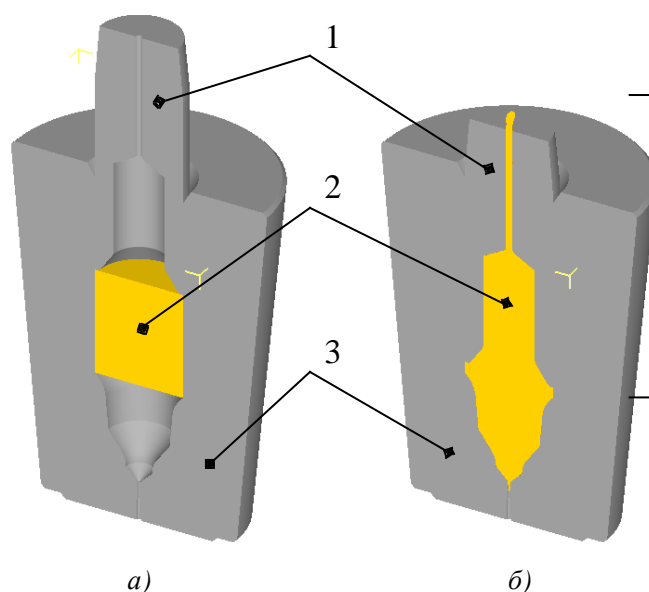


Рис. 2. Модели процесса скоростного комбинированного выдавливания биметаллических дорожных резцов до выдавливания (а) и после выдавливания (б): 1 – формообразующий пуансон; 2 – заготовка; 3 – матрица

Для имитации геометрии биметаллического соединения использовали встроенную функцию «Point Tracking» (Отслеживание Точки). Эта функция позволяет отслеживать смещение объема материала, заданного конечными точками фигуры.

Для получения исходной геометрии рабочей вставки создавался массив точек, расположенных в одной плоскости деформирования (осевой плоскости), которые повторяли форму и размеры исходной рабочей вставки.

Количество нанесенных точек варьировалось от 36 до 98 в зависимости от размеров рабочей вставки (рисунок 3). Исходная высота рабочей вставки $h_{и}$ варьировалась от 10 до 25 мм с шагом 1 мм. Исходный диаметр рабочей вставки $d_{и}$ также варьировался от 10 до 25 мм и так же с шагом 1 мм. Выбранные размеры исходной рабочей вставки обусловлены конструктивными особенностями дорожного резца (рисунок 1, б).

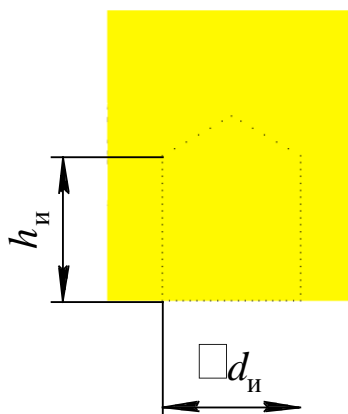


Рис. 3. Точки, нанесенные на осевую плоскость заготовки, имитирующие исходную форму и размеры рабочей вставки

Конусная часть на рабочей вставке выполняется для улучшения технологичности изготовления составной заготовки, таким образом, чтобы отверстие в металлическом корпусе можно было получать сверлением, а не точением.

Результаты моделирования. Разработанная модель является перспективным процессом получения биметаллического соединения в твердой фазе без специальной защиты от окисления по ряду разработанных технологических особенностей.

Основными механизмами пластической деформации являются скольжение и двойникование. Причем, в условиях традиционной обработки металлов давлением скольжение наиболее распространенный механизм, который достигается созданием нагрузки, обеспечивающей сдвиг атомов по кристаллографическим плоскостям. Механизм двойникования встречается реже и достигается за счет высоких скоростей деформирования. Также, при воздействии на деформируемое тело высоких температур механизм пластической деформации усложняется и к сдвиговому добавляется диффузионный [3–5].

В реальности, в зависимости от температурно-скоростных условий деформирования при получении биметаллических соединений на стадии объемного взаимодействия могут протекать различные процессы релаксационного характера: схватывание атомов контактных поверхностей; упорядоченность зоны соединения диффузионным путем и превращение ее в большеугловые межзеренные границы, ориентированные вдоль первоначальной плоскости контакта; миграция указанных межзеренных границ и образование в зоне соединения общих зерен; релаксация напряжений и др. Все указанные процессы взаимосвязаны в смысле влияния и на кинетику образования соединения. Однако два из них – схватывание атомов контактных поверхностей и миграция большеугловых межзеренных границ – являются основными, без развития которых не может быть получено соединение [3–5].

Учитывая все вышеперечисленное, рассмотрим технологические возможности получения качественного соединения на основе разработанной модели.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние для разработанной модели дорожного резца с получением биметаллического соединения при начальной скорости деформирования 20 м/с и температуры обработки 1150 °С.

Для исследования изменения характера формообразования биметаллического соединения используем показатель относительной степени деформации в диаметральных сечениях продеформированной рабочей вставки ε_i , определяемый выражением

$$\varepsilon_i = \frac{d_{\text{и}} - d_i}{d_{\text{и}}}, \quad (1)$$

где $d_{\text{и}}$ – исходный диаметр рабочей вставки; d_i – диаметр продеформированной рабочей вставки в характерных сечениях (рисунок 4).

Значения данного показателя в зависимости от хода деформирующего инструмента для различных исходных диаметров рабочей вставки $d_{\text{и}}$ представлены на графике (рисунок 4).

На первой стадии деформирования процесс пластического формоизменения рабочей вставки протекает в диапазоне хода инструмента $h_{\text{п}}$ от 0 до 15 мм и характеризуется минимальными значениями ε_i (рисунок 4). В данном диапазоне составная заготовка подвергается запрессовке по диаметру 36 мм (рисунок 1, б) с истечением металла в двух противоположных осевых направлениях. При этом образуются три зоны напряженно-деформированного состояния. Первая зона (рисунок 5, а) характеризуется действием сжимающих напряжений в процессе запрессовки. Вторая зона (рисунок 5, а) формируется в виде очага деформации направляющего течения металла в хвостовую часть штампуемого резца, а третья зона (рисунок 5, а) – в полость инструмента, формирующего корпус штампуемого резца, в которых происходит изменение знака напряжений, т. е. преобразованию сжимающих напряжений в растягивающие. При этом видно, что интенсивность деформации возрастает от большего исходного диаметра рабочей вставки ($d_{\text{и}} = 25$ мм) к меньшему ее диаметру ($d_{\text{и}} = 10$ мм). На графиках (рисунок 4) это выражается участком кривых с равномерным возрастанием показателя относительной степени деформации рабочей вставки ε_i . Геометрически это выражается в том, что рабочая вставка приобретает коническую форму (рисунок 6, а–ж).

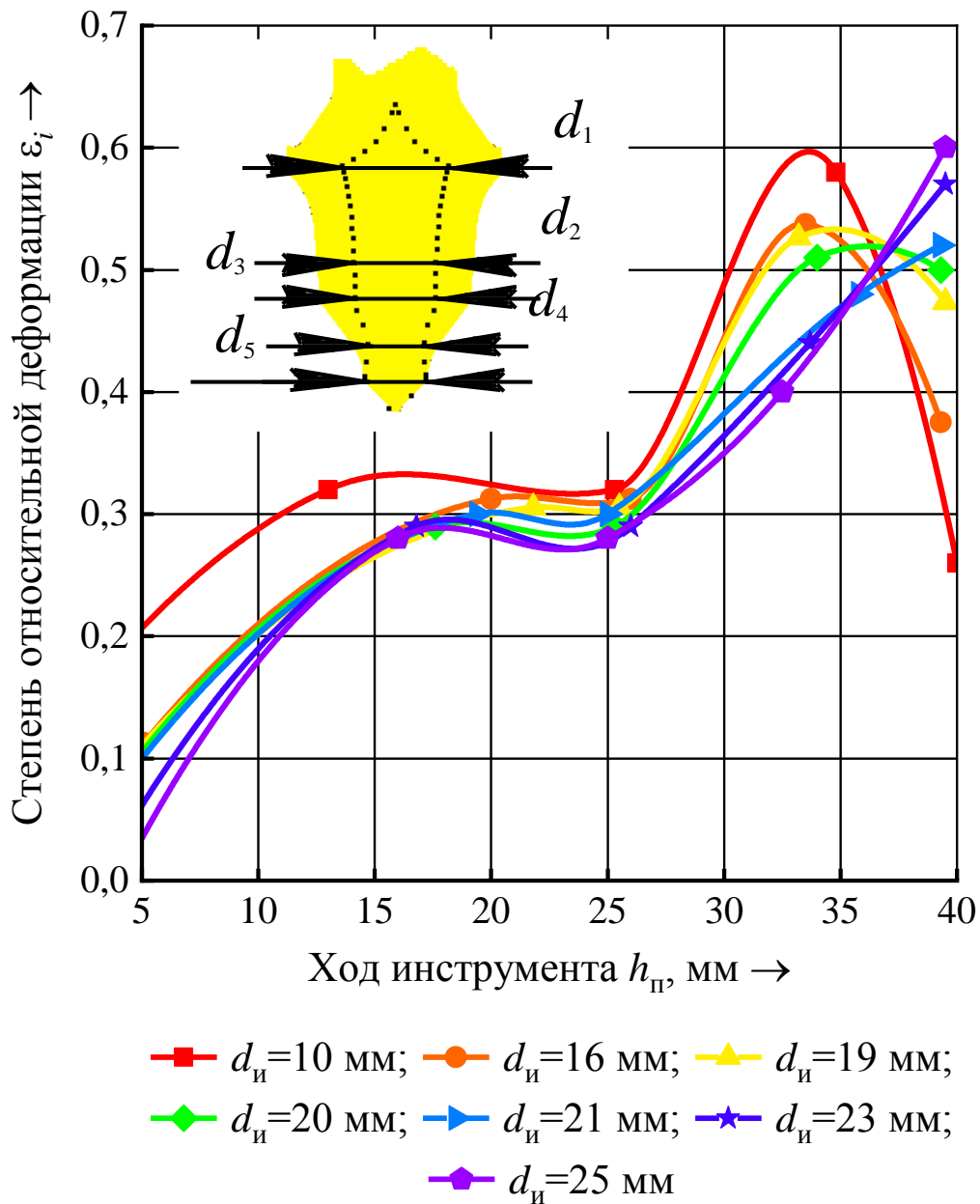


Рис. 4. Зависимость показателя относительной степени деформации рабочей вставки ε_i от хода инструмента $h_{и}$

Далее, по ходу деформирования (ход инструмента $h_{и}$ от 15 до 27 мм), истечение металла происходит по цилиндрическим участкам инструмента в хвостовую часть резца по диаметру 20 мм и корпусную часть резца по диаметру 25 мм (рисунок 1, б).

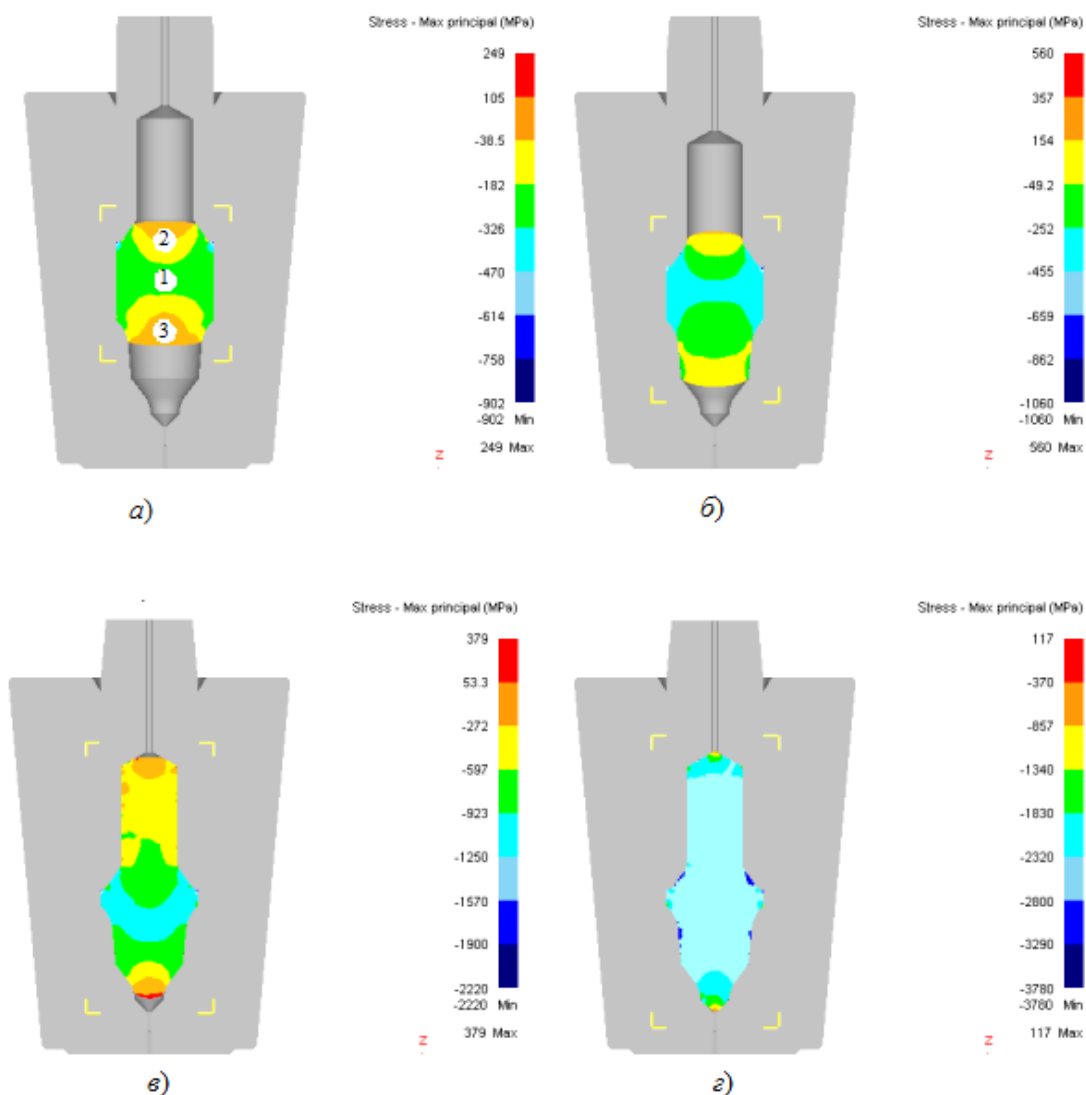


Рис. 5. Характер изменения напряженно-деформированного состояния при скоростном комбинированном выдавливании биметаллических дорожных резцов

Этот диапазон хода инструмента характеризуется установившемся напряженно-деформированным состоянием, при котором деформация протекает, в основном, в осевых направлениях и практически отсутствует в диаметральных сечениях (рисунок 5, б), что на кривых графика (рисунок 4) выражается в виде «плато» с постоянными значениями показателя относительной степени деформации рабочей вставки ε_i . Геометрически это выражается в том, что на деформируемой рабочей вставке формируется цилиндрический участок (рисунок 6). Причем, в диапазоне исходных диаметров рабочей вставки $d_{и}$ от 10 до 19 мм протяженность цилиндрического участка уменьшается и достигает своего минимального значения при исходном диаметре рабочей вставки равном 19 мм. Дальнейшее увеличение исходных диаметров рабочей вставки от 20 до 25 мм приводит к незначительному возрастанию протяженности цилиндрического участка. Также следует отметить, что наибольшая протяженность такого участка наблюдается у заготовок с рабочей вставкой с исходным диаметром $d_{и} = 10$ мм (рисунок 4, б).

При дальнейшем деформировании формообразуется наконечник резца и по достижении диаметра 10 мм (рисунок 1, б) в этом месте формируется застойная зона и ис-

течение металла в основном происходит в хвостовую часть резца до полного ее заполнения. На графике (рисунок 4) это диапазон движения инструмента от 25 до 35 мм. При этом в застойной зоне изменяется напряженно-деформированное состояние, при котором растягивающие напряжения начинают снижаться, а сжимающие резко возрастать (рисунок 5, *в*). При этом максимальные значения сжимающих напряжений действуют в наружных слоях металла постепенно снижаясь к центру заготовки. Таким образом при малых исходных диаметрах рабочей вставки d_n (до 20 мм) ее металл затекает в наконечник более интенсивно и в конце деформирования металла корпусной части резца под действием сжимающих напряжений в застойной зоне обжимает рабочую вставку в диаметральных сечениях застойной зоны образуя сужающуюся шейку, которая в экстремальных условиях работы дорожного резца будет являться концентратором напряжений, что может привести к его преждевременной поломке (рисунок 6, *а–в*). Наиболее ярко, с геометрической точки зрения, это выражается на заготовке с исходным диаметром рабочей вставки $d_n = 10$ мм (рисунок 6, *а*). На кривых графика это выражается в виде резкого скачкообразного изменения показателя относительной степени деформации ϵ_i в характерных диаметральных сечениях продеформированной рабочей вставки (рисунок 4).

Для исходных диаметров рабочей вставки d_n более 20 мм изменение относительной степени деформации ϵ_i происходит равномерно с постепенным увеличением, что геометрически выражается в отсутствии сужающейся шейки, в отличие от меньших исходных диаметров рабочей вставки, а наконечник в этом месте имеет коническое ушрение, заданную штамповым инструментом (рисунок 6, *д–ж*).

Окончание процесса деформирования (рисунок 5, *з*) характеризуется резким возрастанием сжимающих напряжений в 2–2,5 раза практически во всем объеме отштампованной заготовки.

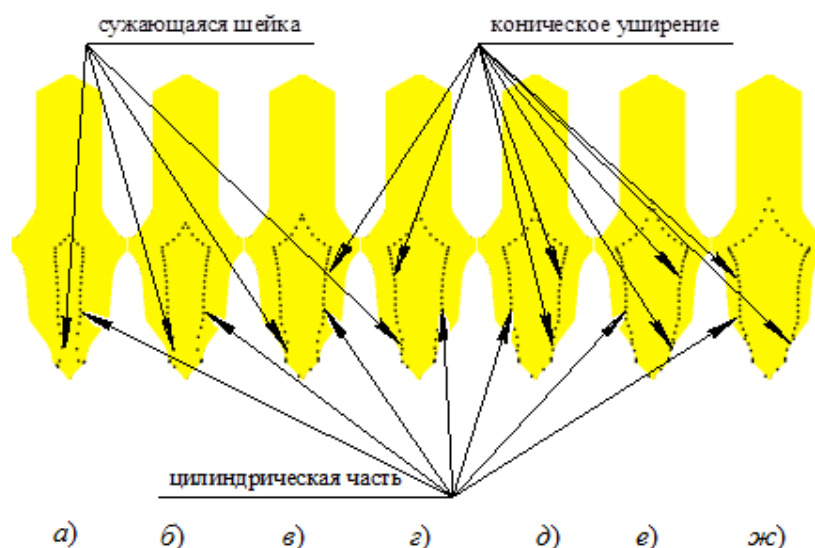


Рис. 6. Результат моделирования биметаллического дорожного резца с различными исходными диаметрами рабочей вставки d_n и исходной высотой $h_n = 18$ мм:

а – $d_n = 10$ мм; *б* – $d_n = 16$ мм; *в* – $d_n = 19$ мм; *г* – $d_n = 20$ мм; *д* – $d_n = 21$ мм; *е* – $d_n = 23$ мм;
ж – $d_n = 25$ мм

Помимо этого, ряд вычислительных экспериментов при компьютерном моделировании в DEFORM-3D показал, что высоту рабочей вставки h_n целесообразно выбирать в зависимости от диаметра заготовки с условием того, что после деформирования

основание конической вставки будет находиться в диаметральном сечении соответствующему диаметру 36 мм отштампованного резца (рисунок 1, б).

Рассматривая модель с точки зрения механизмов пластической деформации можно отметить, что, благодаря наличию конусных участков при формообразовании корпуса резца деформирование осуществляется путем сдвига с постоянным увеличением количества плоскостей скольжения путем последовательного перемещения дислокаций. Кроме того, очевидно, что высокая начальная скорость деформирования создает предпосылки для развития сдвиговых деформаций двойникования в результате чего повышается плотность дислокаций с возможностью выхода их на контактные поверхности совместно деформируемых металлов, что способствует их объемному взаимодействию с возможностью образования общих зерен. Также следует отметить, что процесс протекает при высокой температуре деформирования, а с учетом импульсного нагружения достигается высокая подвижность межузельных атомов, что способствует увеличению скорости диффузии. Перечисленные факторы будут способствовать получению качественного биметаллического соединения [3–5].

Однако, в реальных условиях даже кратковременный нагрев без защиты от окисления приводит к возникновению окисных пленок в стыке соединяемых частей составной заготовки, что ведет к ухудшению соединения. Наибольшую опасность представляет место непосредственного стыка где имеется возможность образования достаточно толстого слоя окислов. Для устранения данного недостатка моделью предусмотрена возможность выноса слоя окислов за пределы биметаллического соединения при формообразовании наконечника резца с выносом этих окислов на его поверхность (рисунок 7). На части же сопрягаемых поверхностей, удаленных от стыка, окисная пленка достаточно тонкая и ее разрушение будет происходить за счет воздействия импульсного нагружения и выхода дислокаций на сопрягаемые поверхности [4, 6].

Кроме того, в процессе формообразования резца за счет направленной деформации формируются «замковые» соединения в виде конических сопрягаемых поверхностей, способствующие дополнительной прочности биметаллического соединения.

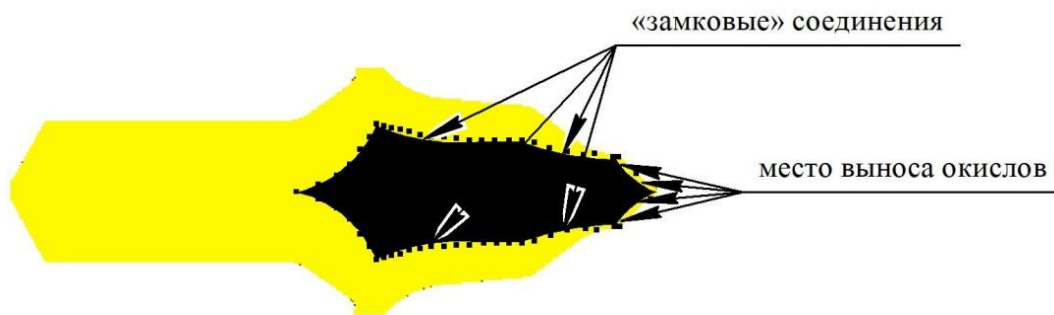


Рис. 7. Формирование качественного биметаллического соединения путем направленной деформации

Также было отмечено, что окончательное формообразование сопровождается схемой всестороннего неравномерного сжатия с увеличением сжимающих напряжений в 2–2,5 раза, что способствует «залечиванию» возможных непроваров и микротрещин на сопрягаемых поверхностях биметаллического соединения.

Выводы:

1. Разработана методика моделирования геометрических параметров биметаллического соединения при скоростном комбинированном выдавливании биметаллических дорожных резцов с помощью программного комплекса DEFORM-3D.

2. Установлено что, наиболее предпочтительные исходные высоты рабочей вставки h_n лежат в пределах от 17 до 20 мм, что обусловлено нахождением основания конической вставки, при данных высотах, в наибольшем диаметральном сечении отштампованного резца.

3. Анализ моделей показал, что наиболее предпочтительными диаметрами исходной рабочей вставки d_n можно считать диаметры, лежащие в диапазоне от 21 до 23 мм, обеспечивающий отсутствие сужающейся шейки на наконечнике, являющейся концентратором напряжений, что может привести к преждевременной поломке дорожного резца в ходе его работы.

4. В результате анализа движущих сил процесса образования биметаллического соединения в твердой фазе и картины пластического течения представленной модели установлены предпосылки для получения качественного биметаллического соединения по предложенной схеме деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паршин А. П. Практическое руководство к программному комплексу DEFORM – 3D: учебное пособие / В. С. Паршин А. П. Карамышев, И. И. Некрасов и др., научн. Ред. Ю. Б. Чебулин. – Екатеринбург : УрФУ 2010. – 266 с.

2. Качанов И. В. Компьютерное моделирование в Deform-3D для анализа пластического течения при скоростном горячем выдавливании биметаллических формообразующих деталей штамповой оснастки / Computer Modeling in Deform-3D for Analysis of Plastic Flow in High-Speed Hot Extrusion of Bimetallic Formative Parts of Die Tooling / И. В. Качанов, М. В. Кудин, С. А. Ленкевич // Наука и техника. Серия 1. Машиностроение = Science & Technigue. Series 1. Mechanical engineering. – 2015. – № 1 – С. 20–25.

3. Каракозов Э. С. Сварка металлов давлением / Э. С. Кракозов. – М. : Машиностроение, 1986. – 280 с.

4. Качанов И. В. Технология получения биметаллических формообразующих деталей штамповой оснастки методом скоростного горячего выдавливания Technology for obtaining bimetallic shaping parts of die tooling using method of high-speed hot extrusion / И. В. Качанов, М. В. Кудин, С. А. Ленкевич // Наука и техника = Science & Technigue. – 2014. – № 4. – С. 65–70.

5. Базар В. Р. Физические основы упрочнения и разрушения материалов: учебное пособие / В. Р. Бараз, М. А. Филиппов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. – 192 с.

6. Качанов И. В. Скоростное горячее выдавливание стержневых изделий с плакированием торцевой части / И. В. Качанов, Г. Н. Здор, Л. А. Исаевич, В. Н. Шарий. – Минск, БНТУ, 2011 – 198 с.

Поступила: 31.03.2022

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК В ЗВЕНЬЯХ БОРТОВОГО ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕЙ ХОДОВОЙ СИСТЕМЫ

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Опытный образец колесно-шагающего движителя, созданный в БНТУ, использует комбинированный способ движения. Частично перемещение осуществляется за счет поворота штанг и кривошипов (шагающий принцип), а частично – за счет прокатывания опорных башмаков (колесный принцип) [1, 2]. Конструктивные особенности данной ходовой системы позволяют перешагивать сравнительно невысокие препятствия (камни, бревна). Данное преимущество позволяет применять колесно-шагающий движитель в лесном хозяйстве, горной промышленности, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций [3, 4].

В предыдущих работах [2, 5] был выполнен динамический анализ механизма данного движителя, однако методика расчета была разработана для режима постоянной угловой скорости входного вала. При этом, в реальных условиях работы, сельскохозяйственная и лесопромышленная техника чаще всего эксплуатируется на переменных скоростных режимах, когда возникают дополнительные инерционные нагрузки.

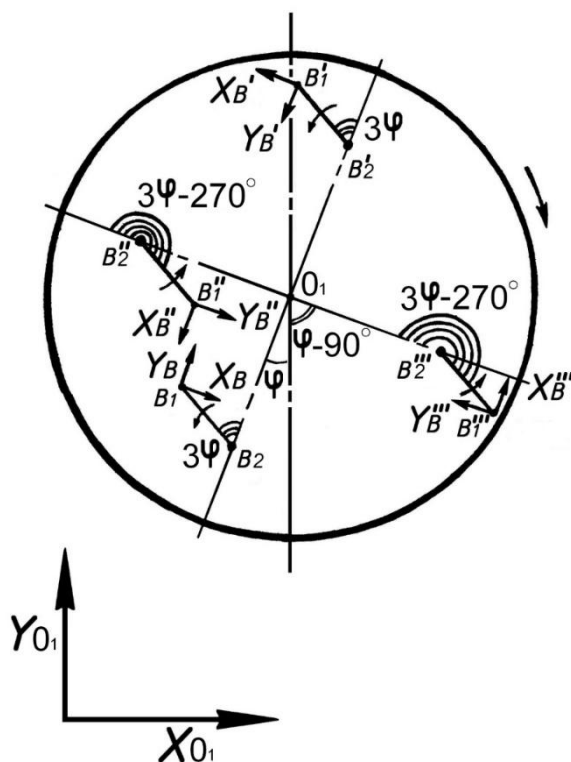


Рис. 1. Действие сил сопротивления на ступицу и кривошипы колесно-шагающего движителя

Определим динамические нагрузки на движитель при переменной частоте вращения входного вала. В приведенных далее формулах приняты следующие обозначения: межосевое расстояние планетарного бортового редуктора a , длина кривошипа b , длина

стойки опорного башмака c , радиус-вектора Y_1 и Y_2 профиля опорного башмака, расстояние от оси крепления кривошипа к штанге до центра масс опорного башмака L , угол поворота φ ступицы движителя, угловая скорость ω , угловое ускорение ε , ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Силу тяжести штанги делим на три составляющие: две составляющие башмаков, равные $G_A = m_A \cdot g$ каждая, а также составляющую штанги между отверстиями для крепления кривошипов $G_H = m_I \cdot g$, действие которых сосредоточены в трех точках. В данных точках действующей штанги, которая находится в контакте с опорной поверхностью, действуют силы инерции $F_{A1X}^{\ddot{e}i}$, $F_{A1Y}^{\ddot{e}i}$, $F_{A2X}^{\ddot{e}i}$, $F_{A2Y}^{\ddot{e}i}$, $F_{H1X}^{\ddot{e}i}$, $F_{H1Y}^{\ddot{e}i}$. На свободную штангу движителя, которая не находится в контакте с опорной поверхностью, действуют силы инерции $F_{A3X}^{\ddot{e}i}$, $F_{A3Y}^{\ddot{e}i}$, $F_{A4X}^{\ddot{e}i}$, $F_{A4Y}^{\ddot{e}i}$, $F_{H2X}^{\ddot{e}i}$, $F_{H2Y}^{\ddot{e}i}$. Также, на опорный башмак работающей штанги действуют: момент трения качения $M_K = G \cdot \psi \cdot (Y_2 - (dY_1/d\varphi) \cdot \sin \varphi)$, сила сопротивления скольжению $F_C \leq G \cdot f$, реакция опорной поверхности G . При этом: ψ – коэффициент трения качения, f – коэффициент трения скольжения.

Проводя динамический анализ, необходимо знать величины моментов сопротивления вращению для каждого кривошипа в отдельности (рисунок 1).

Далее выразим эти моменты сопротивления [5, 6].

для кривошипа B :

$$M_{C.B} = b \cdot (X_B \cdot \cos 3\varphi + Y_B \cdot \sin 3\varphi); \quad (1)$$

для кривошипа B' :

$$M_{C.B'} = -b \cdot (X_{B'} \cdot \cos 3\varphi + Y_{B'} \cdot \sin 3\varphi); \quad (2)$$

для кривошипа B'' :

$$M_{C.B''} = -b \cdot (X_{B''} \cdot \cos(3\varphi - 270^\circ) + Y_{B''} \cdot \sin(3\varphi - 270^\circ)); \quad (3)$$

для кривошипа B''' :

$$M_{C.B'''} = b \cdot (X_{B'''} \cdot \cos(3\varphi - 270^\circ) + Y_{B'''} \cdot \sin(3\varphi - 270^\circ)). \quad (4)$$

Силы в формулах (1–2), действующие на кривошипы от действующей штанги:

$$X_B = \frac{M_{B1}}{2 \cdot a} + \left(\frac{(G_H + F_{H1Y}^{uH})}{2} - \frac{(G_B + F_{B2Y}^{uH}) \cdot L}{2 \cdot a} + G_B - G + F_{B1Y}^{uH} \right) \cdot \sin \varphi + \left(\frac{F_{B2X}^{uH} \cdot L}{2 \cdot a} - \frac{F_{H1X}^{uH}}{2} + F_C - F_{B1X}^{uH} \right) \cdot \cos \varphi; \quad (5)$$

$$Y_B = (G - G_B - F_{B1Y}^{uH}) \cdot \cos \varphi + (F_C - F_{B1X}^{uH}) \cdot \sin \varphi; \quad (6)$$

$$X'_B = \frac{M_{B1}}{2 \cdot a} - \left(\frac{(GH + F_{H1Y}^{uH})}{2} + \frac{(G_B + F_{B2Y}^{uH})}{2 \cdot a} \cdot (2 \cdot a + L) \right) \cdot \sin \varphi + \left(\frac{F_{H1X}^{uH}}{2} + \frac{F_{B2X}^{uH}}{2 \cdot a} \cdot (2 \cdot a + L) \right) \cdot \cos \varphi; \quad (7)$$

$$Y'_B = (GH + G_B + F_{H1Y}^{uH} + F_{B2Y}^{uH}) \cdot \cos \varphi + (F_{H1X}^{uH} + F_{B2X}^{uH}) \cdot \sin \varphi. \quad (8)$$

Значение реактивного момента в формулах (5, 7):

$$M_{B1} = M_K + ((G_A + F_{A1Y}^{\dot{e}}) \cdot L - G \cdot Y_1) \cdot \sin \varphi + (F_C \cdot Y_1 - F_{A1X}^{\dot{e}} \cdot L) \cdot \cos \varphi + F_C \cdot Y_2. \quad (9)$$

Силы в формулах (3–4), действующие на кривошпицы от свободной штанги:

$$X_B^{//} = - \left(\frac{(GH + F_{H2Y}^{uH})}{2} + (G_B + F_{B4Y}^{uH}) + \frac{(F_{B4Y}^{uH} - F_{B3Y}^{uH}) \cdot L}{2 \cdot a} \right) \cdot \sin(\varphi - 90^\circ) + \left(\frac{F_{H2X}^{uH}}{2} + \frac{F_{B4X}^{uH}}{2 \cdot a} \cdot (2 \cdot a + L) - \frac{F_{B3X}^{uH} \cdot L}{2 \cdot a} \right) \cdot \cos(\varphi - 90^\circ); \quad (10)$$

$$Y_B^{//} = (F_{H2X}^{uH} + F_{B4X}^{uH}) \cdot \sin(\varphi - 90^\circ) + (GH + G_B + F_{H2Y}^{uH} + F_{B4Y}^{uH}) \cdot \cos(\varphi - 90^\circ); \quad (11)$$

$$X_B^{///} = \left(\frac{(GH + F_{H2Y}^{uH})}{2} + G_B + \frac{(F_{B3Y}^{uH} - F_{B4Y}^{uH}) \cdot L}{2 \cdot a} + F_{B3Y}^{uH} \right) \cdot \sin(\varphi - 90^\circ) + \left(\frac{F_{B4X}^{uH} \cdot L}{2 \cdot a} - \frac{F_{H2X}^{uH}}{2} - \frac{F_{B3X}^{uH}}{2 \cdot a} \cdot (2 \cdot a + L) \right) \cdot \cos(\varphi - 90^\circ); \quad (12)$$

$$Y_B^{///} = -F_{B3X}^{uH} \cdot \sin(\varphi - 90^\circ) - (G_B + F_{B3Y}^{uH}) \cdot \cos(\varphi - 90^\circ). \quad (13)$$

Момент сопротивления вращению ступицы движителя равен [2, 5]:

$$\dot{I} \tilde{N} \tilde{N} \dot{\varnothing} = (X_B + X'_B + X_B^{//} + X_B^{///}) \cdot a. \quad (14)$$

Момент сопротивления вращению кривошпицов равен [2, 5]:

$$M \tilde{N} \hat{E} \hat{D} = b \cdot ((X_A - X'_B) \cdot \cos 3\varphi + (Y_A - Y'_B) \cdot \sin 3\varphi +$$

$$+ (X_B^{///} - X_B^{//}) \cdot \cos(3\varphi - 270^\circ) + (Y_B^{///} - Y_B^{//}) \cdot \sin(3\varphi - 270^\circ). \quad (15)$$

Частота вращения ступицы, являющейся водилом планетарного механизма бортового редуктора, по абсолютной величине в 2 раза меньше частоты вращения кривошипов. Поэтому при приведении момента сопротивления вращению кривошипов $M_{C.KP}$ к оси вращения ступицы, его следует увеличить в 2 раза [2, 5]. Итак, суммарный момент сопротивления вращению ступицы равен:

$$\dot{I} \tilde{N}_\Sigma = \dot{I} \tilde{N}\tilde{N}\dot{\varphi} + 2 \cdot M_{\tilde{N}} \hat{E}\hat{D}. \quad (16)$$

Рассматривая общий случай с переменной частотой вращения ступицы $\omega = var$, запишем выражения для сил инерции [6].

Силы $F_{B1X}^{ун}$, $F_{B1Y}^{ун}$:

$$F_{B1X}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot (Y_1 - L) \cdot \sin \varphi + m_B \cdot \varepsilon \cdot ((Y_1 - L) \cdot \cos \varphi + Y_2). \quad (17)$$

$$F_{B1Y}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (Y_1 - L) \cdot \cos \varphi \right) - m_B \cdot \varepsilon \cdot (Y_1 - L) \cdot \sin \varphi. \quad (18)$$

Силы $F_{B2X}^{ун}$, $F_{B2Y}^{ун}$:

$$F_{B2X}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot (Y_1 + 2 \cdot a + L) \cdot \sin \varphi + m_B \cdot \varepsilon \cdot ((Y_1 + 2 \cdot a + L) \cdot \cos \varphi + Y_2). \quad (19)$$

$$F_{B2Y}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (Y_1 + 2 \cdot a + L) \cdot \cos \varphi \right) - m_B \cdot \varepsilon \cdot (Y_1 + 2 \cdot a + L) \cdot \sin \varphi. \quad (20)$$

Силы $F_{H1X}^{ун}$, $F_{H1Y}^{ун}$:

$$F_{H1X}^{ун} = -m_H \cdot \omega^2 \cdot (Y_1 + a) \cdot \sin \varphi + m_H \cdot \varepsilon \cdot ((Y_1 + a) \cdot \cos \varphi + Y_2). \quad (21)$$

$$F_{H1Y}^{ун} = -m_H \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (Y_1 + a) \cdot \cos \varphi \right) - m_H \cdot \varepsilon \cdot (Y_1 + a) \cdot \sin \varphi. \quad (22)$$

Силы $F_{B3X}^{ун}$, $F_{B3Y}^{ун}$:

$$F_{B3X}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 8 \cdot b \cdot \sin 2\varphi + (a + L) \cdot \cos \varphi) + m_B \cdot \varepsilon \cdot ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2 - (a + L) \cdot \sin \varphi). \quad (23)$$

$$F_{B3Y}^{ун} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - 8 \cdot b \cdot \cos 2\varphi - (a + L) \cdot \sin \varphi \right) + m_A \cdot \varepsilon \cdot (-(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi - (a + L) \cdot \cos \varphi). \quad (24)$$

Силы $F_{B4X}^{ун}$, $F_{B4Y}^{ун}$:

$$F_{B4X}^{ин} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 8 \cdot b \cdot \sin 2\varphi - (a + L) \cdot \cos \varphi) + m_A \cdot \varepsilon \cdot ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2 + (a + L) \cdot \sin \varphi). \quad (25)$$

$$F_{B4Y}^{ин} = -m_B \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - 8 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + (a + L) \cdot \sin \varphi \right) + m_B \cdot \varepsilon \cdot (-(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi + (a + L) \cdot \cos \varphi). \quad (26)$$

Силы $F_{H2X}^{ин}$, $F_{H2Y}^{ин}$:

$$F_{H2X}^{ин} = -m_H \cdot \omega^2 \cdot ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 8 \cdot b \cdot \sin 2\varphi) + m_H \cdot \varepsilon \cdot ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2). \quad (27)$$

$$F_{H2Y}^{ин} = -m_H \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{dY_1}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - 8 \cdot b \cdot \cos 2\varphi \right) + m_H \cdot \varepsilon \cdot (-(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi). \quad (28)$$

Радиус-вектора профиля опорных башмаков описываются уравнениями [7]:

$$Y_1 = 4 \cdot b \cdot \cos \varphi - a; \quad (29)$$

$$Y_2 = a - 2 \cdot b \cdot (1 + \cos^2 \varphi) + c. \quad (30)$$

Вычислим значения сил инерции в механизме колесно-шагающего движителя для величин угла поворота ступицы $-45^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$ при следующих заданных значениях параметров: межосевое расстояние редуктора $a = 0,1$ м, длина кривошипа $b = 0,05$ м, длина стойки опорного башмака $c = 0,2365$ м, расстояние от оси крепления кривошипа к штанге до центра масс башмака $L = 0,165$ м, масса башмака $m_B = 4,5$ кг, масса центральной части штанги $m_H = 5$ кг, постоянная частота вращения ступицы $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 50 \text{ об/мин}}{30} = 5,236$ рад/с. Результаты вычислений заносятся в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения сил инерции при постоянной частоте вращения ступицы

φ, граду- сы	$F_{B1X}^{ин}$, Н	$F_{B1Y}^{ин}$, Н	$F_{B2X}^{ин}$, Н	$F_{B2Y}^{ин}$, Н	$F_{H1X}^{ин}$, Н	$F_{H1Y}^{ин}$, Н
-45,0	-10,8	23,1	35,5	-23,1	13,7	0,0
-40,0	-8,9	20,8	33,2	-29,3	13,5	-4,8
-35,0	-7,2	18,3	30,3	-35,2	12,9	-9,4
-30,0	-5,7	16,0	27,0	-40,7	11,9	-13,7
-25,0	-4,4	13,8	23,3	-45,5	10,5	-17,6
-20,0	-3,3	11,8	19,1	-49,6	8,8	-21,0
-15,0	-2,3	10,2	14,6	-52,9	6,9	-23,7
-10,0	-1,5	9,0	9,9	-55,4	4,7	-25,8
-5,0	-0,7	8,3	5,0	-56,9	2,4	-27,0
0,0	0,0	8,0	0,0	-57,4	0,0	-27,4
5,0	0,7	8,3	-5,0	-56,9	-2,4	-27,0
10,0	1,5	9,0	-9,9	-55,4	-4,7	-25,8
15,0	2,3	10,2	-14,6	-52,9	-6,9	-23,7
20,0	3,3	11,8	-19,1	-49,6	-8,8	-21,0
φ, граду- сы	$F_{B3X}^{ин}$, Н	$F_{B3Y}^{ин}$, Н	$F_{B4X}^{ин}$, Н	$F_{B4Y}^{ин}$, Н	$F_{H2X}^{ин}$, Н	$F_{H2Y}^{ин}$, Н
25,0	4,4	13,8	-23,3	-45,5	-10,5	-17,6
30,0	5,7	16,0	-27,0	-40,7	-11,9	-13,7
35,0	7,2	18,3	-30,3	-35,2	-12,9	-9,4
40,0	8,9	20,8	-33,2	-29,3	-13,5	-4,8
45,0	10,8	23,1	-35,5	-23,1	-13,7	0,0
-45,0	38,6	-23,1	84,8	23,1	68,5	0,0
-40,0	35,7	-16,7	85,8	25,3	67,5	4,8
-35,0	31,2	-10,3	84,7	27,2	64,4	9,4
-30,0	25,1	-4,0	81,7	28,7	59,4	13,7
-25,0	17,6	2,0	76,9	29,7	52,5	17,6
-20,0	8,9	7,7	70,4	30,1	44,1	21,0
-15,0	-0,7	12,9	62,4	29,8	34,3	23,7
-10,0	-11,1	17,5	53,3	28,9	23,4	25,8
-5,0	-21,9	21,4	43,3	27,1	11,9	27,0
0,0	-32,7	24,7	32,7	24,7	0,0	27,4
5,0	-43,3	27,1	21,9	21,4	-11,9	27,0
10,0	-53,3	28,9	11,1	17,5	-23,4	25,8
15,0	-62,4	29,8	0,7	12,9	-34,3	23,7
20,0	-70,4	30,1	-8,9	7,7	-44,1	21,0
25,0	-76,9	29,7	-17,6	2,0	-52,5	17,6
30,0	-81,7	28,7	-25,1	-4,0	-59,4	13,7
35,0	-84,7	27,2	-31,2	-10,3	-64,4	9,4
40,0	-85,8	25,3	-35,7	-16,7	-67,5	4,8
45,0	-84,8	23,1	-38,6	-23,1	-68,5	0,0

Затем вычислим значения сил инерции в механизме колесно-шагающего движителя при переменной частоте вращения ступицы движителя. Результаты вычислений заносятся в таблицу 2.

Таблица 2 – Значения сил инерции при переменной частоте вращения ступицы

φ, градусы	$F_{B1X}^{ин}$, Н	$F_{B1Y}^{ин}$, Н	$F_{B2X}^{ин}$, Н	$F_{B2Y}^{ин}$, Н	$F_{H1X}^{ин}$, Н	$F_{H1Y}^{ин}$, Н
-45,0	-10,3	22,7	37,6	-21,8	15,1	0,5
-40,0	-8,5	20,6	35,6	-28,3	15,1	-4,3
-35,0	-6,9	18,3	33,1	-34,6	14,6	-9,0
-30,0	-5,4	16,1	30,0	-40,4	13,7	-13,5
-25,0	-4,1	14,0	26,4	-45,8	12,4	-17,7
-20,0	-3,0	12,1	22,3	-50,5	10,7	-21,3
φ, градусы	$F_{B3X}^{ин}$, Н	$F_{B3Y}^{ин}$, Н	$F_{B4X}^{ин}$, Н	$F_{B4Y}^{ин}$, Н	$F_{H2X}^{ин}$, Н	$F_{H2Y}^{ин}$, Н
-15,0	-2,0	10,5	17,8	-54,4	8,8	-24,4
-10,0	-1,2	9,4	13,0	-57,5	6,6	-26,7
-5,0	-0,4	8,7	7,9	-59,6	4,2	-28,3
0,0	0,3	8,5	2,7	-60,7	1,7	-29,0
5,0	1,1	8,8	-2,6	-60,7	-0,9	-28,8
10,0	1,9	9,7	-7,9	-59,6	-3,3	-27,7
15,0	2,8	11,1	-13,1	-57,5	-5,7	-25,8
20,0	3,9	12,9	-18,1	-54,4	-7,9	-23,1
25,0	5,1	15,2	-22,8	-50,4	-9,8	-19,6
30,0	6,6	17,7	-27,2	-45,5	-11,4	-15,4
35,0	8,3	20,5	-31,1	-39,9	-12,7	-10,8
40,0	10,2	23,3	-34,5	-33,7	-13,5	-5,8
45,0	12,5	26,2	-37,4	-27,1	-13,8	-0,5
-45,0	40,7	-24,4	85,2	23,5	70,0	-0,5
-40,0	38,2	-18,2	87,1	25,9	69,6	4,3
-35,0	33,9	-11,8	86,8	28,1	67,1	9,0
-30,0	28,0	-5,5	84,6	29,9	62,5	13,5
-25,0	20,6	0,7	80,3	31,2	56,1	17,7
-20,0	11,8	6,6	74,4	31,9	47,8	21,3
-15,0	1,8	12,0	66,8	31,9	38,1	24,4
-10,0	-9,0	17,0	57,8	31,2	27,1	26,7
-5,0	-20,5	21,3	47,8	29,6	15,2	28,3
0,0	-32,2	24,9	37,0	27,3	2,7	29,0
5,0	-43,7	27,8	25,7	24,1	-10,0	28,8
10,0	-54,9	29,9	14,4	20,1	-22,5	27,7
15,0	-65,2	31,2	3,4	15,3	-34,4	25,8
20,0	-74,5	31,7	-7,1	9,8	-45,3	23,1
25,0	-82,2	31,6	-16,7	3,7	-54,9	19,6
30,0	-88,3	30,8	-25,1	-3,0	-63,0	15,4
35,0	-92,4	29,4	-32,0	-10,0	-69,1	10,8
40,0	-94,4	27,6	-37,3	-17,2	-73,2	5,8
45,0	-94,1	25,4	-40,9	-24,5	-75,0	0,5

При этом, величина углового ускорения $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$, начальное значение частоты вращения $\omega_0 = 5,236 \text{ рад/с}$ для угла поворота ступицы $\phi_0 = -45^\circ$. Значения частоты

вращения ω для конкретного угла поворота ступицы ϕ будут вычисляться по формуле [8]:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot (\phi - \phi_0)}, \quad (31)$$

где значения углов ϕ_0 , ϕ подставляются в радианах. Прочие исходные данные остаются такими же.

Определим нагрузки на кривошипы планетарного бортового редуктора, когда мотоблок с двумя ведущими колесно-шагающими двигателями используется для пахоты [9, 10].

Исходные данные для расчета при постоянной частоте вращения: результаты расчетов из таблицы 1, коэффициент сопротивления качению $\psi = 0,05$; сосредоточенная масса на один двигатель $m_d = 122$ кг; масса установки для пахоты $m_{уст} = 50$ кг; полная масса мотоблока $m_{мб} = 294$ кг; сила сопротивления при пахоте $F_{п} = 2000$ Н.

Результаты вычислений заносятся в таблицу 3.

Таблица 3 – Нагрузки на кривошипы двигателя при постоянной частоте вращения

Угол поворота ступицы, градусы	Момент сопротивления вращению $M_{C.B}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B'}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B''}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B'''}$, Н·м
-45,0	-149,12	96,20	-6,06	-0,80
-40,0	-103,01	68,93	-4,78	-0,99
-35,0	-50,76	35,71	-3,28	-1,32
-30,0	2,15	0,71	-1,72	-1,72
-25,0	50,13	-31,60	-0,30	-2,12
-20,0	88,40	-57,18	0,85	-2,42
-15,0	113,71	-73,19	1,61	-2,54
-10,0	124,92	-78,45	1,95	-2,44
-5,0	123,07	-73,67	1,92	-2,13
0,0	111,16	-61,16	1,63	-1,63
5,0	93,45	-44,37	1,24	-1,03
10,0	74,58	-27,07	0,88	-0,39
15,0	58,65	-12,57	0,71	0,23
20,0	48,48	-3,09	0,79	0,79
25,0	45,13	0,62	1,14	1,28
30,0	47,85	-0,71	1,72	1,72
35,0	54,45	-5,20	2,43	2,16
40,0	61,84	-10,39	3,15	2,62
45,0	66,77	-13,85	3,74	3,12

Анализируя результаты расчетов, следует отметить, что при смене опорных башмаков происходят значительные скачки значений моментов сопротивления вращению кривошипов. Когда очередной опорный башмак вступает в контакт с поверхностью, нагрузки на кривошипы действующей штанги резко возрастают по абсолютной величине.

Согласно рисунку 1, нагрузка на конкретный кривошип, за время полного оборота ступицы движителя, изменяется по схеме: $M_{C.B} \rightarrow M_{C.B//} \rightarrow M_{C.B/} \rightarrow M_{C.B///}$.

Исходные данные для расчета при переменной частоте вращения: результаты расчетов из таблицы 2, величина углового ускорения $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$, начальное значение частоты вращения $\omega_0 = 5,236 \text{ рад/с}$ для угла поворота ступицы $\varphi_0 = -45^\circ$. Значения частоты вращения ω для конкретного угла поворота ступицы φ будут вычисляться по формуле (31). Прочие исходные данные остаются теми же. Результаты вычислений заносятся в таблицу 4.

Таблица 4 – Нагрузки на кривошипы движителя при переменной частоте вращения

Угол поворота ступицы, градусы	Момент сопротивления вращению $M_{C.B}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B/}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B//}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B///}$, Н·м
-45,0	-150,79	97,94	-6,14	-0,65
-40,0	-104,05	70,46	-4,88	-0,77
-35,0	-50,60	36,61	-3,36	-1,06
-30,0	3,97	0,60	-1,76	-1,44
-25,0	53,89	-32,97	-0,26	-1,85
-20,0	94,05	-59,86	0,97	-2,17
-15,0	120,87	-76,98	1,81	-2,33
-10,0	132,91	-82,93	2,23	-2,29
-5,0	131,04	-78,24	2,25	-2,04
0,0	118,21	-65,23	1,98	-1,61
5,0	98,85	-47,45	1,57	-1,06
10,0	77,91	-28,90	1,18	-0,47
15,0	59,92	-13,18	0,96	0,11
20,0	48,10	-2,82	0,99	0,63
25,0	43,83	1,22	1,31	1,10
30,0	46,58	-0,43	1,86	1,55
35,0	54,13	-5,83	2,55	2,00
Угол поворота ступицы, градусы	Момент сопротивления вращению $M_{C.B}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B/}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B//}$, Н·м	Момент сопротивления вращению $M_{C.B///}$, Н·м
40,0	63,20	-12,34	3,26	2,51
45,0	70,23	-17,24	3,84	3,09

Когда момент сопротивления препятствует вращению кривошипа в заданном для него направлении, он принимает в таблицах 3, 4 положительные значения.

Методика динамического расчета колесно-шагающего движителя, с учетом изменения угловой скорости ступицы, позволяет определить величины нагрузок при различных режимах работы ходовой системы. Результаты расчетов моментов сопротивления вращению кривошипа показали, что на зубчатые зацепления в планетарном бортовом редукторе действуют нагрузки, которые резко изменяются при смене опорных

башмаков. В дальнейшем, следует использовать полученные в данной работе результаты, чтобы определить прочность зубчатых колес бортового редуктора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер М. Г. Введение в теорию систем местность-машина. – М., «Машиностроение», 1973. – 520 с.
2. Скойбеда А. Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А. Т. Скойбеда, И. М. Комяк, В. Н. Жуковец / Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – Стр. 138–144.
3. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Выпуск 28. 2013. – С. 228–233.
4. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н., Комяк И. М., Калина А. А., Давыдов В. С. Шагающие движители – перспективное направление создания агрофильных ходовых систем мобильных машин / Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 3. – Минск, 2014. – Стр. 102 – 105.
5. Скойбеда А. Т., Калина А. А., Жуковец В. Н. Динамика и нагруженность привода колесно-шагающего движителя // «ВЕСТНИК БелГУТа: НАУКА И ТРАНСПОРТ». Научно-практический журнал № 1 (32) 2016 года. Специальный выпуск. – Гомель, 2016. – с. 289–291.
6. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Динамика колесно-шагающего движителя при переменной частоте вращения входного вала / Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 10. – Минск, 2021. – Стр. 172–176.
7. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.
8. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов. – М.: Наука, 1990.
9. Устройство тракторов / В. М. Шарипов, К. И. Городецкий, А. П. Маринкин и др.; Под общ. ред. В. М. Шарипова. – М.: МГТУ «МАМИ», 2007. – 320 с.
10. Конструкции многоцелевых гусеничных и колесных машин/ Г. И. Гладов, А. В. Вихров, С. В. Зайцев и др.; Под ред. Г. И. Гладова. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 400 с.

Поступила: 31.03.2022

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.

*«Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика
М. Ф. Решетнева», Российская Федерация*

Введение. Софус Ли [1] рассматривая дифференциальные уравнения с геометрической точки зрения, создал теорию непрерывных групп преобразований в 1870–1890 годах. Почти через 100 лет Л. В. Овсяников [2] использовал эту методику для исследования и решения дифференциальных уравнений механики сплошных сред. Основные направления этой методики были сосредоточены на построении точных решений и классификации уравнений по некоторым не фиксированным функциям и параметрам. Большой проблемой этой теории являлось то, что к построенным решениям приходилось подбирать краевые условия, чтобы эти решения описывали некоторые физические задачи. В 1918 году вышла знаменитая статья Э. Нетер [3], в которой было показано, что наличие группы симметрий влечет существование законов сохранения. Правда, это распространялось только на дифференциальные уравнения, выводимые из вариационных принципов. Развивая геометрический подход к дифференциальным уравнениям в 80-х годах прошлого столетия А. М. Виноградов [4] показал, что на самом деле законы сохранения не связаны с группами симметрий и тем более с выводимостью уравнений из вариационного принципа, это позволило по-новому взглянуть на дифференциальные уравнения. Он же, и другие исследователи, существенно расширили классы возможных симметрий, допускаемых дифференциальными уравнениями. В 1987 году одним из авторов статьи и А. М. Виноградовым была сформулирована проблема: использовать законы сохранения для решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Эта идея появилась в беседах, в которых обращалось внимание на глобальности законов сохранения, в отличие от точечных и иных симметрий. Почти 20 лет эта проблема не поддавалась решению. Затем удалось построить законы сохранения, специального вида, которые позволили решить краевые задачи для двумерных уравнений идеальной пластичности [5–8]. Это дало начало нового метода решения краевых задач в основном для систем уравнений теории пластичности, упругости и упруго – пластичности, поскольку с этими уравнениями связаны научные интересы авторов. Работа продолжается уже более 20 лет. Какие же выводы можно сделать по истечению данного периода?

1. Законы сохранения, несомненно, полезны для изучения дифференциальных уравнений. Они позволяют вывести некоторые тождества, которые помогают доказывать теоремы существования и единственности, что было замечено еще Л. В. Овсяниковым [2].

2. С помощью законов сохранения можно и нужно решать краевые задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений. При этом надо понимать, что не все законы сохранения годятся для этой цели. Как правило, для этого подходят законы сохранения, у которых сохраняющийся ток зависит от искомым функций и независимых переменных. Авторы статьи заметили, что для гиперболических уравнений достаточно только зависимости от искомым функций, а для эллиптических нужны еще и независимые переменные.

3. Сначала удавалось решать краевые задачи только для двумерных уравнений с помощью законов сохранения. Теперь получилось решить трехмерные задачи для ли-

нейных эллиптических систем упругости и системы уравнений Моисила–Теодореску. На очереди линейные гиперболические системы, но там есть проблемы с характеристическими поверхностями. Авторы надеются их преодолеть в ближайшее время.

4. Необходимо переходить к решению краевых задач для нелинейных уравнений размерности три и выше. Для этого нужны глубокие геометрические знания о дифференциальных уравнениях и их структурах. Надеемся, что прогресс здесь будет, достигнут в недалеком будущем.

Проиллюстрируем использование законов сохранения на пространственных уравнениях упругости.

Постановка задачи. Решим краевую задачу теории упругости в перемещениях с помощью законов сохранения.

Для уравнений линейной теории упругости существует много способов построения точных решений с помощью гармонических функций (см., например [9]). Для этих уравнений упругости строились и законы сохранения [10], которые, однако, не нашли практического применения. В работе показано, что краевая задача в перемещениях может быть полностью решена с помощью законов сохранения, впервые приведенных в статье, и трех гармонических функций.

Рассмотрим уравнения линейной теории упругости в пространственном случае

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + 2\mu)u_{xx}^1 + (\lambda + \mu)(u_{xy}^2 + u_{xz}^3) + \mu(u_{yy}^1 + u_{zz}^1) = 0, \\ F_2 &= (\lambda + 2\mu)u_{yy}^2 + (\lambda + \mu)(u_{xy}^1 + u_{yz}^3) + \mu(u_{xx}^2 + u_{zz}^2) = 0, \\ F_3 &= (\lambda + 2\mu)u_{zz}^3 + (\lambda + \mu)(u_{xz}^1 + u_{yz}^2) + \mu(u_{xx}^3 + u_{yy}^3) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ, μ – упругие постоянные Ламе, u^i ($i=1,2,3$) компоненты вектора деформации, индекс внизу означает производную по соответствующим переменным.

Поставим для этих уравнений следующую краевую задачу

$$u^1|_S = u_0^1(x, y, z), \quad u^2|_S = u_0^2(x, y, z), \quad u^3|_S = u_0^3(x, y, z). \quad (2)$$

Здесь S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , u_0^i ($i=1,2,3$) – некоторые заданные функции.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (1) назовем выражение вида

$$A_x + B_y + C_z = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 + \omega_3 F_3, \quad (3)$$

где A, B, C – называются компонентами сохраняющегося тока, ω_i ($i=1,2,3$) – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не равные тождественно нулю. В этой работе A, B, C, ω_i – функции, зависящие только от зависимых и независимых переменных.

Имеет место теорема.

Теорема. Система уравнений (1) допускает закон сохранения со следующими сохраняющимися токам

$$A = w^1 u_x^1 + w^2 u_x^2 + w^3 u_x^3, B = w^1 u_y^1 + w^2 u_y^2 + w^3 u_y^3, C = w^1 u_z^1 + w^2 u_z^2 + w^3 u_z^3, \quad (4)$$

где $(u^1, u^2, u^3), (w^1, w^2, w^3)$ – произвольные решения системы уравнений (1).

Замечание. Система (1) допускает и другие законы сохранения с другими сохраняющимися токами, отличными от (3). Они здесь не приведены, поскольку не дают решение задачи (1, 2). Другое определение законов сохранения и способы их вычисления можно найти в [7, 8].

Решение задачи (1), (2).

Из (4) по формуле Гаусса – Остроградского следует, что

$$\iiint_V (A_x + B_y + C_z) dx dy dz (= \iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy) = 0. \quad (5)$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) некоторая внутренняя точка области V и

$$u^1 = \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial x}{\partial x r}, u^2 = -\alpha \frac{\partial x}{\partial y r}, \quad (6)$$

$$u^3 = -\alpha \frac{\partial x}{\partial z r}, 4\alpha = \frac{1}{1-\nu}, r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2.$$

Тогда (5) есть решение системы уравнений (1) [9], ν – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим шар радиуса ε : $\varepsilon^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ описанный вокруг точки (x_0, y_0, z_0) . Тогда из (5) имеем

$$\iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = - \iint_\varepsilon A dy dz + B dz dx + C dx dy. \quad (7)$$

Сделаем в правой части равенства (6) замену по следующим формулам

$$x = x_0 + \varepsilon \cos \psi \cos \varphi, y = y_0 + \varepsilon \sin \psi \cos \varphi,$$

$$z = z_0 + \varepsilon \sin \varphi, 0 \leq \psi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (5–7) получаем

$$aw^1 = \iint_S u_0^1 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial x}{\partial x r} \right) dy dz - u_0^2 \alpha \frac{\partial x}{\partial y r} dz dx - u_0^3 \alpha \frac{\partial x}{\partial z r} dx dy. \quad (8)$$

Здесь a – постоянная.

Аналогично, если в (7) положить

$$u^1 = -\alpha \frac{\partial y}{\partial x r}, u^2 = \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial y}{\partial y r}, u^3 = \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial y}{\partial z r}.$$

То получаем

$$bw^2 = \iint_S u_0^1 \left(-\alpha \frac{\partial y}{\partial x r} \right) dydz + u_0^2 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial y}{\partial y r} \right) dzdx - u_0^3 \alpha \frac{\partial y}{\partial z r} dx dy. \quad (9)$$

Здесь b – постоянная.

Точно так же, если в (7) положить

$$u^1 = -\alpha \frac{\partial z}{\partial x r}, u^2 = -\alpha \frac{\partial z}{\partial y r}, u^3 = -\alpha \frac{\partial z}{\partial y r}.$$

То получаем

$$cw^3 = \iint_S u_0^1 \left(-\alpha \frac{\partial z}{\partial x r} \right) dydz + u_0^2 \left(-\alpha \frac{\partial z}{\partial y r} \right) dzdx + u_0^3 \left(\frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial z}{\partial z r} \right) dx dy. \quad (10)$$

Здесь c – постоянная.

Из формул (8–10) можно найти решение уравнений (1) в любой внутренней точке области V . Тем самым краевая задача (2) для системы уравнений (1) полностью решена.

Заключение. В работе построены законы сохранения специального вида для уравнений упругости в стационарном виде. Работа продолжает серию работ авторов [10–15], посвященные решению краевых задач МДТТ с помощью законов сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли. С. Теория групп преобразований. Часть 1. Москва – Ижевск, Ижевский институт компьютерных исследований., 2011. – 712 с.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978.
3. Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. Москва: Физматгиз, 1959.
4. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. Москва: Фактор, 1996.
5. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности. Доклады РАН. т. 345, 1995. с. 619–620.
6. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО РАН. – 201 с.
7. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity// Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. P. 415–439
8. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир. 1975.
9. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва: Мир. 1989.
10. Senashov S. I., Kondrin A. V., Cherepanova O. N., On elastoplastic torsion of a rod with multiply connected cross-section, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 8:3 (2015), с. 343–351

11. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Cherepanova O. N., Solution of boundary value problems of plasticity with the use of conservation laws, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 11:3 (2018), с. 356–363
12. Senashov S. I., Savostyanova I. L., Cherepanova O. N., Elastoplastic bending of the console with transverse force, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 12:5 (2019), с. 637–643.
13. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Об упругом кручении вокруг трех осей, Сиб. журн. индустр. матем., 24:1 (2021), с. 120–125
14. Gomonova O. V., Senashov S. I., Cherepanova O. N., Distribution of zones of elastic and plastic deformation appearing in a layer under compression by two rigid parallel plates, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 14:4 (2021), с. 492–496
15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J Non. Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
16. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. v.62, № 1. С. 179–186.

Поступила: 06.02.2022

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИЛАКТИДА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К МЕТОДАМ FDM-ПЕЧАТИ

Одинокова О. А., Драчев К. А.

Тихоокеанский государственный университет (г. Хабаровск), РФ

Введение. В настоящее время для получения изделий из полимерных материалов все большую популярность набирает так называемое аддитивное производство или 3D-печать. Благодаря аддитивным технологиям стало возможным получать объекты любой степени сложности и геометрии, при этом в разы сократить промежуток времени от идеи до конкретного изделия и существенно сократить трудоемкость, материалоемкость и энергоемкость, а также обеспечить экологически чистое производство. Исследовательская работа в области особенностей применения полимерных материалов в аддитивных технологиях остается весьма ограниченной и касается в основном АБС – пластика, изделия из которых используются в качестве демонстрационных образцов, а не в качестве функциональных рабочих изделий. В связи с этим исследование новых полимерных, в том числе композитных материалов, является актуальной задачей как в научном, так и в прикладном аспектах.

Основная часть. Для проведения исследований использовался 3D-принтер *Creality Ender 3 Pro* [1] (рисунок 1). Подающий механизм принтера выполнен по технологии «*Direct*», при которой материал подается напрямую в нагревательный блок, что позволяет печатать широким спектром термопластиков. Формообразование из легкоплавких материалов по методу *FDM* заключается в том, что прутковый материал в специальной камере нагревают до температуры размягчения и продавливают через печатающее сопло необходимого диаметра (в нашем случае – 0,4 мм). Печатающая головка перемещается в горизонтальной плоскости по заданной программе, нанося слои материала на предыдущие слои.



Рис. 1. 3D-принтер Creality Ender 3 Pro

Точность изготовления по такой технологии зависит от ориентирования конечного изделия в рабочем поле 3D принтера и варьируется от 0,1 до 0,3 мм. Точность по оси *Z* определяется прежде всего толщиной слоя и бывает обычно несколько ниже, чем по осям *X* и *Y*. Для достижения требуемых параметров качества поверхности, математическую модель будущего изделия ориентируют посредством программного обеспечения так, чтобы исполнительные поверхности, требующие большей чистоты, располагались вертикально (по оси *Z*), а менее значимые с точки зрения требований к качеству – горизонтально (оси *X* и *Y*).

Математическая модель образцов создавалась в системе *CAD* и записывалась в формат *STL*, после чего передавалась в программное обеспечение *Ultimaker CURA* [2], преобразующее созданную ранее трехмерную модель в управляющий машинный код (*G-code*), позволяющий принтеру изготовить деталь. Программа *CURA* ориентирует изделие, разбивает ее на горизонтальные сечения (слои) и рассчитывает пути перемещения печатающей головки. При необходимости автоматически генерируются поддерживающие конструкции для нависающих фрагментов изделия.

В качестве материала для исследования и последующего изготовления образцов использовался *PLA*-пластик (полилактид) от *Bestfilament*, являющийся биоразлагаемым, биосовместимым, термопластичным алифатическим полиэфиром, структурная единица которого – молочная кислота.

Необходимость проведения сравнительного анализа механических свойств полимерных материалов при растяжении и сжатии, особенно в области малых деформаций, ограниченных применением линейной суперпозиции, требует очень тщательной постановки эксперимента. Чтобы получить результаты требуемой точности, необходимо создать одинаковые условия при проведении механических испытаний на растяжение и сжатие. Следует отметить, что для правильного понимания явления ползучести в пластмассах испытания при сжатии не менее важны, чем при растяжении.

Для выявления физико-механических свойств термопластов на основе полилактида проведены испытания образцов на растяжение и сжатие в режимах ползучести. С этой целью использовалась установка с переключаемым реверсивным устройством, которое позволяет исследовать деформационные свойства при растяжении и сжатии на одном и том же образце в любой последовательности и без переустановок испытываемого образца и контрольно-измерительных приборов (рисунок 2).



Рис. 2. Установка для испытания на ползучесть в условиях растяжения-сжатия

Направление усилия, прикладываемого к реверсору, и направление перемещения всех движущихся элементов растяжной машины и реверсора остается без изменения как при растяжении, так и при сжатии. Таким образом, создаются совершенно идентичные условия для испытания образца в условиях осевого растяжения и сжатия. Вес нижней рамки реверсора компенсируется противовесами. Образцы для испытаний были изготовлены из полилактида со стопроцентным заполнением и различались направлением укладки слоев при печати (рисунок 3).

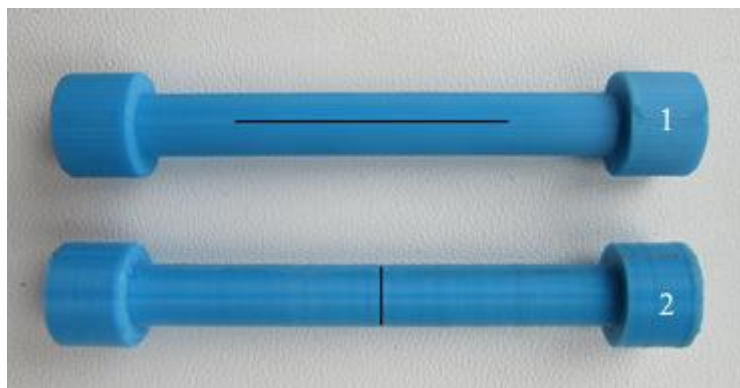


Рис. 3. Образцы для испытания на ползучесть (линия указывает на направление укладки слоев при печати образцов)

Испытаны образцы силой $F = 10$ Н в установке, содержащей реверсор специальной конструкции [3], создающий идентичные условия при испытаниях на растяжение и сжатие. Температура испытаний 20 °С. Установленный в захватах реверсора образец плавно нагружался и производился последующий отсчет величины возникающей деформации. Интервалы времени для записи удлинения должны выбираться таким образом, чтобы в процессе испытания можно было полностью установить характер изменения удлинений. В наших исследованиях были приняты следующие временные интервалы измерения деформаций в минутах: 0,25; 0,5; 1; 2; 4; 8; 16. По результатам испытаний были построены кривые ползучести в координатах «деформация ε – время t » при растяжении и сжатии (рисунок 4).

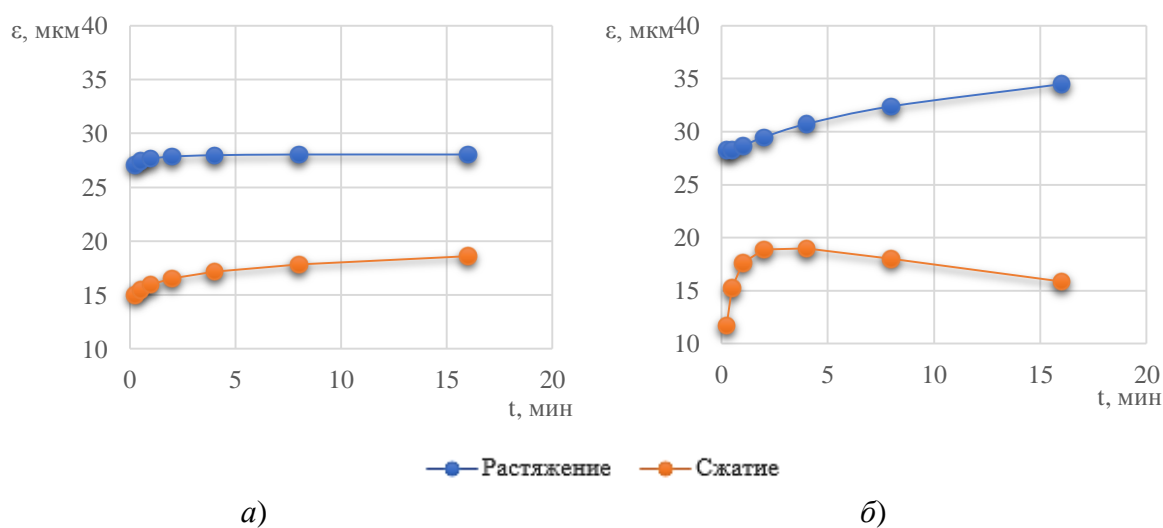


Рис. 4. Кривые ползучести: *а* – образец 1 с продольным расположением нитей; *б* – образец 2 с поперечным расположением нитей

На основе проведенных испытаний на ползучесть можно сделать следующие выводы: кривые ползучести полилактида при растяжении и сжатии носят монотонный характер; функция разномодульности как при продольной ориентации нитей, так и при поперечной вы выбранных значениях напряжения ($\sigma = 0,1$ МПа), времени ($t = 8$ мин) и температуры ($T = 293$ К) также плавно возрастают (рисунок 5). Отсутствие на кривых разномодульности обоих образцов аномальных точек (максимумов или перегибов) свидетельствует об отсутствии опасного сточки зрения прочности напряжения. При увеличении значения времени, напряжения или температуры на функции разномодульности может возникнуть точка экстремума (предельное напряжение при сжатии) или точка перегиба (предельное значение напряжения при растяжении) [4].

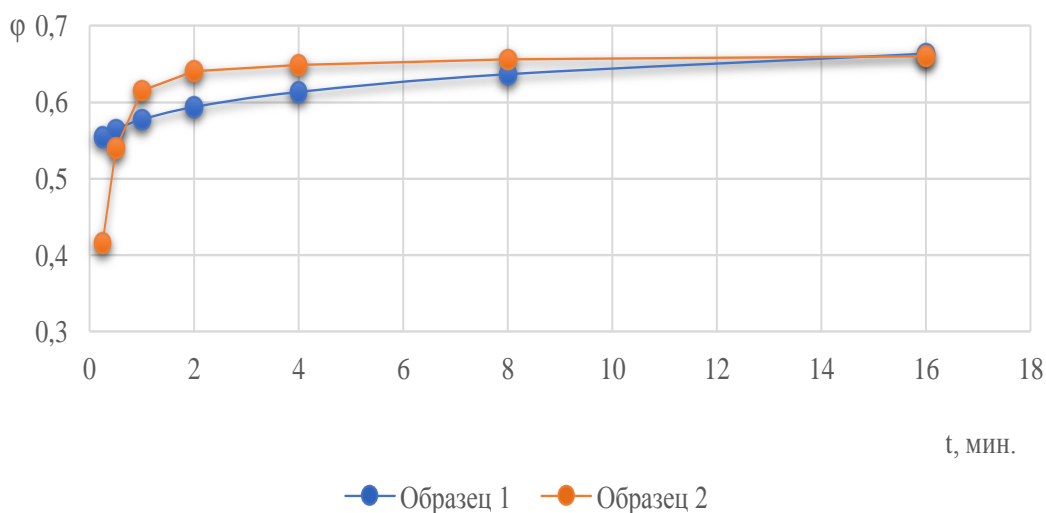


Рис. 5. Функции разномодульности: 1 – образец 1 с продольным расположением нитей; 2 – образец 2 с поперечным расположением нитей

Прочность при разрыве определяли по ГОСТ 11262-2017 «Пластмассы. Метод испытания на растяжение», прочность при сжатии по ГОСТ 4651-2014 «Пластмассы. Метод испытания на сжатие». Для проведения физико-механических испытаний были напечатаны стандартные образцы (лопатки) типа 1А по ГОСТ 11262-2017 в количестве 6 штук. Плотность заполнения (отношение заполненного пространства ко всему внутреннему объему модели) в значительной степени влияют на прочность модели, поскольку они определяют внутреннюю структуру печати. В связи с этим использовалось стопроцентное заполнение. Образцы отличались способом укладки слоев пластика относительно их продольной оси: образцы с укладкой слоев в продольном, поперечном и наклонном (под 45°) направлении (рисунок 5). В качестве разрывной машины использовали универсальную испытательную электромеханическую машину «*Shimadzu AG-X Plus*». Определение прочности проводили при скорости перемещения подвижного захвата разрывной машины 25 мм/мин.

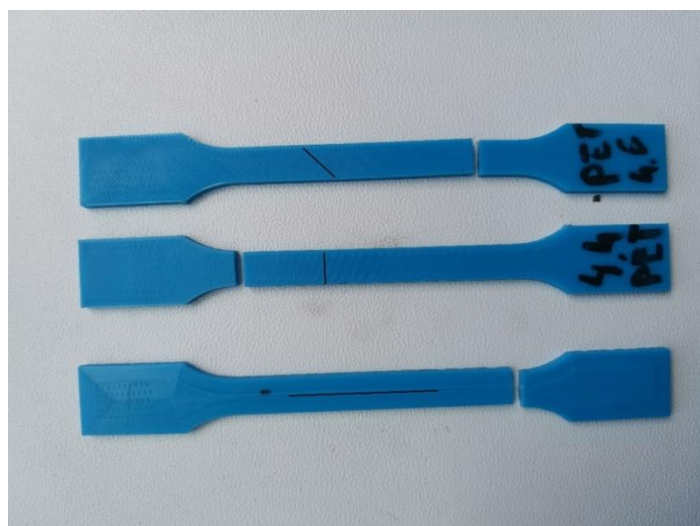


Рис. 5. Образцы после испытания на разрыв (сверху вниз: образец с наклонным расположением нитей относительно его длины, поперечном, продольном)

Результаты усредненных значений предела прочности для образца с продольным расположением нитей (слоев) составляют 56,17 МПа, для образца с поперечным расположением слоев – 58,4 МПа и для образца с наклонным расположением слоев – 63,45 МПа. Несмотря на различную ориентацию волокон образцов по отношению к направлению действия нагрузки предел прочности для всех образцов носит один и тот же характер: разрушение во всех случаях хрупкое, а разброс для σ_{np} во всех образцах составляет менее 13 %.

Для испытания на сжатие были изготовлены образцы цилиндрической формы диаметром 20 мм и длиной 30 мм. Аналогично с испытанием на растяжение, образцы имели разную укладку слоев (нитей) относительно их продольной оси. При этом и предельное напряжение при их сжатии совершенно различен для разной ориентации слоев (нитей), а также характер разрушения образцов, что видно на рисунке 6. Предел прочности для «продольного» образца составил в среднем 107,3 МПа (характер разрушения – «хрупкий»), а для «поперечного» – 82,85 МПа (характер разрушения – «пластичный»).

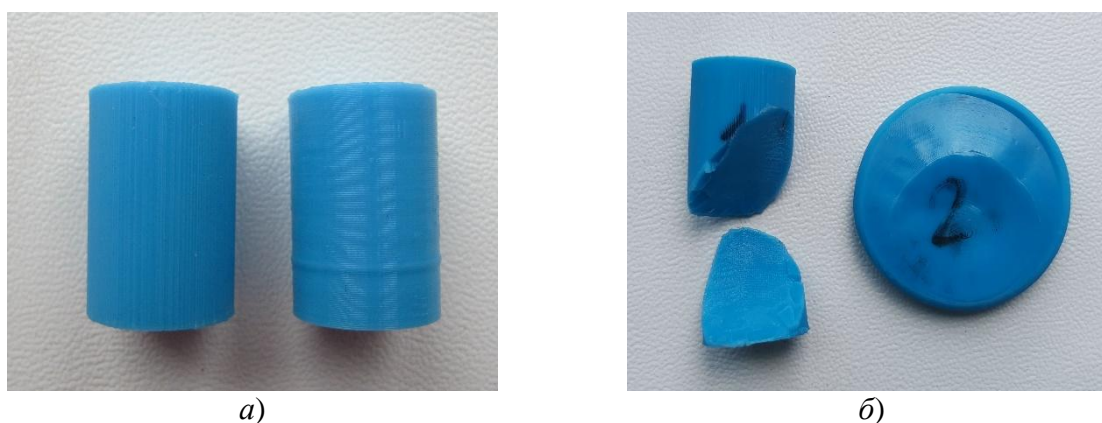


Рис. 6. Образцы для испытания на сжатие (слева образец с продольным расположением нитей относительно его длины, справа – поперечном): *a* – образцы до испытания; *б* – образцы после испытания

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод, что для безопасного использования необходимо производить исследования как прочностных, так и деформационных свойств данного материала в условиях ползучести. Кроме того, необходимо произвести испытания на старение материала под воздействием атмосферных факторов. Также следует отметить, что, несмотря на использование одного пластика при изготовлении всех образцов, готовые изделия (образцы) получились с совершенно разными физико-механическими свойствами в зависимости от ориентации образующих их волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обзор 3D-принтера CREALITY Ender 3 Pro. URL: <https://top3dshop.ru/blog/3d-printer-creality-ender-3-pro-review.html>.
2. Ultimaker Cura: Powerful, easy-to-use 3D printing software. URL: <https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura>.
3. А. с. 356511 СССР, МКИ G 01 N 3/02. Универсальный реверсор для испытаний на растяжение-сжатие / О. А. Одиноква, В. В. Одинокв, П. В. Мелентьев (СССР). 1972. Бюл. № 32. 3 с.
4. А. с. 890132 СССР, МКИ G 01 N 3/08. Способ определения характеристик ползучести образцов материалов / О. А. Одиноква, Ю. М. Даниловский (СССР). 1981. Бюл. № 46. 2 с.

Поступила: 06.02.2022

КИНЕТИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ В РЕШЕТОЧНОМ ФЛЮИДЕ С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Грода Я. Г., Ласовский Р. Н., Бильданов Э. Э.

УО «Белорусский государственный технологический университет», Минск

Введение. Процессы самоорганизации и самосборки могут проходить в широком спектре природных систем. К их числу относятся, например, растворы белковых молекул [1], глины и почвенные суспензии [2], экосистемы [3] и т. д. Общим свойством отмеченных систем является тот факт, что характер взаимодействия между их структурными элементами зависит сложным образом от расстояния. При этом имеется ввиду зависимость не только интенсивности взаимодействия, а в первую очередь характера этого взаимодействия. Отдельные структурные элементы могут притягиваться на близких расстояниях за счет, например, ван-дер-ваальсовского притяжения, а на более далеком отталкиваться за счет электростатических сил (т. н. SALR-системы, short-range attractive and long-range repulsive) [4, 5]. В случае биологических молекул отталкивание может быть также обусловлено упругими деформациями липидных мембран.

Одним из наиболее простых методов исследования общих свойств SALR-систем является рассмотрение их решеточных моделей, которые, с одной стороны, достаточно просты, что позволяет провести их детальное исследование как аналитическими методами, так и в рамках компьютерного моделирования по методу Монте-Карло, а с другой стороны, позволяют получить описание большого числа общих свойств таких систем.

В рамках решеточных моделей были исследованы равновесные свойства решеточных флюидов с притяжением ближайших и отталкиванием более далеких соседей на треугольной [6–8], квадратной [9, 10] и простой кубической решетках [11]. Для определения их термодинамических и структурных параметров было развито обобщенное квазихимическое приближение, которое продемонстрировало высокую точность получаемых с его помощью результатов. В дальнейшем было показано, что на основе информации о равновесных параметрах моделей могут быть получены адекватные оценки их транспортных характеристик [12].

В настоящей работе будет рассмотрен процесс диффузии в решеточном флюиде с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на простой кубической решетке.

Модель решеточного флюида с SALR-потенциалом. Рассматриваемая модель представляет собой решеточный флюид, состоящий из n частиц на простой кубической решетке, содержащей N решеточных узлов. Каждый из данных решеточных узлов может находиться в одном из двух состояний – быть занятым частицей либо быть вакантным. Занятие решеточного узла более чем одной частицей считается невозможным.

Частицы, занимающие ближайшие решеточные узлы и узлы, являющиеся соседями третьего порядка, взаимодействуют друг с другом. Энергии взаимодействий равны J_1 и J_3 соответственно. При этом положим, что $J_1 < 0$, а $J_3 > 0$, что соответствует притяжению ближайших соседей и отталкиванию третьих. Примем, что $J_1 = -J$ и $J_3 = J^*J$, где $J^* = 3$. При этом в силу геометрии рассматриваемой системы $z_1 = 6$ и $z_3 = 8$, где z_k – k -е координационное число, т. е. число узлов-соседей k -го порядка к каждому решеточному узлу.

Равновесные свойства описанной системы были подробно исследованы в работе [11]. В частности, было установлено, что при выбранных значениях параметра J^* и параметре взаимодействия $J/k_B T$ превышающем 0,186, где k_B – постоянная Больцмана, T – температура, в системе возникает упорядоченная фаза, представляющая собой чередование преимущественно заполненных и преимущественно вакантных решеточных слоев. Это позволяет определить указанное значение параметра взаимодействия как критическую температуру системы следующим соотношением

$$\frac{J}{k_B T_c} = 0,186. \quad (1)$$

Типичный вид возникающей упорядоченной фазы представлен на рисунке 1.

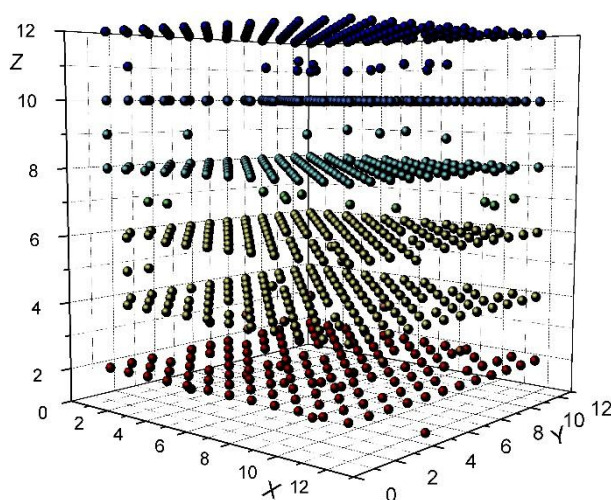


Рис. 1. Упорядоченная фаза решеточного флюида с притяжением ближайших соседей и отталкиванием третьих на простой кубической решетке при $c = 0,5$ и $J/k_B T = 0,25$

Алгоритм моделирования. Как правило, моделирование транспортных процессов в решеточном флюиде выполняется в каноническом ансамбле, т. е. при фиксированном числе частиц. Алгоритм такого моделирования для случая SALR–системы подробно описан в работе [12] применительно к модели решеточного флюида на квадратной решетке.

Несмотря на относительную геометрическую схожесть двух указанных систем, моделирование процесса миграции частиц в кубической решетке имеет ряд важных особенностей. В частности, применение описанного в [12] алгоритма моделирования диффузионного процесса в каноническом ансамбле приводит к тому, что при температурах ниже критической переход системы из произвольного начального состояния в равновесное упорядоченное состояние происходит чрезвычайно медленно. Вместе с тем вид этого упорядоченного состояния (см. рисунок 1), может оказывать существенное влияние на движение примесных частиц по решеточным узлам.

Для ускорения перехода системы в равновесное состояние может быть предложен алгоритм моделирования, сочетающий в себе моделирование системы в большом каноническом и каноническом ансамбле. В рамках данного подхода на первом этапе задается химический потенциал моделируемой системы, а число частиц в ней считается переменным и определяется в ходе симуляции. Фактически, на данном этапе производится описанное в [11] моделирование равновесных свойств исследуемой системы.

После перехода системы в равновесное состояние число частиц в ней фиксируется, после чего выполняется моделирование диффузионного процесса, протекающего в системе в соответствии с алгоритмом, описанным в работе [12]. Применение такого двухступенчатого алгоритма позволяет кардинально сократить время моделирования.

Моделируемая решетка содержит 1728 (12^3) решеточных узлов. Для устранения влияния размеров моделируемой системы на получаемые результаты используются периодические граничные условия.

Как и в случае плоских систем, величинами, непосредственно определяемыми в процессе моделирования, являются зависимости от времени среднего квадрата смещения центра масс системы частиц и среднего квадрата смещения отдельной частицы.

Аналитическая оценка кинетического коэффициента диффузии. Ранее в работе [13] была предложена общая теория транспортных процессов в решеточных системах. В частности, было установлено, что при рассмотрении модели решеточного флюида, в котором разрешены переходы частиц только в пределах первой координационной сферы, и в пренебрежении влияния эффектов памяти для оценки кинетического коэффициента диффузии может быть использовано соотношение Жданова [14]. С его помощью кинетический коэффициент диффузии исследуемой системы D_J может быть определен через коэффициент диффузии невзаимодействующего (ленгмюровского) решеточного газа D_0 и равновесные характеристики модели

$$D_J = D_0 \frac{\exp[\beta\mu]}{c} F(0;0), \quad (2)$$

где μ , c и $F(0;0)$ – равновесные значения химического потенциала, концентрации частиц и вероятности двум ближайшим решеточным узлам быть вакантными, соответственно.

В свою очередь коэффициент диффузии ленгмюровского решеточного газа не зависит от концентрации частиц и определяется простым соотношением [15]:

$$D_0 = \frac{z_1 w a^2}{2d}, \quad (3)$$

где z_1 – число ближайших соседних узлов ($z_1 = 6$); w – вероятность прыжка частицы в свободный соседний узел; a – расстояние между узлами решетки (длина прыжка частицы); d – размерность пространства ($d = 3$).

Входящие в соотношение (2) равновесные характеристики модели могут быть определены, например, в рамках квазихимического приближения (КХП) [11].

Таким образом, сочетание соотношения Жданова и квазихимического приближения дает возможность оценить кинетический коэффициент диффузии, а полученные с его помощью результаты будут сопоставлены с результатами прямого моделирования диффузионных процессов в решеточных системах.

Кинетический коэффициент диффузии. Проведенное моделирование показало, что зависимости от времени измеренного в шагах МК–алгоритма среднего квадрата смещения центра масс системы частиц и среднего квадрата смещения отдельной частицы являются с высокой степенью точности линейными. Соответственно их аппроксимация аналитической линейной функцией позволяет определить кинетический коэффициент диффузии и коэффициент самодиффузии. Зависимость кинетического коэффициента диффузии от концентрации примесных частиц представлены на рисунке 2.

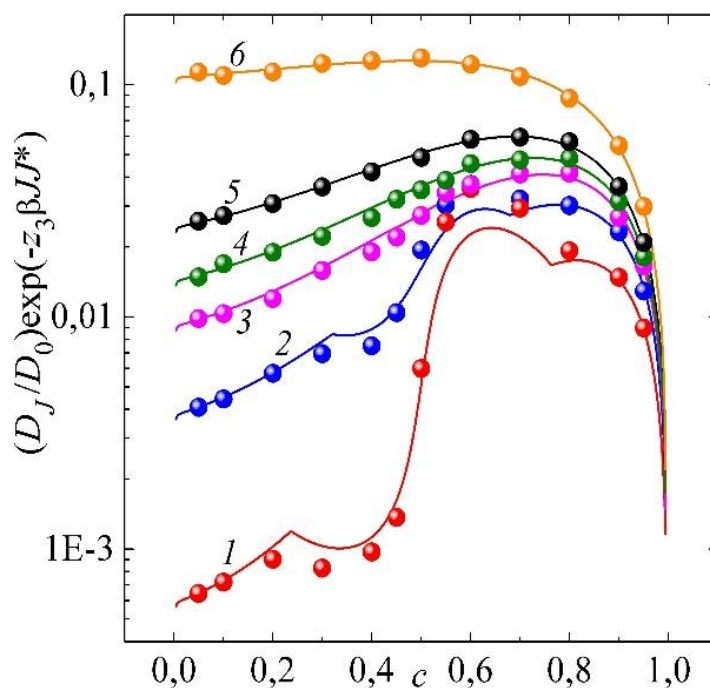


Рис. 2. Зависимость от концентрации кинетического коэффициента диффузии решеточного флюида на простой кубической решетке при $\beta J = 0,31$ (кривая 1); 0,2325 (2); 0,1958 (3); 0,1771 (4); 0,155 (5) и 0,093 (6). Линиями представлены результаты аналитических расчетов, точками – данные моделирования

На рисунке 2 также проводится сопоставление данных моделирования с результатами аналитических оценок кинетического коэффициента диффузии в соответствии с соотношением Жданова (2) в сочетании с обобщенным квазихимическим приближением, использованным для определения равновесных характеристик системы.

Проведенное сопоставление результатов показало, что, как и в случае решеточного флюида на квадратной решетке, соотношение Жданова позволят получать адекватные оценки для кинетического коэффициента диффузии во всей области изменения термодинамических параметров за исключением области существования в системе упорядоченной фазы.

Также анализ полученных зависимостей выявил одну важную особенность диффузионных характеристик пространственной системы, которая отсутствует у ее двумерного аналога: при концентрациях примесных частиц равных 0,6 и 0,7 величины коэффициентов диффузии, определенные при моделировании для температур $0,6T_c$, $0,8T_c$, $0,95T_c$ и $1,05T_c$, являются очень близкими друг к другу. Указанное обстоятельство позволяет ожидать, что зависимость коэффициентов диффузии от обратной температуры будет отличаться от линейной.

Энергия активации кинетической диффузии. На рисунке 3 представлена зависимость логарифма кинетического коэффициента диффузии от обратной температуры. В качестве примера на рисунке представлены данные, соответствующие концентрации примесных частиц равной 0,1, 0,3, 0,5 и 0,8.

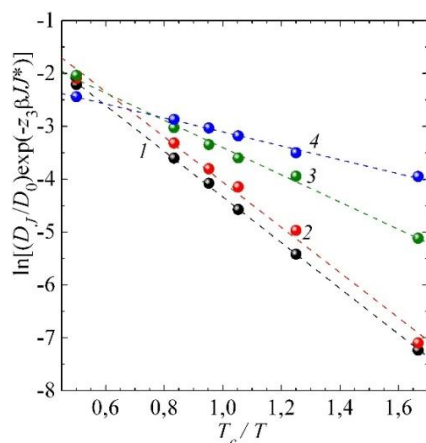


Рис. 3. Зависимость от обратной температуры кинетического коэффициента диффузии решеточного флюида при $c = 0,1$ (кривая 1); $0,3$ (2); $0,5$ (3) и $0,8$ (4). Точками представлены результаты МК-моделирования, пунктирными линиями – результаты их линейной аппроксимации

Для всех представленных вариантов, а также для концентраций $0,05$, $0,2$, $0,4$, $0,9$ и $0,95$, данная зависимость является практически строго линейной. Последнее обстоятельство позволяет легко определить энергию активации кинетической диффузии с помощью линейной аппроксимации данных моделирования. Полученная описанным образом зависимость энергии активации от концентрации примесных частиц представлена на рисунке 4. В то же время зависимость логарифма кинетического коэффициента диффузии от обратной температуры при концентрациях $0,6$ и $0,7$ имеет ярко выраженный нелинейный характер.

Полученный результат может быть интерпретирован как зависимость от температуры энергии активации, которая имеет место при указанных концентрациях примесных частиц. При этом анализ данных моделирования показывает, что при температурах ниже критической энергия активации становится значительно ниже, чем при высоких температурах.

Указанное поведение энергии активации обусловлено характером упорядоченной фазы, которая образуется в рассматриваемой решеточной системе. Как отмечалось выше, данная упорядоченная фаза представляет собой чередование заполненных и вакантных решеточных слоев.

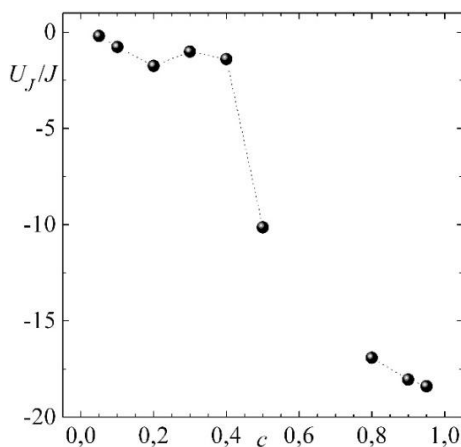


Рис. 4. Зависимость энергии активации кинетической диффузии от концентрации

Поскольку рассматриваемые концентрации превышают 0,5, то преимущественно заполненные решеточные слои заполнены практически полностью. В то же время между такими слоями находится заметное количество примесных частиц, которые не могут быть размещены на них. Каждая из этих частиц имеет около 8 соседей третьего порядка, находящихся выше и ниже ее. При этом взаимодействие между соседями третьего порядка имеет в рамках выбранной модели характер отталкивания, т. е. приводит к снижению энергетического барьера, который необходимо преодолеть частице для перехода в соседний узел в преимущественно вакантном слое. Это проявляется в снижении эффективной энергии активации и повышении кинетического коэффициента диффузии, которое можно видеть на рисунке 2.

Заключение. Выполненное моделирование диффузионных процессов в системах с конкурирующими взаимодействиями показывает, что транспортные свойства решеточного флюида с SALR-потенциалом межчастичного взаимодействия в целом соответствуют свойствам решеточного флюида с отталкиванием ближайших соседей. Наиболее характерной их особенностью является резкое падение коэффициента диффузии при температурах ниже критической в области средних концентраций, т. е. в той области термодинамических параметров, где система находится в макроскопически упорядоченной фазе.

В данной упорядоченной фазе при концентрации ниже 0,5, частицы преимущественно заполненных подрешеток фактически не имеют соседей третьего порядка и имеют по два ближайших соседа каждая. Характер межчастичных взаимодействий приводит к тому, что при этом расположении частиц потенциальный барьер, который должна преодолеть частица, является максимально высоким, что и приводит к снижению коэффициентов диффузии.

Вместе с этим необходимо учитывать, что после прыжка частица из преимущественно заполненной подрешетки попадает в преимущественно вакантную, где приобретает, в случае флюида на простой кубической решетке, 8 соседей третьего порядка. Вследствие отталкивания между частицами-соседями третьего порядка ($J_3 > 0$) она в течение короткого времени возвращается на свое предыдущее место, и в результате никакого перераспределения плотности не происходит. Но иногда рассматриваемая частица после первого прыжка все же вынуждает совершить прыжок одну из соседних частиц, который и приводит к диффузионному процессу. Таким образом, результирующий прыжок оказывается обусловленным предысторией, и эффекты памяти проявляются в диффузионном процессе.

Именно влияние эффектов памяти на диффузионный процесс и приводит к тому, что соотношение Жданова (2) демонстрирует отклонение от данных моделирования при определении кинетического коэффициента диффузии.

Исследования выполнены при грантовой поддержке Министерства образования Беларуси, научной программы Евросоюза HORIZON-2020 (проект AMD-734276-CONIN).

ЛИТЕРАТУРА

1. Equilibrium cluster formation in concentrated protein solutions and colloids / A. Stradner [et al.] // Nature. – 2004. – Vol 432. – P. 492–495.
2. Quick clay and landslides of clayey soils / A. Khaldoun [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – art. no. 188301 (4 p.).
3. Meyra, A. G. Self-organization of plants in a dryland ecosystem: Symmetry breaking and critical cluster size / A. G. Meyra, G. J. Zarragoicoechea, V. A. Kuz // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 91. – art. no. 052810 (8 p.).

4. Model colloidal fluid with competing interactions: Bulk and interfacial properties / A. J. Archer [et al.] // *J. Chem. Phys.* – 2007. – Vol. 126. – art. no. 014104 (14 p.).
5. Enhanced density fluctuations in fluid systems with competing interactions / D. Pini [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 2000. – Vol. 327. – P. 209–215.
6. Pekalski, J. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. I. Ground state, mean-field phase diagram and structure of the disordered phases / J. Pekalski, A. Ciach, N. G. Almarza // *J. Chem. Phys.* – 2014. Vol. 140. – art. no. 114701 (11 p.).
7. Almarza, N. G. Periodic ordering of clusters and stripes in a two-dimensional lattice model. II. Results of Monte Carlo simulation / N. G. Almarza, J. Pekalski, A. Ciach // *J. Chem. Phys.* – 2014. – Vol. 140. – art. no. 164708 (12 p.).
8. Грода, Я. Г., Гришина В. С., Цях А., Вихренко В. С. Фазовая диаграмма решеточного флюида с SRLA-потенциалом на плоской треугольной решетке / Я. Г. Грода, В. С. Гришина, А. Цях, В. С. Вихренко // *Журнал БГУ. Физика.* – 2019. – № 3. – С. 81–91.
9. Groda, Ya. G., Vikhrenko V. S., di Caprio D. Equilibrium properties of the lattice system with SALR interaction potential on a square lattice: quasi-chemical approximation versus Monte Carlo simulation / Ya. G. Groda, V. S. Vikhrenko, D. di Caprio // *Cond. Matt. Phys.* – 2018. – Vol. 21, no. 4. – art. no. 43002 (10 p.).
10. Groda, Ya.G. The lattice fluid with the competing interactions on the square lattice / Ya.G. Groda, A. Ciach // *Nonlinear Dynamics and Applications* – 2020. – Vol. 26. – P. 76–88.
11. Грода, Я. Г. Решеточный флюид с притяжением ближайших и отталкиванием третьих соседей на простой кубической решетке / Я. Г. Грода, В. С. Вихренко, Д. ди Каприо // *Журнал БГУ. Физика.* – 2019. – № 2. – С. 84–95.
12. Грода, Я. Г. Транспортные свойства решеточного флюида с SALR-потенциалом на плоской квадратной решетке / Я. Г. Грода, Р. Н. Ласовский // *Журнал БГУ. Физика.* – 2020. – в печати.
13. Statistical-mechanical description of diffusion in interacting lattice gases / G. S. Bokun [et al.] // *Physica A.* – 2001. – Vol. 296, no. 1–2. – P. 83–105.
14. Zhdanov, V. P. General Equation for description of surface diffusion in the framework of the lattice gas model / V. P. Zhdanov // *Surf. Sci.* – 1985. – vol. 149. – L13–L17.
15. Kutner R. Chemical diffusion in the lattice gas of non-interacting particles // *Phys. Lett. A.* – 1981. – Vol. 81, no. 4. – P. 239–240.

Поступила: 19.01.2022

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ Л. ПРАНДТЛЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ФЛАНЦУ, ЗАНИМАЮЩЕМУ ОБЛАСТЬ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

¹Сосенушкин Е. Н., ¹Кадымов В. А., ¹Яновская Е. А., ²Архипов А. А.

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Московский государственный технологический университет «СТАНКИИ», Москва, РФ

²Публичное акционерное общество «Научно-производственное объединение «АЛМАЗ» имени академика А. А. Расплетина» – Территориально обособленное подразделение «Лианозовский электромеханический завод», РФ

Введение. Развитие математического аппарата механики деформируемого твердого тела направлено на получение определяющих соотношений и зависимостей в аналитическом виде для оценки давлений на контактных поверхностях, силовых и деформационных параметров, а также скоростей течения материальных точек анализируемых объектов с многосвязным контуром [1]. Читателю предлагается уточненная расчетная схема поковки фланца [2] (рисунок 1) без особых точек.

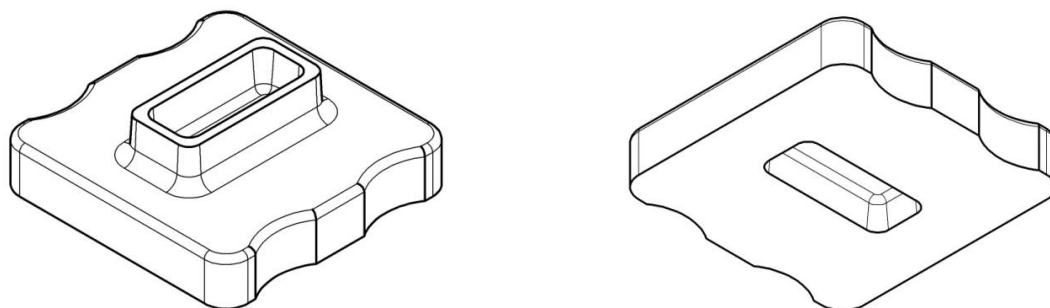


Рис. 1. Проекция фланца для соединения волноводов

Технологией изготовления подобных изделий традиционно является штамповка в холодном, полугорячем [2] и горячем [3, 4] состояниях в зависимости от механических характеристик материала фланца [5] и необходимой степени деформации при формоизменении.

Оценка энергосиловых параметров при деформировании сложных поволоков проводится с помощью компьютерного 3D моделирования [6], либо одним из методов приближенного расчета теории пластичности [7–9].

При производстве некруглых поволоков, имеющих ребра [10], необходимо учитывать эффект затекания металла в пазы штампа, формирующие тело ребер. Для анализа силовых и кинематических параметров исследуемого технологического процесса предлагается использовать осредненную по толщине теорию течения пластического слоя, представленного моделью «идеальной жидкости», в изложении А. А. Ильюшина [9]. Расчетную схему иллюстрирует рисунок 2, а математическая постановка задачи приведена ниже.

Постановка и решение краевой задачи. Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в многосвязной области $S(x, y)$, которая объединяет следующие подобласти:

$$S(x, y) = \cup_{i=1}^2 S_{ij}(x, y). \quad (1)$$

Уравнения краевой задачи (2–4) запишем в полярной системе координат в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\rho}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\varphi}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\rho \partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что компонента вектора скорости $v_\varphi \equiv 0$ во всей подобласти S_{13} . Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке $(a - r_1, b - r_1)$, где h_1 – толщина внешней подобласти, $\bar{v} = \bar{v}(\rho, \varphi)$, $\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h_1(t)}\right)$ – степень деформации по А. А. Ильюшину, которая после дифференцирования по времени примет вид:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt}. \quad (5)$$

Решение найдено для подобластей пластического течения расчетной схемы (см. рисунок 2, а) [1]. Однако подобласть S_{13} имеет другую схематизацию течения (рисунок 2, б), в которой отсутствуют особые точки с неоднозначностью решения.

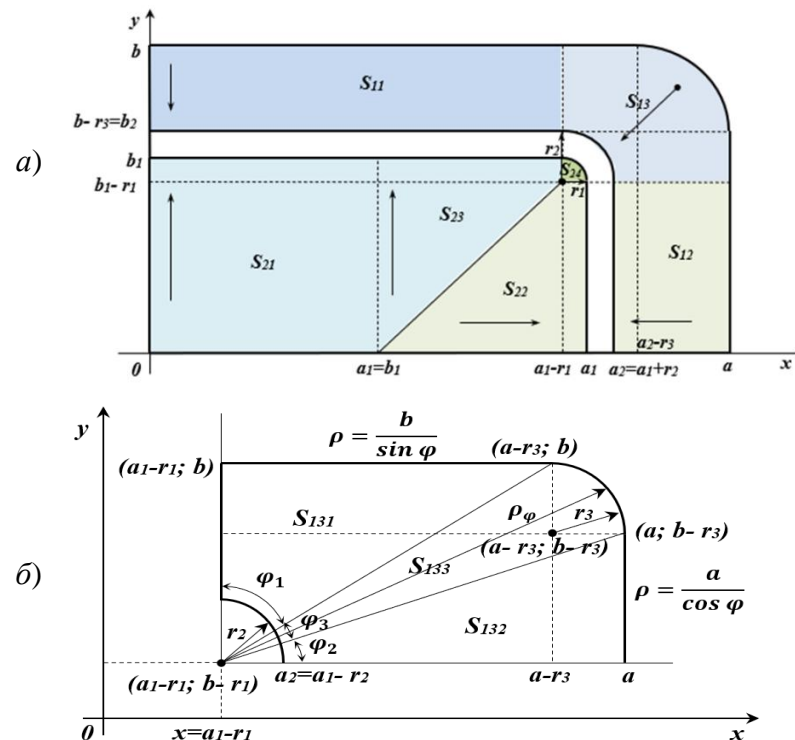


Рис. 2. Расчетная схема: а – участки поковки в I квадранте; б – разбиение подобласти S_{13}

Рассмотрим один из кинематически возможных вариантов течения пластического слоя в подобласти $S_{13} = \cup_{k=1}^3 S_{13k}$, разбив ее на три участка S_{131} , S_{132} , S_{133} . (см. рисунок 2, б). Границы участков представим неравенствами (6–8):

$$S_{131} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin\varphi} \\ \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b-r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$S_{132} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$S_{133} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \\ \arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b-r_1} \end{array} \right. \quad (8)$$

Вид функции ρ_φ определим отдельно. Для этого опишем границу участка S_{133} , представленную четвертью окружности радиуса r_3 с центром в точке $(a-r_3, b-r_1)$. Уравнение окружности в декартовой системе координат

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Подставим новые переменные в уравнение окружности и приведем его к виду:

$$\begin{aligned} (\rho \cos\varphi - (a-r_3))^2 + (\rho \sin\varphi - (b-r_3))^2 &= r_3^2, \\ \rho^2 - 2\rho(a-r_3)\cos\varphi + (a-r_3)^2 - 2\rho(b-r_3)\sin\varphi + (b-r_3)^2 - r_3^2 &= 0, \\ \rho^2 - 2\rho((a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi) + ((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнение искомой границы в полярной системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= (a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi + \\ &+ \sqrt{((a-r_3)\cos\varphi + (b-r_3)\sin\varphi)^2 - ((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В задаче принято условие полной пластичности на том основании, что касательное напряжение в слое $\tau_{\rho\varphi}$ мало по сравнению с нормальными напряжениями и им можно пренебречь, причем два нормальных напряжения в поперечном (вертикальном) сечении в начальном приближении можно считать равными $\sigma_\rho \approx \sigma_\varphi = -q$. Третье нормальное напряжение постоянно по толщине слоя, численно равно контактному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности.

Перейдем к рассмотрению участка S_{133} с границами (8).

В качестве граничных условий на участке согласно расчетной схеме (см. рисунок 2, б) примем

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_\varphi, & v_\rho &= 0, \\ \rho &= r_2, & p &= 2\tau_s,\end{aligned}$$

подстановка которых в уравнения (2) и (3) исходной системы, приводит их к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0.$$

Решив эту систему и вычислив постоянную интегрирования, найдем давление на контактной поверхности участка:

$$p_{133} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2).$$

Из условия несжимаемости (4) получим радиальную компоненту вектора скорости течения

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{\rho_\varphi^2}{\rho} - \rho \right).$$

Силу деформирования, приходящуюся на участок S_{133} , найдем двойным интегрированием вычисленного контактного давления:

$$\begin{aligned}P_{S_{133}} &= \iint_{S_{133}} p_{S_{133}} \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} d\varphi \int_{r_2}^{\rho_\varphi} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2) \right) \rho \, d\rho = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \rho^3 + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \rho^2 \right) \Big|_{r_2}^{\rho_\varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (\rho_\varphi^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (\rho_\varphi^3 - r_2^3) \right) d\varphi.\end{aligned}$$

Для дальнейшего интегрирования проанализируем функцию ρ_φ (9), которая содержит различные нелинейные комбинации тригонометрических функций. Проанализируем значения функции ρ_φ^2 и ρ_φ^3 , где $\alpha_2(\varphi)$ и $\alpha_3(\varphi)$ – бесконечно малые функции более высокого порядка.

$$\begin{aligned}\rho_\varphi^2 &= 4((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right) + \\ &+ 2((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2) + \alpha_2(\varphi),\end{aligned}$$

и

$$\rho_{\varphi}^3 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{(a-r_3)^2 + (b-r_3)^2} \sin \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right) \right)^3 - 2\sqrt{2}((a-r_3)^2 + (b-r_3)^2 - r_3^2)^3 + \alpha_3(\varphi).$$

В выражениях для ρ_{φ}^2 и ρ_{φ}^3 заменим значения $\sin \left(\varphi + \operatorname{arctg} \frac{(a-r_3)}{(b-r_3)} \right)$ единицей. Эта замена возможна, так как значение аргумента приближается к $\frac{\pi}{2}$. Тогда выражение

$$P_{S_{133}} = \int_{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\operatorname{arctg} \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a-r_3)^2 + 2(b-r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a-r_3)^3 + (b-r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right) d\varphi.$$

для вычисления силы деформирования на участке S_{133} примет следующий вид

После интегрирования и подстановки пределов интегрирования получаем приближенное значение для силы деформирования на данном участке:

$$P_{S_{133}} = \left(\operatorname{arctg} \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1} - \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} \right) \cdot \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a-r_3)^2 + 2(b-r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a-r_3)^3 + (b-r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right). \quad (10)$$

Полученный результат может быть использован для инженерных расчетов силовых параметров при деформировании поковок, имеющих участки, ограниченные дугами окружностей. В частных случаях при малых радиусах закругления угловых элементов рассматриваемый участок может вырождаться в линию раздела течения.

Вывод. Получены уточненные соотношения для оценки силовых и кинематических параметров при деформировании участка S_{133} , который не содержит особых точек, при затекании металла в ребра, расположенные по контуру прямоугольного отверстия в поковке, с закруглениями в местах сопряжения ребер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосенушкин Е. Н., Кадымов, В. А., Яновская, Е. А., Архипов, А. А., Гуреева, Т. В., Гусев, Д. С. Математическое моделирование затекания пластически деформируемого слоя в ребра / Е. Н. Сосенушкин [и др.] // Теоретическая и прикладная механика [Электронный ресурс]: международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет; редкол.: А. В. Чигарев (пред. редкол.). – Минск: БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 184–189.

2. Сосенушкин Е. Н., Яновская Е. А., Архипов А. А. Математическое моделирование штамповки прямоугольного фланца с выдавливанием выступа // Вестник МГТУ «Станкин» №4 (51), 2019. С. 65–70.

3. Сосенушкин Е. Н. Разработка ресурсосберегающей технологии производства фланцевых поковок на универсальном оборудовании / Е. Н. Сосенушкин В. В. Белокопытов // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №3(11). – С.35–41.
4. Каплунов Б. Г. Патент №2352431 РФ Способ штамповки поковок фланцев воротниковых / Б. Г. Каплунов, В. М. Тяжелников, С. П. Зуев и др. ООО НПО «Интеграл». 10.10.2008.
5. Механические свойства легких сплавов при температурах и скоростях обработки давлением: Справ. издание. / П. Г. Микляев. – М.: Металлургия, 1994. – 288 с.
6. Бильчук М. В. Автоматизация этапов проектирования процессов закрытой горячей штамповки фланцевых поковок / М. В. Бильчук Е. Н. Сосенушкин Теория, моделирование, эксперимент [Монография]. М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2021. – 118 с.
7. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов/ В. А. Голенков С. П. Яковлев С. А. Головин и др. – М.: Машиностроение, 2013. – 442 с.
8. Воронцов А. Л. Теория штамповки выдавливанием / А. Л. Воронцов – М.: Машиностроение – 1, 2004. 721 с.
9. Ильюшин А. А. Труды (1946 – 1966). Т.2. Пластичность/ А. А. Ильюшин – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
10. Соломонов К. Н. Методика построения линии раздела течения металла для кусочно-линейного контура / К. Н. Соломонов, Н. И. Федоринин, Л. И. Тищук // Механическое оборудование металлургических заводов. 2016. № 1 (6). – С. 68–74.
11. Kadymov V. A. Modeling of the stamping process of box-type forging / V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya/ In the collection: Materials science, shape-generating technologies and equipment 2020. 2020. – P. 11002.
12. Кийко И. А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями / И. А. Кийко // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 1. – С. 15-26.

Поступила: 24.01.2022

ДИСКРЕТНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗГРУЗКИ ШАХТНОГО ПОДЪЕМНОГО СОСУДА

Николайчик М. А., Матиевская А. В.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Метод дискретных элементов (DEM – Discrete Element Method) является обобщением метода конечных элементов (FEM – Finite Element Method). Распространение метода дискретных элементов на решение разнообразных задач, встречающихся в горно-металлургической промышленности, связано с развитием вычислительной техники и появлением соответствующего программного обеспечения. Метод позволяет моделировать поведение большого количества частиц сыпучего вещества в процессе выполнения различных промышленных операций, в том числе в рамках эксплуатации горных объектов. Так например, работа [1] описывает процесс выгрузки горных пород с помощью метода дискретных элементов. Работы [2–4] посвящены калибровке параметров дискретно-элементного моделирования с целью достижения соответствия модели реальному поведению материалу.

В данной статье рассматривается задача моделирования разгрузки скипа – подъемного, саморазгружающегося короба, служащего для подъема сыпучих и мелкокусковых грузов, движущийся с помощью канатов по направляющим приспособлениям скипового подъемника.

Твердотельная модель скипов. В рамках исследования рассматривались 2 конструкции подъемных сосудов. В первом варианте (I) рассматривается скип в одним углом наклона бункера величиной в 35° . Во втором варианте (II) рассматриваются 2 угла наклона бункера составляющих соответственно 35° и 45° . Схемы конструкций моделируемых скипов приведены на рисунке 1.

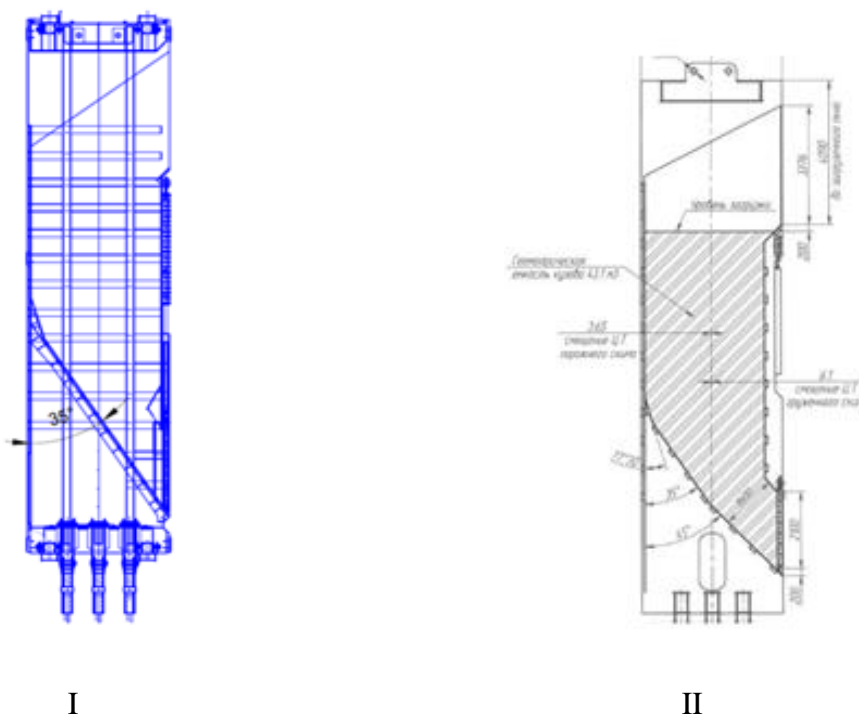


Рис. 1. Схемы конструкций скипов

Моделирование частиц руды. Поскольку руда не однородна по размеру частиц, при моделировании использовались частицы с характерными размерами в диапазоне от 0,2 м до 0,35 м. Также для приближения к реально транспортируемой скипами руде использовались частицы в виде многогранников. Геометрические параметры частиц представлены в таблице 1 [4]

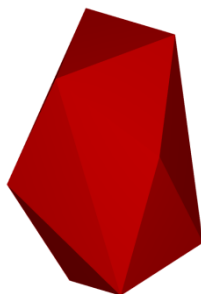


Рис. 2. Модель характерной частицы

Таблица 1 – Геометрические параметры частиц

Размер частиц	0,2–0,35 м
Количество углов многогранника	10
Коэффициент сопротивления качению	0,15

При загрузке скипа было использовано 4673 частиц для I типа и 3910 частиц для II типа.

Математические модели взаимодействия частиц. При моделировании взаимодействия частиц со скипом, а также частиц между собой использовались следующие модели взаимодействия [5]:

А. Модель нормальных сил: Hertzian Spring Dashpot.

Нормальная контактная сила в этой модели состоит из линейной упругой силы отталкивания и демпфирующей силы. Упругая часть основана на классической контактной теории, разработанной Герцем [6]:

$$F_n = \hat{K}_H s_n^{\frac{3}{2}} + \hat{C}_H s_n^{\frac{1}{2}} \dot{s}_n.$$

Жесткость контакта определяется как

$$K = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*}.$$

Эффективный модуль Юнга (E_1 и E_2 – модули Юнга двух контактирующих тел):

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Эффективный эквивалентный радиус (L_1 и L_2 – размеры двух контактирующих частиц, L – размер частицы при контакте частица-граница).

$$\frac{1}{R^*} = \begin{cases} \frac{2}{L_1} + \frac{2}{L_2}, & \text{для контакта частица-частица} \\ \frac{2}{L}, & \text{для контакта частица-граница} \end{cases}$$

Нормальный коэффициент демпфирования:

$$\hat{C}_H = 2\eta_H \sqrt{m^* \hat{K}_H},$$

$$\eta_H = \frac{\sqrt{5}}{2} \eta,$$

где η – коэффициент затухания, безразмерный параметр, значение которого, связанных с коэффициентом реституции (отношение конечной относительной скорости к начальной).

В. Модель касательных сил: Linear Spring Coulomb Limit.

В данной модели касательная сила контакта находится следующим образом:

$$F_{\tau,e}^t = F_{\tau}^{t-\Delta t} - K_{\tau} \Delta s_{\tau},$$

где $F_{\tau}^{t-\Delta t}$ – касательная сила в предыдущий момент времени, Δs_{τ} – касательное относительное смещение частиц за временной шаг, $K_{\tau} = r_k K_{nl}$ – касательная жесткость, r_k – вводимый параметр Tangential Stiffness Ratio.

С. Модель адгезии: Constant Adhesion.

Сила адгезии выражается следующим образом:

$$F_{n,adh} = \begin{cases} 0, & \text{если } -s_n \geq \delta_{adh} \\ f_{adh} g \min(m1, m2), & \text{если } -s_n < \delta_{adh} \end{cases}$$

где δ_{adh} – расстояние, на котором начинает действовать адгезия, f_{adh} – отношение силы адгезии к силе тяжести, s_n – ширина контакта, g – ускорение свободного падения.

D. Модель сопротивления качению: Linear Spring Rolling Limit [7]

Модель включает вязкое демпфирование для сопротивления качению. Касательная жесткость определяется как

$$K_r = R_r^2 K_{\tau}.$$

Радиус вращения:

$$\frac{1}{R_{\kappa}} = \begin{cases} \frac{2}{|r_1|} + \frac{2}{|r_2|}, & \text{для контакта частица-частица} \\ \frac{2}{|r|}, & \text{для контакта частица-граница} \end{cases}$$

Момент сопротивления вращению частиц в данной модели находится по формуле:

$$M_r^t = \min(|M_{\tau,e}^t|, M_{r,\text{lim}}) \frac{M_{\tau,e}^t}{|M_{\tau,e}^t|},$$

где $M_{r,\text{lim}}$ – предельный момент сопротивления вращению, $M_{r,\text{lim}} = \mu_r R_r F_n$.

Физико-механические свойства и параметры взаимодействия. В качестве примера транспортируемой руды рассмотрим сильвинит, добываемый на Старобинском месторождении калийных солей. Материал скипа – сталь 245. Физико-механические свойства скипа и транспортируемой руды приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Физико-механические свойства

	Скип	Сильвинит
Плотность, кг/м ³	7800	2200
Модуль Юнга, ГПа	210	2
Коэффициент Пуассона	0,3	0,26

Для описанных выше математических моделей, примененных при решении задачи, и выбранных материалах были приняты следующие параметры контактного взаимодействия, приведенные в таблице 3.

Таблица 3 – Параметры контактного взаимодействия

	Частица-частица	Частица-граница
Коэффициент трения покоя	1	0,4
Коэффициент трения скольжения	0,95	0,35
Расстояние действия адгезии, м	0,002	0,002
Коэффициент восстановления	0,15	0,15

Результаты моделирования. При проведении расчетов в качестве установочного параметра был использован коэффициент отношения силы адгезии к силе тяжести (k_1 – для взаимодействия частицы-скип, k_2 – для взаимодействия частицы-частицы). Варьирование данного коэффициента имитировало различные варианты последствий движе-

ния скипа с ускорением и, как следствие, консолидацию частиц транспортируемого груза. Время выгрузки для различных вариантов отношения силы адгезии к силе тяжести между частицами и частицами и скипом представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Время выгрузки в зависимости от отношения силы адгезии к силе тяжести

	I тип, сек	II тип, сек
$k_1 = 2, k_2 = 0,5$	10,4	13,4
$k_1 = 1,8, k_2 = 0,45$	8,4	12,2
$k_1 = 1,6, k_2 = 0,4$	7,5	11,5
$k_1 = 1,5, k_2 = 0,3$	7,3	10,9
$k_1 = 1,3, k_2 = 0,3$	7	10,4

Ниже представлены графики выгрузки для различных скипов при разных отношениях силы адгезии к силе тяжести при взаимодействии частиц со скипом и между друг другом за период времени 70 секунд.

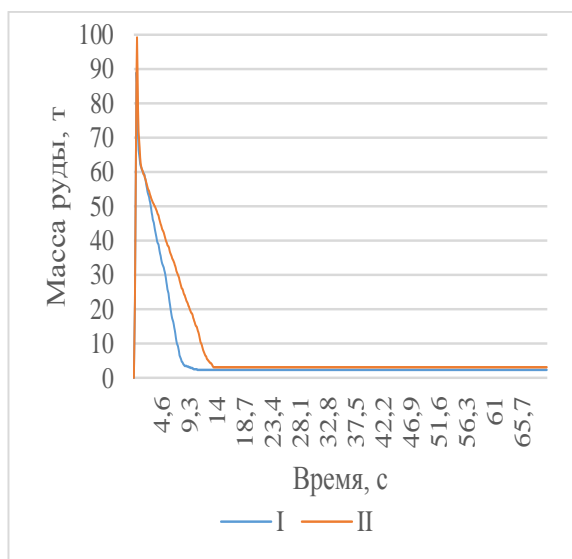


Рис. 3. График выгрузки руды при $k_1 = 2$, $k_2 = 0,5$

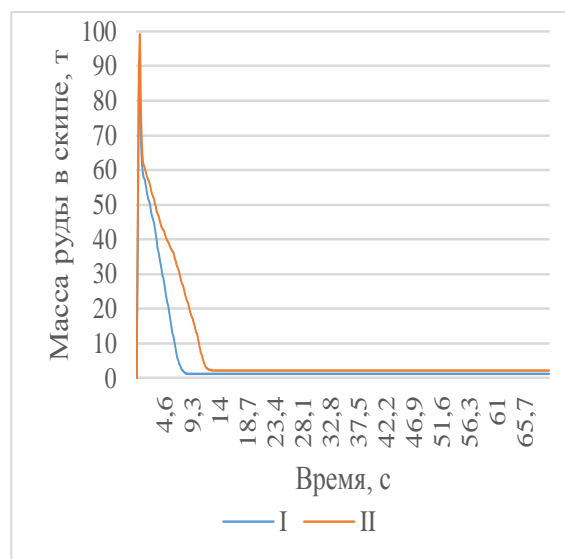


Рис. 4. График выгрузки руды при $k_1 = 1,8$, $k_2 = 0,45$

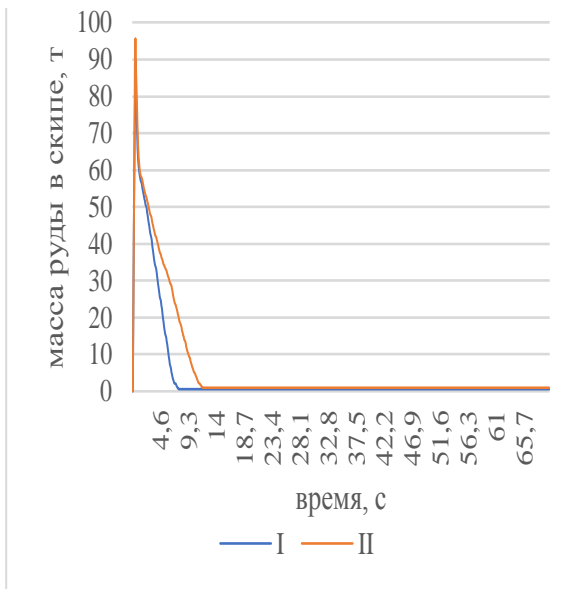


Рис. 5. График выгрузки руды при $k_1 = 1,6$, $k_2 = 0,4$

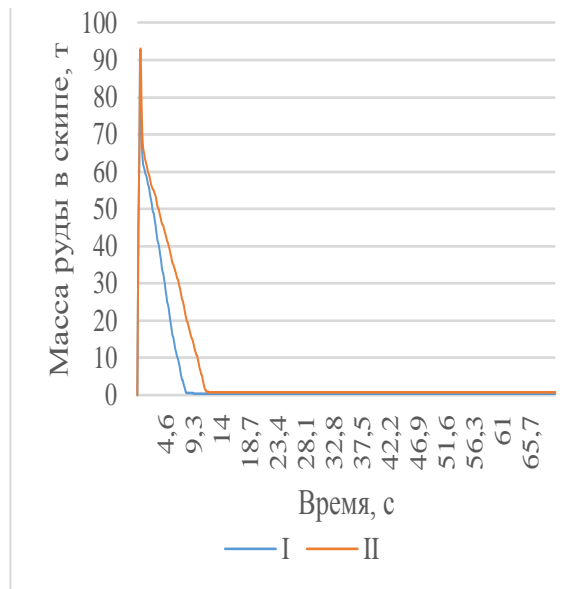


Рис. 6. График выгрузки руды при $k_1 = 1,5$, $k_2 = 0,3$

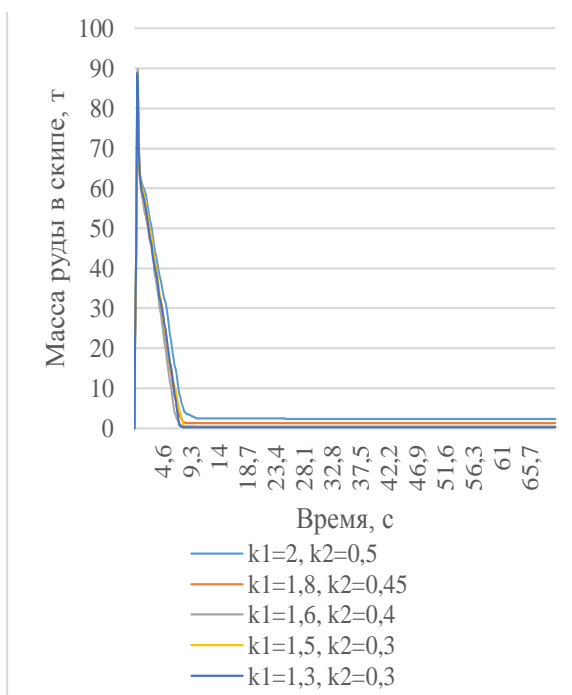


Рис. 7. Графики выгрузки руды из скипа типа I при различных k_1 и k_2

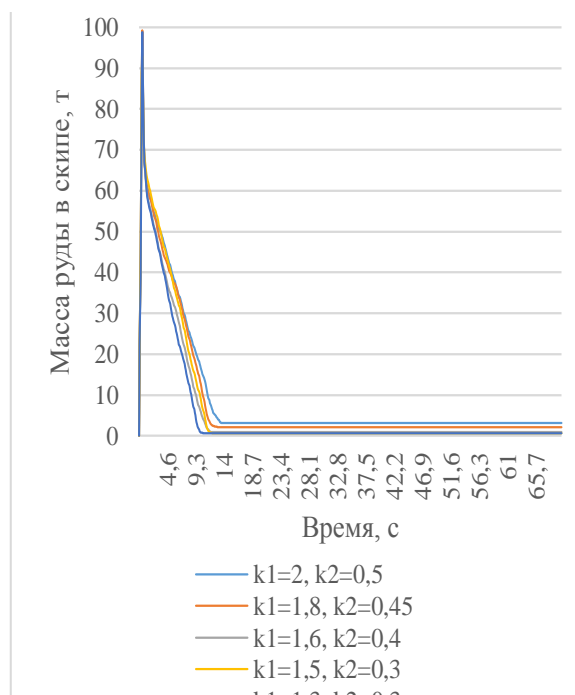


Рис. 8. Графики выгрузки руды из скипа типа II при различных k_1 и k_2

Таблица 5 – Масса частиц, оставшихся в бункере после окончания разгрузки

	I		II	
	Масса, кг	Отношение к первоначальной массе, %	Масса, кг	Отношение к первоначальной массе, %
$k_1 = 2,$ $k_2 = 0,5$	2372,572	2,766	3130,750	3,156
$k_1 = 1,8,$ $k_2 = 0,45$	1270,61	1,481	2145,545	2,163
$k_1 = 1,6,$ $k_2 = 0,4$	466,1	0,543	972,046	0,980
$k_1 = 1,5,$ $k_2 = 0,3$	443,675	0,517	657,36	0,662
$k_1 = 1,3,$ $k_2 = 0,3$	177,36	0,206	610	0,615

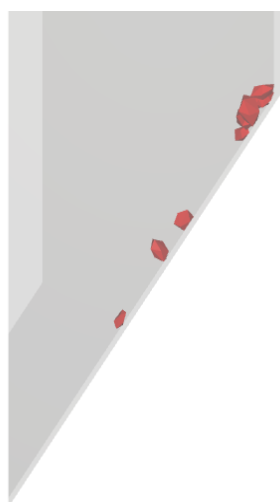


Рис. 10. Результат слеживания для сипа I типа при $k_1 = 1,5$, $k_2 = 0,3$

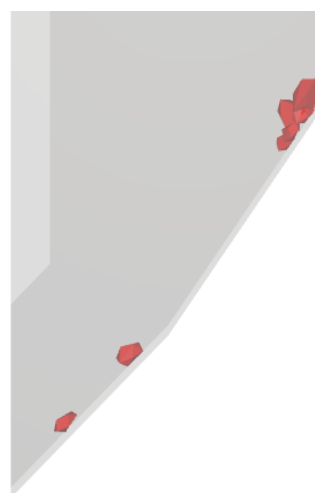


Рис. 11. Результат слеживания для сипа II типа при $k_1 = 1,5$, $k_2 = 0,3$

Сравнение результатов показанных на рисунках 3–9, а также приведенных в таблице 5 показывают, что сип I типа имеет более оптимальные эксплуатационные свойства в сравнении со сипом II типа с точки зрения времени разгрузки и слежавшейся массы руды.

Заключение. В рамках проведенного исследования разработаны твердотельные модели различных конструкций сипов. Построена дискретно-элементная модель транспортируемой руды. В соответствии с фактическими свойствами груза и сипа определены физико-механические свойства материалов и параметры контактного взаимодействия. Произведена оценка скорости разгрузки различных конструкций сипов и величин массы полезного груза, которая остается в сипе после разгрузки.

Разработанная методика позволяет выбрать оптимальную конструкцию шахтного скипа с точки зрения времени разгрузки и минимизации эффектов слеживания транспортируемого груза. Также, приведенный в статье подход может быть использован при исследовании процессов движения и взаимодействия частиц как в горнодобывающей отрасли, так и в других сферах промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laptev, V.. (2019). Numerical modelling of fragmented mined rock flow during ore drawing using the ROCKY DEM programm. Vestnik MGTU.
2. Dominik Müller, Eric Fimbinger, Clemens Brand. Algorithm for the determination of the angle of repose in bulk material analysis. Powder Technology 383 (2021) 598–605 .
3. Thomas Roessler, André Katterfeld. DEM parameter calibration of cohesive bulk materials using a simple angle of repose test. Particuology 45 (2019) 105–115.
4. Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, P. Zulli. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. Powder Technology 125 (2002) 45–54.
5. DEM Technical Manual, ESSS (2021).
6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
7. Ai. J. Chen J. F. Rotter, J. M. and Ooi J. Y. (2010). Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations. Powder Technology, 206:269–282.

Поступила: 30.01.2022

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ КОЛЕЦ

¹Кафтайкина Е. Н., ²Докукова Н. А.

¹Иностранное общество с ограниченной ответственностью «Плэйтика Бел», Минск
²Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Упругие кольцевые и цилиндрические винтовые устройства используются во многих отраслях промышленности. В машино- и авиастроении, как элементы способные удерживать предельные нагрузки оболочечных конструкций [1, 2]. В строительстве энергетических объектов, как элементы, подкрепляющие крупные цилиндрические резервуары термоядерных установок. В связи с этим возникает необходимость создания точных методов расчета и вывода аналитических формул для последующих исследований на прочность и жесткость отдельных узлов и инженерных сооружений в целом [1–16].

Основная часть. Рассматривается бесконечно малый элемент кругового кольца ds , находящийся в сложном нагрузочном режиме на рисунке 1. Для его равновесия следует привести к соответствующим осям все действующие на него силы и моменты.

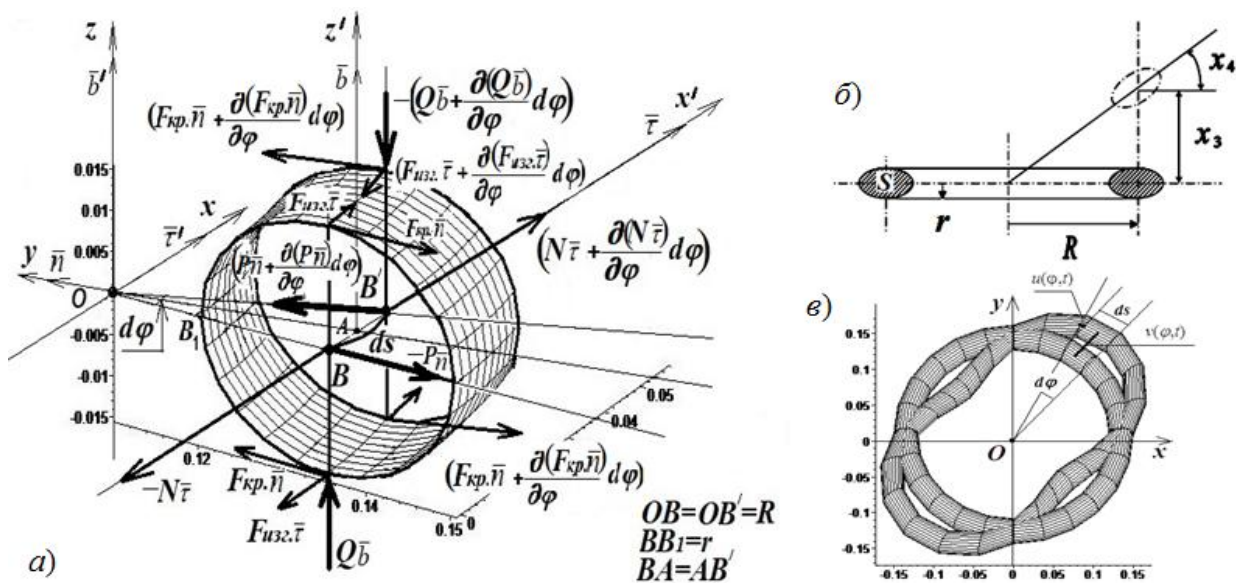


Рис. 1. Элемент кругового кольца ds на a , смещение $x_3(\varphi, t)$ центра тяжести сечения из срединной плоскости кольца и угол поворота сечения $x_4(\varphi, t)$ на b , радиальное смещение элемента ds кольца $v(\varphi, t)$ и продольное – $u(\varphi, t)$ на $в$

Момент от перерезывающего поперечное сечение S усилия $\bar{Q} = Q_b \cdot \bar{b}$, представленного на рисунке 2, a , в естественной системе координат имеет вид $(0; 0; Q_b)$ и определяется следующим образом:

$$\overline{M}_Q = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_b \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + \frac{ds}{2} Q_b \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (1)$$

Здесь и далее положим, что модуль $|\overline{Q}|$ равен $Q = Q_b$. Тогда момент в проекциях на оси естественного трехгранника будет таким:

$$\overline{M}_Q = \left(0; \frac{RQ_b}{2} d\varphi; 0 \right). \quad (2)$$

Для усилия $\overline{Q}' = -\left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{b}$, показанного на рисунке 2, б, определяются его проекции на координатные оси $\overline{Q}' = \left(0; 0; -\left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$. Вычисляется момент

$$\overline{M}'_Q = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + \frac{ds}{2} \left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (3)$$

Этот вектор-момент записывается в стандартном виде

$$\overline{M}'_Q = \left(0; \frac{R}{2} \left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi; 0 \right). \quad (4)$$

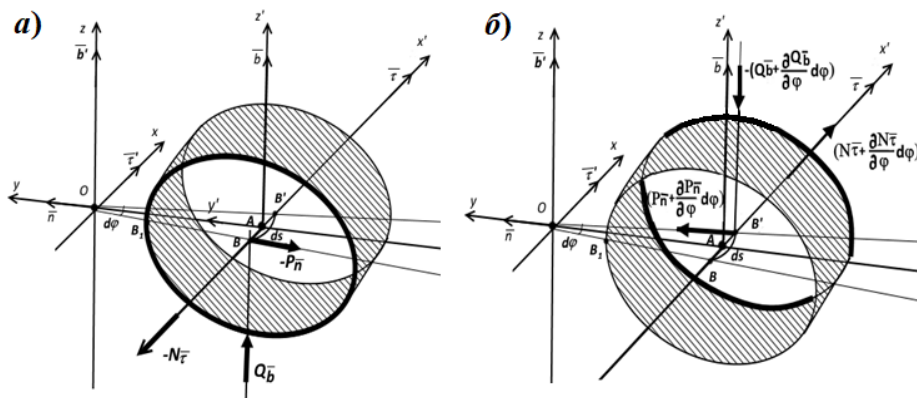


Рис. 2. Элемент ds кольца с перерезывающими силами \overline{N} , \overline{P} , \overline{Q} в сечении S и их приращения с противоположной стороны

Определяются осевые моменты от усилий \bar{P} и \bar{P}' благодаря относительно неподвижному центру начала координат – точке O , рисунок 2, а. Для этого находятся радиусы-векторы точки B из начала координат $O \tau n'$ $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; -R; 0\right)$ и до точки B'

$$\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; -R; 0\right);$$

$$\bar{M}_P = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & -R & 0 \\ 0 & -P_n & 0 \end{vmatrix} = \bar{\tau}(0) - \bar{n}(0) + \bar{b} \left(-\frac{ds}{2}\right) (-P_n) = \frac{ds}{2} P_n \bar{b}; \quad (5)$$

$$\bar{M}_P = \left(0; 0; \frac{RP_n}{2} d\varphi\right). \quad (6)$$

Сила $\bar{P}' = \left(P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) \bar{n}$ в координатной форме такова: $\left(0; P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi; 0\right)$, рисунок 2, б. Ее момент равен

$$\bar{M}'_P = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & -R & 0 \\ 0 & P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} - 0 \cdot \bar{n} + \frac{ds}{2} \left(P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) \cdot \bar{b}. \quad (7)$$

При этом координатный вид представляется следующим образом:

$$\bar{M}'_P = \left(0; 0; \left(\frac{1}{2} P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi\right) R d\varphi\right). \quad (8)$$

Аналогичные вычисления осуществляются для растягивающих среднюю линию кольца сил \bar{N} и \bar{N}' . Момент силы \bar{N} относительно начала координат точки O будет таким:

$$\bar{M}_N = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & -R & 0 \\ -N_\tau & 0 & 0 \end{vmatrix} = -R \cdot N_\tau \bar{b}, \quad (9)$$

или в общем виде

$$\bar{M}_N = (0; 0; -RN_\tau). \quad (10)$$

Для сопряженной ей силы $\bar{N}' = \left(N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{\tau}$ определяются проекции на оси естественного трехгранника $\bar{N}' = \left(N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi; 0; 0 \right)$. Аналогично предыдущим математическим операциям вычисляется ее момент

$$\bar{M}'_N = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & -R & 0 \\ N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{\tau} + 0 \cdot \bar{n} + R \left(N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{b}. \quad (11)$$

В каноническом виде он представим следующим образом:

$$\bar{M}'_N = \left(0; 0; R \left(N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right). \quad (12)$$

На основании полученных расчетных данных моментов и схемы сил на рисунке 1 составляются соответствующие уравнения равновесия.

Записывается сумма проекций сил на ось $A\tau$:

$$m_0 R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

где m_0 – масса единицы длины кольца, $m_0 = \rho F$; ρ – плотность материала; F – площадь поперечного сечения S кольца.

Записывается сумма проекций сил на ось An :

$$m_0 \omega^2 R = \frac{\partial P_n}{\partial s}. \quad (14)$$

В этой формуле нормальное ускорение элемента ds с элементарной массой m_0 будет равно $\omega^2 R = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, поэтому справедливо равенство

$$m_0 R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial P_n}{\partial \varphi}. \quad (15)$$

Записывается сумма проекций сил на ось Ab :

$$m_0 R \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} \right) = - \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi}, \quad (16)$$

где $r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$ – касательная составляющая окружной доли ускорения, $\frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$ – угловое ускорение. Последнее равенство проекций сил на ось Ab позволяет определить производную касательной силы Q_b , которая связана с инерцией подвижности бесконечно малого элемента ds вдоль оси \bar{b} и поворотом его относительно оси $\bar{\tau}$.

Записываются суммы моментов на оси $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b}' , полученные ранее. Моменты относительно оси $A\tau$:

$$M_{изг} - \frac{\partial M_{кр}}{\partial \varphi} = 0. \quad (17)$$

Моменты относительно оси An :

$$-\frac{\partial M_{изг}}{\partial \varphi} d\varphi - M_{кр} d\varphi + \frac{d\varphi}{2} R Q_b + \frac{d\varphi}{2} R \left(Q_b + \frac{\partial Q_b}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0. \quad (18)$$

Если пренебречь бесконечно малыми величинами порядка выше, чем $d\varphi$, получим окончательно

$$\frac{\partial M_{изг}}{\partial \varphi} + M_{кр} - R Q_b = 0. \quad (19)$$

Моменты относительно оси Ab' :

$$\frac{R P_n}{2} d\varphi + \frac{R}{2} \left(P_n + \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\varphi - R N_\tau + R \left(N_\tau + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0. \quad (20)$$

Упрощая последнее выражение, получается уравнение равновесия вида:

$$P_n + \frac{\partial N_\tau}{\partial \varphi} = 0. \quad (21)$$

Решая совместно равенства (13), (15) и (21), получается дифференциальное уравнение в частных производных для поперечных удлинений $v(\varphi, t)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Из известного условия растягивающей силы $N_\tau = EF \frac{\partial u}{\partial s}$ и формулы равновесия (13) получается уравнение для определения продольных удлинений $u(\varphi, t)$ средней линии балки в направлении оси $\bar{\tau}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{EF}{m_0 R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (23)$$

На основании общих зависимостей изгибающих и крутящих моментов, приведенных в [1, 2, 8, 14], связанных с перемещениями $x_3(\varphi, t)$ и поворотами $x_4(\varphi, t)$

$$M_{изг} = \frac{EJ_1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + x_4 \right), \quad (24)$$

$$M_{кр} = \frac{GJ_k}{R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} \right), \quad (25)$$

выводятся общие уравнения равновесия относительно перечисленных переменных. Подстановкой формул (24) и (25) в (17), получается дифференциальное уравнение в частных производных относительно двух искомых величин $x_3(\varphi, t)$ и $x_4(\varphi, t)$

$$-\frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - \frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} - \frac{EJ_1}{R} x_4 = 0, \quad (26)$$

которое делением на $\left(-\frac{EJ_1}{R}\right)$ принимает свой канонический вид, полностью совпадающий с известными в научной литературе [1]

$$\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + x_4 = 0. \quad (27)$$

Для полного завершения разрешающей системы уравнений следует добавить еще одно, основанное на равенстве моментов из формулы (19). Тогда заимствуя динамическое условие (16), связывающее инерцию поворота бесконечно малого элемента ds относительно своей оси, и свойств (24), (25), получается необходимое вспомогательное уравнение, связывающее основные искомые параметры для их однозначного определения,

$$\frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} + \frac{EJ_1}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - \frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + m_0 R^2 \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Если последнее уравнение разделить на $\frac{EJ_1}{R}$, то получается уравнение, соответствующее своему каноническому представлению [1] без учета инерции поворота в формуле (16) – дополнительного слагаемого $m_0 R r \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2}$,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} = 0. \quad (29)$$

Выводы. Система уравнений, состоящая из формул (27) и (29), описывает динамические смещения точек $x_3(\varphi, t)$ и закручивания на углы $x_4(\varphi, t)$ поперечных сечений S кольца, которые впоследствии могут быть использованы для вывода всех его деформированных состояний. Независимая система уравнений (22) и (23) позволяет определить радиальное $v(\varphi, t)$ и продольное $u(\varphi, t)$ смещения элемента ds кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
2. Бидерман В. Л. Поперечные колебания пружин// Расчеты на прочность. – М., 1962. – Вып.8. – С.256–270.
3. Dokukova N. A. and Konon P. N. General laws governing in mechanical vibratory systems / JEPT, 2006. – V. 79. – N. 4. – P. 824–831.
4. Докукова Н. А., Мартыненко М. Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук, 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
5. Мартыненко М. Д., Докукова Н. А., Бойко Л. И. О колебательных процессах в механических системах / Инженерно-физический журнал, 1999. – Т. 72 (3). – С. 491–494.
6. Dokukova N. A., Konon P. N. Equivalence of the Impedance Method and the Method of Amplitude- Frequency Characteristics for Investigations of Vibrations in Hydraulically Powered Supports / Journal of engineering physics and thermophysics, 2003/11. – V. 76 (6). – P. 1401–1404.
7. Dokukova N. A., Konon P. N. Generalities of passive vibration dampers isolating vibrations / Journal of engineering physics and thermophysics, 2006/3. – V. 79 (2). – P. 412–417.
8. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование динамического деформируемого состояния упругой цилиндрической пружины// Scientific collection «Interconf», № 89. IV ISPC «Current issues and prospects for the development of scientific research», 7–8 December, 2021. Orleans, France. – 14 с.
9. Докукова Н. А., Конон П. Н. Исследование двух физических моделей вязкой среды в задаче гидромеханической виброизоляции// Scientific collection «Interconf», № 93. III ISPC «Scientific trends and trends in the context of globalization», 21–22 December, 2021. Umeå, Sweden. – 15 с.
10. Высоцкий М. С., Докукова Н. А., Конон П. Н. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2006. – Т. 50. – С. 114–119.
11. Dokukova N. A., P. N. Konon, and Kaftaikina E. N. Nonnatural vibrations of hydraulic shock-absorbers / Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – V. 81 (6). – 2008. – P. 1191–1196.
12. Dokukova N. A., M. D. Martynenko, and E. N. Kaftaikina / Nonlinear vibrations of hydraulic // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – V. 81 (6). – 2008. – P. 1197–1200.
13. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Zenkovich V. V./ General patterns of improper vibrations of dynamical systems with arbitrary number of degrees of freedom// Proceedings of scientific progress – 2011: Proceedings of the 7th International Scientific Conference, Sofia. – 2011. – V. 9. – P. 56 – 64.

14. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N. Dynamics problem research of the longitudinal-radial oscillations of the ring / Образование и наука XXI века –2012: Материали за 8 – а международна научна практична конференция, «Образованието и науката на XXI век». – 2012. Том.– Т. 43. – С. 6 – 12.

15. Kaftaikina E. N., Dokukova N. A., Zenkovich V. V., Konon P. N. General characteristic equation of dynamic multielement system / Математика. Дифференциальные уравнения. – 2015

16. Dokukova N. A., Kaftaikina E. N., Konon P. N. One method for solving the dynamics of bending and twisting of the ring / Математика. – 2015/4/29.

Поступила: 31.03.2022

ПОСТРОЕНИЕ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ПРОФИЛЕЙ ЗУБЬЕВ НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС В ПРИВОДЕ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Разработанный в БНТУ образец колесно-шагающего движителя использует комбинированный способ движения, сочетающий перешагивание (за счет поворота штанг и кривошипов) и качение (за счет прокатывания опорных башмаков) [1, 2]. Конструктивные особенности этого движителя позволяют перешагивать препятствия (камни, бревна, уступы, узкие рвы). Данное преимущество позволяет применять колесно-шагающий движитель в мобильных машинах сельскохозяйственного и лесопромышленного назначения [3, 4].

Тем не менее, одним из недостатков этого движителя, является неравномерность скорости перемещения, даже при установившемся режиме движения по плоской поверхности. Для решения данной проблемы, можно обеспечить периодическое изменение угловой скорости ступицы, что требует применения некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя [5–8]. Опираясь на результаты указанных работ, следует реализовать очередной этап: построение эвольвентных профилей зубьев данных колес согласно методам вычислений, описанных в работах [6–8]. Применение данной конструкции зубчатого зацепления в приводе движителя позволит значительно повысить равномерность скорости движения. Одним из ожидаемых недостатков конструкции будет неравномерность распределения нагрузки между различными зубьями [7, 8].

Вертикальное положение оси ступицы движителя и аналог скорости движителя по горизонтали выражаются соответственно формулами [9]:

$$Y_{01} = a - b + c = \text{const}; \quad (1)$$

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (2)$$

Значения основных размеров: $a = 0,1$ м – расстояние между осями вращения ступицы и кривошипов, $b = 0,05$ м – длина кривошипа, $c = 0,2365$ м – длина стойки башмака, φ – угол поворота ступицы движителя при значениях в радианах: $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ [9].

Для обеспечения постоянной скорости перемещения движителя, зубчатое зацепление между шестерней приводного вала и колесом водила должно обеспечивать следующее переменное передаточное отношение [6, 8]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{u \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)}{Y_{01}}. \quad (3)$$

Здесь рассматривается установившееся движение КШД, когда частота вращения приводного вала $\omega = \text{const}$. Приведенный коэффициент передаточного отношения $u = \text{const}$ при любом режиме движения. Тогда частота вращения водила:

$$\omega_H = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{u \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right)}.$$

Для значений угловой скорости $\omega = const$, вертикальной координаты оси ступицы $Y_{01} = const$, приведенного коэффициента передаточного отношения $u = const$, получим линейную скорость перемещения $v = const$. Следовательно, постоянная скорость транспортного средства на установившемся режиме выражается формулой:

$$v = \omega_H \cdot \left(\frac{dX_{01}}{d\varphi} \right) = \frac{\omega \cdot Y_{01}}{u}. \quad (4)$$

При этом в проектируемой передаче, несмотря на переменное передаточное отношение, за один полный оборот ведомого колеса будут совершаться четыре полных оборота шестерни приводного вала. Уравнения начальных линий проектируемых некруглых зубчатых колес определяются из следующих условий [6, 8]:

$$\frac{\omega}{\omega_H} = \frac{r_H}{r}; \quad (5)$$

$$r + r_H = L = const. \quad (6)$$

Зависимость между углом поворота φ колеса водила и углом поворота θ шестерни приводного вала [6]:

$$\theta = \frac{\pi \cdot (4 \cdot (a - b + c) \cdot \varphi + 6 \cdot b \cdot \sin 2\varphi)}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b}. \quad (7)$$

Выражения для вычисления радиус-векторов [6]:

$$r_H = \frac{L \cdot 4 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 4 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}; \quad (8)$$

$$r = \frac{L \cdot ((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b)}{((a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b) + 4 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}. \quad (9)$$

По формуле (8) строится в полярных координатах начальная линия колеса водила, как функция вида $r_H = f(\varphi)$. Начальная линия шестерни приводного вала описывается функцией $r = f(\theta)$, для чего следует преобразовать формулу (9), используя выражение (7), из вида $r = f(\varphi)$ к виду $r = f(\theta)$. Из-за сложности формулы (7), более целесообразно для значений обобщенной координаты φ вычислять по формулам (7, 9) значения $\theta = f(\varphi)$ и $r = f(\varphi)$, заносить их в таблицу, ставить между собой в соответствие как $r = f(\theta)$. В итоге будут получены изображения начальных линий, приведенные на рисунке 1.

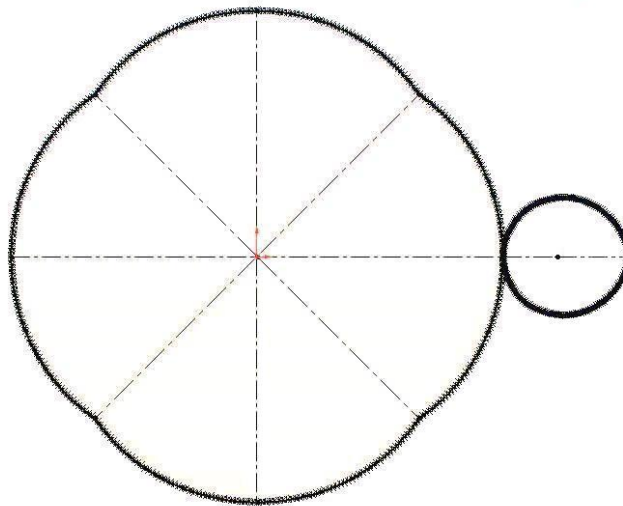


Рис. 1. Начальные линии зубчатого зацепления

Выражение (10) описывает теоретический закон изменения передаточного отношения в виде гладкой непрерывной функции. В реальном зубчатом зацеплении передаточное отношение будет изменяться дискретно, поэтому $U(\varphi)$ будет кусочной функцией, приближенно соответствующей выражению (10). Используя формулы (7–9) для теоретических начальных линий, далее следует приступить к профилированию зубчатых венцов.

Осуществим разбиение проектируемых некруглых зубчатых колес на условные сектора, каждый из которых будет представлять собой часть круглого зубчатого колеса с одним зубом. У каждого сектора свое значение радиуса начальной окружности и свое значение углового интервала разворачивания дуги. При этом у всех секторов должны быть равные длины дуг соответствующих участков начальных окружностей. Начнем разбиение на сектора с ведомого зубчатого колеса. Так как это колесо ранее уже было условно разделено на четыре больших сектора, при разбиении на более мелкие сектора будем рассматривать один большой сектор для значений угла поворота ведомого колеса: $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Далее выполним расчеты дуг начальных линий ведущей шестерни и ведомого колеса согласно методике, приведенной в работах [6, 7]. Исходные данные: межосевое расстояние $L=125$ мм, $a=100$ мм, $b=50$ мм, $c=236,5$ мм, число зубьев шестерни приводного вала $z=20$, число зубьев колеса водила $z_H=80$. Зубчатое колесо водила условно делится на 4 одинаковых сектора по 20 зубьев каждый. Таким образом, получим число секторов разбиения $i=20$. Значения в радианах угла поворота ведомого колеса: $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$, угол поворота ведущей шестерни принимает значения в радианах в интервале: $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Значения углов φ_i , θ_i , угловых интервалов $\Delta\varphi_i$, $\Delta\theta_i$ используются при расчетах в радианах, а в таблицу 1 заносятся также и в градусах, значения r_{Hi} и r_i используются при расчетах и заносятся в таблицу 1 в миллиметрах.

Таблица 1 – Параметры разбиения начальных линий зубчатого зацепления

i	φ_i , рад	Φ_i , градусы	$\Delta\varphi_i$, рад	$\Delta\Phi_i$, градусы	r_{Hi} , мм	θ_i , рад	Θ_i , градусы	$\Delta\theta_i$, рад	$\Delta\Theta_i$, градусы	r_i , мм
1	-0,7854	-45,00	0,0827	4,74	94,73	-3,1416	-180,00	0,2588	14,83	30,27
2	-0,7027	-40,26	0,0812	4,65	96,48	-2,8828	-165,17	0,2747	15,74	28,52
3	-0,6215	-35,61	0,0800	4,58	97,96	-2,6081	-149,43	0,2897	16,60	27,04
4	-0,5415	-31,03	0,0790	4,53	99,19	-2,3184	-132,83	0,3035	17,39	25,81
5	-0,4625	-26,50	0,0782	4,48	100,20	-2,0149	-115,44	0,3159	18,10	24,80
6	-0,3843	-22,02	0,0776	4,44	101,00	-1,6990	-97,35	0,3265	18,71	24,00
7	-0,3068	-17,58	0,0771	4,42	101,63	-1,3725	-78,64	0,3353	19,21	23,37
8	-0,2297	-13,16	0,0767	4,40	102,09	-1,0373	-59,43	0,3420	19,59	22,91
9	-0,1529	-8,76	0,0765	4,38	102,39	-0,6953	-39,84	0,3465	19,85	22,61
10	-0,0764	-4,38	0,0764	4,38	102,54	-0,3488	-19,98	0,3488	19,98	22,46
11	0,0000	0,00	0,0764	4,38	102,54	0,0000	0,00	0,3488	19,98	22,46
12	0,0764	4,38	0,0765	4,38	102,39	0,3488	19,98	0,3465	19,85	22,61
13	0,1529	8,76	0,0767	4,40	102,09	0,6953	39,84	0,3420	19,59	22,91
14	0,2297	13,16	0,0771	4,42	101,63	1,0373	59,43	0,3353	19,21	23,37
15	0,3068	17,58	0,0776	4,44	101,00	1,3725	78,64	0,3265	18,71	24,00
16	0,3843	22,02	0,0782	4,48	100,20	1,6990	97,35	0,3159	18,10	24,80
17	0,4625	26,50	0,0790	4,53	99,19	2,0149	115,44	0,3035	17,39	25,81
18	0,5415	31,03	0,0800	4,58	97,96	2,3184	132,83	0,2897	16,60	27,04
19	0,6215	35,61	0,0812	4,65	96,48	2,6081	149,43	0,2747	15,74	28,52
20	0,7027	40,26	0,0827	4,74	94,73	2,8828	165,17	0,2588	14,83	30,27

Используя формулы (5, 8, 9), запишем выражение для передаточного отношения:

$$U(\varphi) = \frac{r_H}{r} = \frac{\omega}{\omega_H} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (a - b + c + 3 \cdot b \cdot \cos 2\varphi)}{(a - b + c) \cdot \pi + 6 \cdot b} \quad (10)$$

На рисунке 2 приведена диаграмма значений фактической (ломаная линия по данным таблицы 1) и теоретической (плавная линия по формулам (8–10)) передаточной функций.

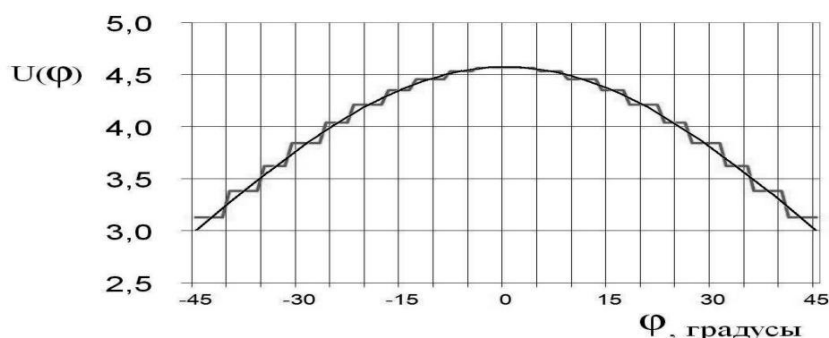


Рис. 2. Диаграмма фактической и теоретической передаточных функций

После разбиения зубчатых колес на условные сектора, следует провести для каждого сектора расчет участков эвольвент. При этом на секторах ведущей шестерни будут

профилироваться зубья, а на секторах ведомого колеса будут строиться впадины между зубьями.

Ведущая зубчатая шестерня: радиус начальной окружности r_i ; радиус основной окружности $r_{bi} = r_i - m$; радиус окружности впадин зубьев $r_{fi} = r_i - 1,25 \cdot m$; радиус окружности вершин зубьев $r_{ai} = r_i + m$.

Ведомое зубчатое колесо: радиус начальной окружности r_{Hi} ; радиус основной окружности $r_{Hbi} = r_{Hi} - m$; радиус окружности впадин зубьев $r_{Hfi} = r_{Hi} - 1,25 \cdot m$; радиус окружности вершин зубьев $r_{Hai} = r_{Hi} + m$.

Выполнив расчеты по этим формулам, используя данные из таблицы 1, результаты проведенных вычислений представим в таблице 2.

Таблица 2 – Радиусы дуг окружностей некруглых зубчатых колес

i	θ_i , градусы	r_i , мм	r_{bi} , мм	r_{fi} , мм	r_{ai} , мм	Φ_i , градусы	r_{Hi} , мм	r_{Hbi} , мм	r_{Hfi} , мм	r_{Hai} , мм
1	-180,00	30,27	27,77	27,15	32,77	-45,00	94,73	92,23	91,60	97,23
2	-165,17	28,52	26,02	25,40	31,02	-40,26	96,48	93,98	93,35	98,98
3	-149,43	27,04	24,54	23,92	29,54	-35,61	97,96	95,46	94,83	100,46
4	-132,83	25,81	23,31	22,69	28,31	-31,03	99,19	96,69	96,06	101,69
5	-115,44	24,80	22,30	21,68	27,30	-26,50	100,20	97,70	97,07	102,70
6	-97,35	24,00	21,50	20,87	26,50	-22,02	101,00	98,50	97,88	103,50
7	-78,64	23,37	20,87	20,24	25,87	-17,58	101,63	99,13	98,51	104,13
8	-59,43	22,91	20,41	19,79	25,41	-13,16	102,09	99,59	98,96	104,59
9	-39,84	22,61	20,11	19,49	25,11	-8,76	102,39	99,89	99,26	104,89
10	-19,98	22,46	19,96	19,34	24,96	-4,38	102,54	100,04	99,41	105,04
11	0,00	22,46	19,96	19,34	24,96	0,00	102,54	100,04	99,41	105,04
12	19,98	22,61	20,11	19,49	25,11	4,38	102,39	99,89	99,26	104,89
13	39,84	22,91	20,41	19,79	25,41	8,76	102,09	99,59	98,96	104,59
14	59,43	23,37	20,87	20,24	25,87	13,16	101,63	99,13	98,51	104,13
15	78,64	24,00	21,50	20,87	26,50	17,58	101,00	98,50	97,88	103,50
16	97,35	24,80	22,30	21,68	27,30	22,02	100,20	97,70	97,07	102,70
17	115,44	25,81	23,31	22,69	28,31	26,50	99,19	96,69	96,06	101,69
18	132,83	27,04	24,54	23,92	29,54	31,03	97,96	95,46	94,83	100,46
19	149,43	28,52	26,02	25,40	31,02	35,61	96,48	93,98	93,35	98,98
20	165,17	30,27	27,77	27,15	32,77	40,26	94,73	92,23	91,60	97,23

Для ведущей зубчатой шестерни вычислим параметры эвольвентных профилей для 10 зубьев. Остальные 10 зубьев будут расположены симметрично к зубьям с вычисленными параметрами, если их ориентировать относительно начального полярного угла $\theta = 0^\circ$.

Величина минимального бокового зазора обозначена как j_n . Для получения зазора строится действительный контур рабочей поверхности зуба вдоль теоретического контура. Передача должна допускать возможность реверса [7], обеспечивать возможность движения по ступеням [1, 2], поэтому линии действительного контура проводятся с обеих сторон зуба, находясь при этом между линиями теоретического контура.

Поскольку в ведомом колесе также будут проводиться линии действительного и теоретического контуров, величина дистанции между ними будет равна на основной окружности значению $\Delta = j_n/4$.

Величина угловой коррекции в градусах:

$$\Delta\Omega_i = \frac{j_n \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi \cdot r_{bi}}. \quad (11)$$

Профиль строится по 5 точкам.

Значения радиус-векторов:

Точка 1: $r_{i1} = r_i - m$;

Точка 2: $r_{i2} = r_i - 0,5 \cdot m$;

Точка 3: $r_{i3} = r_i$;

Точка 4: $r_{i4} = r_i + 0,5 \cdot m$;

Точка 5: $r_{i5} = r_i + m$.

Полярные углы для каждой точки действительного контура определяются с учетом угла построения эвольвенты [10, 11].

$\Omega_{ij} = \text{tg } \alpha_{ij} - \alpha_{ij}$, радианы;

$\Omega_{ij} = (\text{tg } \alpha_{ij} - \alpha_{ij}) \cdot 180^\circ / \pi$, градусы; (12)

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{r_i - m}{r_{ij}}; \quad \cos \alpha_{i1} = \frac{r_i - m}{r_i - m} = 1; \quad \cos \alpha_{i2} = \frac{r_i - m}{r_i - 0,5 \cdot m};$$

$$\cos \alpha_{i3} = \frac{r_i - m}{r_i}; \quad \cos \alpha_{i4} = \frac{r_i - m}{r_i + 0,5 \cdot m}; \quad \cos \alpha_{i5} = \frac{r_i - m}{r_i + m}.$$

Полярные углы для точек с первой стороны зуба:

$$\theta_{i1} = \theta_i + 0,25 \cdot \Delta\theta_i + \Delta\Omega_i - \Omega_{i3} + \Omega_{i1};$$

$$\theta_{i2} = \theta_i + 0,25 \cdot \Delta\theta_i + \Delta\Omega_i - \Omega_{i3} + \Omega_{i2};$$

$$\theta_{i3} = \theta_i + 0,25 \cdot \Delta\theta_i + \Delta\Omega_i - \Omega_{i3} + \Omega_{i3};$$

$$\theta_{i4} = \theta_i + 0,25 \cdot \Delta\theta_i + \Delta\Omega_i - \Omega_{i3} + \Omega_{i4};$$

$$\theta_{i5} = \theta_i + 0,25 \cdot \Delta\theta_i + \Delta\Omega_i - \Omega_{i3} + \Omega_{i5}.$$

Полярные углы для точек со второй стороны зуба:

$$\theta_{si1} = \theta_i + 0,75 \cdot \Delta\theta_i - \Delta\Omega_i + \Omega_{i3} - \Omega_{i1};$$

$$\theta_{si2} = \theta_i + 0,75 \cdot \Delta\theta_i - \Delta\Omega_i + \Omega_{i3} - \Omega_{i2};$$

$$\theta_{si3} = \theta_i + 0,75 \cdot \Delta\theta_i - \Delta\Omega_i + \Omega_{i3} - \Omega_{i3};$$

$$\theta_{si4} = \theta_i + 0,75 \cdot \Delta\theta_i - \Delta\Omega_i + \Omega_{i3} - \Omega_{i4};$$

$$\theta_{si5} = \theta_i + 0,75 \cdot \Delta\theta_i - \Delta\Omega_i + \Omega_{i3} - \Omega_{i5}.$$

Результаты проведенных вычислений представим в таблице 3.

Таблица 3 – Параметры эвольвент зубьев ведущей шестерни

Расчет 1-го зуба ведущей шестерни									
$i=1$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- ду- сы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-3,0999	-177,61	-2,9244	-167,56	27,77
$j=2$	0,2946	16,88	0,0088	0,51	-3,0911	-177,11	-2,9333	-168,06	29,02
$j=3$	0,4093	23,45	0,0245	1,40	-3,0755	-176,21	-2,9489	-168,96	30,27
$j=4$	0,4927	28,23	0,0442	2,53	-3,0558	-175,08	-2,9686	-170,09	31,52
$j=5$	0,5597	32,07	0,0668	3,83	-3,0331	-173,79	-2,9913	-171,39	32,77
Расчет 2-го зуба ведущей шестерни									
$i=2$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- ду- сы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-2,8395	-162,69	-2,6514	-151,91	26,02
$j=2$	0,3039	17,41	0,0097	0,56	-2,8298	-162,14	-2,6611	-152,47	27,27
$j=3$	0,4218	24,17	0,0269	1,54	-2,8126	-161,15	-2,6783	-153,46	28,52
$j=4$	0,5073	29,07	0,0485	2,78	-2,7910	-159,91	-2,6999	-154,69	29,77
$j=5$	0,5757	32,98	0,0733	4,20	-2,7662	-158,49	-2,7247	-156,11	31,02
Расчет 3-го зуба ведущей шестерни									
$i=3$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- ду- сы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-2,5634	-146,87	-2,3631	-135,40	24,54
$j=2$	0,3126	17,91	0,0106	0,61	-2,5528	-146,26	-2,3737	-136,00	25,79
$j=3$	0,4334	24,83	0,0293	1,68	-2,5340	-145,19	-2,3924	-137,08	27,04
$j=4$	0,5207	29,84	0,0528	3,03	-2,5106	-143,85	-2,4159	-138,42	28,29
$j=5$	0,5903	33,82	0,0797	4,57	-2,4837	-142,30	-2,4428	-139,96	29,54
Расчет 4-го зуба ведущей шестерни									
$i=4$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- ду- сы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-2,2724	-130,20	-2,0609	-118,08	23,31
$j=2$	0,3204	18,36	0,0114	0,66	-2,2610	-129,54	-2,0723	-118,73	24,56
$j=3$	0,4437	25,42	0,0316	1,81	-2,2408	-128,39	-2,0925	-119,89	25,81
$j=4$	0,5327	30,52	0,0569	3,26	-2,2156	-126,94	-2,1177	-121,34	27,06
$j=5$	0,6034	34,57	0,0857	4,91	-2,1867	-125,29	-2,1466	-122,99	28,31

Расчет 5-го зуба ведущей шестерни									
$i=5$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-1,9678	-112,75	-1,7461	-100,04	22,30
$j=2$	0,3272	18,75	0,0122	0,70	-1,9556	-112,05	-1,7583	-100,74	23,55
$j=3$	0,4528	25,95	0,0337	1,93	-1,9341	-110,82	-1,7798	-101,97	24,80
$j=4$	0,5432	31,12	0,0606	3,47	-1,9073	-109,28	-1,8066	-103,51	26,05
$j=5$	0,6148	35,23	0,0913	5,23	-1,8765	-107,52	-1,8374	-105,27	27,30
Расчет 6-го зуба ведущей шестерни									
$i=6$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-1,6511	-94,60	-1,4204	-81,38	21,50
$j=2$	0,3331	19,08	0,0129	0,74	-1,6382	-93,86	-1,4333	-82,12	22,75
$j=3$	0,4605	26,39	0,0356	2,04	-1,6155	-92,56	-1,4560	-83,42	24,00
$j=4$	0,5520	31,63	0,0639	3,66	-1,5872	-90,94	-1,4843	-85,04	25,25
$j=5$	0,6244	35,78	0,0962	5,51	-1,5549	-89,09	-1,5166	-86,90	26,50
Расчет 7-го зуба ведущей шестерни									
$i=7$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-1,3239	-75,86	-1,0858	-62,21	20,87
$j=2$	0,3378	19,35	0,0135	0,77	-1,3105	-75,08	-1,0993	-62,99	22,12
$j=3$	0,4668	26,74	0,0371	2,13	-1,2868	-73,73	-1,1230	-64,34	23,37
$j=4$	0,5592	32,04	0,0666	3,82	-1,2573	-72,04	-1,1525	-66,03	24,62
$j=5$	0,6322	36,22	0,1003	5,75	-1,2236	-70,11	-1,1861	-67,96	25,87

Расчет 8-го зуба ведущей шестерни									
$i=8$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,9882	-56,62	-0,7444	-42,65	20,41
$j=2$	0,3414	19,56	0,0139	0,80	-0,9743	-55,82	-0,7583	-43,45	21,66
$j=3$	0,4715	27,02	0,0384	2,20	-0,9498	-54,42	-0,7827	-44,85	22,91
$j=4$	0,5646	32,35	0,0688	3,94	-0,9194	-52,68	-0,8132	-46,59	24,16
$j=5$	0,6381	36,56	0,1035	5,93	-0,8847	-50,69	-0,8479	-48,58	25,41
Расчет 9-го зуба ведущей шестерни									
$i=9$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,6459	-37,01	-0,3982	-22,82	20,11
$j=2$	0,3438	19,70	0,0142	0,81	-0,6317	-36,19	-0,4124	-23,63	21,36
$j=3$	0,4747	27,20	0,0392	2,25	-0,6067	-34,76	-0,4374	-25,06	22,61
$j=4$	0,5683	32,56	0,0703	4,03	-0,5756	-32,98	-0,4685	-26,84	23,86
$j=5$	0,6420	36,79	0,1057	6,05	-0,5402	-30,95	-0,5039	-28,87	25,11
Расчет 10-го зуба ведущей шестерни									
$i=10$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	θ_{ij} , радиа- ны	θ_{ij} , граду- сы	θ_{sij} , радиа- ны	θ_{sij} , граду- сы	r_{ij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,2992	-17,14	-0,0496	-2,84	19,96
$j=2$	0,3450	19,77	0,0144	0,82	-0,2848	-16,32	-0,0640	-3,66	21,21
$j=3$	0,4763	27,29	0,0396	2,27	-0,2596	-14,87	-0,0892	-5,11	22,46
$j=4$	0,5701	32,66	0,0710	4,07	-0,2282	-13,07	-0,1206	-6,91	23,71
$j=5$	0,6440	36,90	0,1068	6,12	-0,1924	-11,02	-0,1564	-8,96	24,96

У ведущей шестерни будут симметричные зубья, но между ними необходимо построить несимметричные впадины для обеспечения плавных переходов между зубьями. Для этого следует использовать линии сопряжения с переменным радиусом кривизны.

Для ведомого зубчатого колеса вычислим параметры эвольвентных профилей для 10 впадин между зубьями. Остальные 10 впадин сектора будут расположены симметрично к впадинам с вычисленными параметрами, если их ориентировать относительно начального полярного угла $\varphi = 0^\circ$.

Величина угловой коррекции в градусах для ведомого зубчатого колеса:

$$\Delta\Omega_{Hi} = \frac{j_n \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi \cdot r_{Hbi}}. \quad (13)$$

Профиль строится по 5 точкам. Для этого вычислим значения радиус-векторов:

Точка 1: $r_{Hi1} = r_{Hi} - m$;

Точка 2: $r_{Hi2} = r_{Hi} - 0,5 \cdot m$;

Точка 3: $r_{Hi3} = r_{Hi}$;

Точка 4: $r_{Hi4} = r_{Hi} + 0,5 \cdot m$;

Точка 5: $r_{Hi5} = r_{Hi} + m$.

Полярные углы для каждой точки действительного контура:

$$\begin{aligned}\Omega_{Hij} &= \operatorname{tg} \alpha_{Hij} - \alpha_{Hij}, \text{ радианы;} \\ \Omega_{Hij} &= (\operatorname{tg} \alpha_{Hij} - \alpha_{Hij}) \cdot 180^\circ / \pi, \text{ градусы;} \\ \cos \alpha_{Hij} &= \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hij}}; \quad \cos \alpha_{Hi1} = \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi} - m} = 1; \quad \cos \alpha_{Hi2} = \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi} - 0,5 \cdot m}; \\ \cos \alpha_{Hi3} &= \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi}}; \quad \cos \alpha_{Hi4} = \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi} + 0,5 \cdot m}; \quad \cos \alpha_{Hi5} = \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi} + m}.\end{aligned}\tag{14}$$

Полярные углы для точек с первой стороны впадины:

$$\begin{aligned}\varphi_{i1} &= \varphi_i + 0,25 \cdot \Delta\varphi_i - \Delta\Omega_{Hi} + \Omega_{Hi3} - \Omega_{Hi1}; \\ \varphi_{i2} &= \varphi_i + 0,25 \cdot \Delta\varphi_i - \Delta\Omega_{Hi} + \Omega_{Hi3} - \Omega_{Hi2}; \\ \varphi_{i3} &= \varphi_i + 0,25 \cdot \Delta\varphi_i - \Delta\Omega_{Hi} + \Omega_{Hi3} - \Omega_{Hi3}; \\ \varphi_{i4} &= \varphi_i + 0,25 \cdot \Delta\varphi_i - \Delta\Omega_{Hi} + \Omega_{Hi3} - \Omega_{Hi4}; \\ \varphi_{i5} &= \varphi_i + 0,25 \cdot \Delta\varphi_i - \Delta\Omega_{Hi} + \Omega_{Hi3} - \Omega_{Hi5}.\end{aligned}$$

Полярные углы для точек со второй стороны впадины:

$$\begin{aligned}\varphi_{si1} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi1}; \\ \varphi_{si2} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi2}; \\ \varphi_{si3} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi3}; \\ \varphi_{si4} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi4}; \\ \varphi_{si5} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi5}; \\ \varphi_{si6} &= \varphi_i + 0,75 \cdot \Delta\varphi_i + \Delta\Omega_{Hi} - \Omega_{Hi3} + \Omega_{Hi6}.\end{aligned}$$

Для построения дополнительной точки используются формулы:

$$\cos \alpha_{Hsi6} = \frac{r_{Hi} - m}{r_{Hi+1} + m};\tag{15}$$

$$r_{Hsi6} = r_{Hi+1} + m;$$

$$\Omega_{Hsi6} = \operatorname{tg} \alpha_{Hsi6} - \alpha_{Hsi6}, \text{ радианы;} \tag{16}$$

$$\Omega_{Hsi6} = (\operatorname{tg} \alpha_{Hsi6} - \alpha_{Hsi6}) \cdot 180^\circ / \pi, \text{ градусы.}$$

Результаты проведенных вычислений представим в таблице 4.

Таблица 4 – Параметры эвольвент зубьев ведомого колеса

Расчет 1-й впадины ведомого колеса									
$i=1$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,7610	-43,60	-0,7271	-41,66	92,23
$j=2$	0,1637	9,38	0,0015	0,08	-0,7625	-43,69	-0,7256	-41,57	93,48
$j=3$	0,2303	13,19	0,0042	0,24	-0,7652	-43,84	-0,7229	-41,42	94,73
$j=4$	0,2805	16,07	0,0076	0,44	-0,7686	-44,04	-0,7195	-41,22	95,98
$j=5$	0,3221	18,45	0,0116	0,67	-0,7726	-44,27	-0,7155	-40,99	97,23
$j=6$	0,3715	21,28	0,0181	1,04	-	-	-0,7090	-40,62	98,98
Расчет 2-й впадины ведомого колеса									
$i=2$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,6788	-38,89	-0,6454	-36,98	93,98
$j=2$	0,1622	9,29	0,0014	0,08	-0,6802	-38,97	-0,6440	-36,90	95,23
$j=3$	0,2281	13,07	0,0040	0,23	-0,6828	-39,12	-0,6414	-36,75	96,48
$j=4$	0,2779	15,92	0,0074	0,42	-0,6862	-39,31	-0,6380	-36,56	97,73
$j=5$	0,3192	18,29	0,0113	0,65	-0,6901	-39,54	-0,6341	-36,33	98,98
$j=6$	0,3611	20,69	0,0166	0,95	-	-	-0,6289	-36,03	100,46
Расчет 3-й впадины ведомого колеса									
$i=3$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,5980	-34,26	-0,5650	-32,37	95,46
$j=2$	0,1610	9,22	0,0014	0,08	-0,5994	-34,34	-0,5636	-32,29	96,71
$j=3$	0,2264	12,97	0,0039	0,23	-0,6019	-34,49	-0,5611	-32,15	97,96
$j=4$	0,2758	15,80	0,0072	0,41	-0,6052	-34,67	-0,5578	-31,96	99,21
$j=5$	0,3168	18,15	0,0110	0,63	-0,6090	-34,89	-0,5540	-31,74	100,46
$j=6$	0,3519	20,16	0,0153	0,88	-	-	-0,5498	-31,50	101,69

Расчет 4-й впадины ведомого колеса									
$i=4$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,5183	-29,70	-0,4857	-27,83	96,69
$j=2$	0,1599	9,16	0,0014	0,08	-0,5197	-29,78	-0,4843	-27,75	97,94
$j=3$	0,2250	12,89	0,0039	0,22	-0,5222	-29,92	-0,4819	-27,61	99,19
$j=4$	0,2741	15,71	0,0071	0,41	-0,5254	-30,10	-0,4786	-27,42	100,44
$j=5$	0,3149	18,04	0,0108	0,62	-0,5291	-30,32	-0,4749	-27,21	101,69
$j=6$	0,3438	19,70	0,0142	0,81	-	-	-0,4715	-27,02	102,70
Расчет 5-й впадины ведомого колеса									
$i=5$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,4396	-25,19	-0,4073	-23,34	97,70
$j=2$	0,1591	9,12	0,0014	0,08	-0,4409	-25,26	-0,4059	-23,26	98,95
$j=3$	0,2239	12,83	0,0038	0,22	-0,4434	-25,40	-0,4035	-23,12	100,20
$j=4$	0,2727	15,63	0,0070	0,40	-0,4465	-25,58	-0,4003	-22,94	101,45
$j=5$	0,3133	17,95	0,0107	0,61	-0,4502	-25,80	-0,3966	-22,72	102,70
$j=6$	0,3366	19,29	0,0133	0,76	-	-	-0,3940	-22,57	103,50
Расчет 6-й впадины ведомого колеса									
$i=6$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,3616	-20,72	-0,3295	-18,88	98,50
$j=2$	0,1585	9,08	0,0013	0,08	-0,3629	-20,79	-0,3282	-18,80	99,75
$j=3$	0,2230	12,77	0,0038	0,22	-0,3653	-20,93	-0,3257	-18,66	101,00
$j=4$	0,2717	15,56	0,0069	0,39	-0,3685	-21,11	-0,3226	-18,49	102,25
$j=5$	0,3121	17,88	0,0105	0,60	-0,3721	-21,32	-0,3190	-18,28	103,50
$j=6$	0,3302	18,92	0,0126	0,72	-	-	-0,3170	-18,16	104,13
Расчет 7-й впадины ведомого колеса									
$i=7$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,2842	-16,28	-0,2523	-14,45	99,13
$j=2$	0,1580	9,05	0,0013	0,08	-0,2855	-16,36	-0,2509	-14,38	100,38
$j=3$	0,2223	12,73	0,0037	0,21	-0,2879	-16,49	-0,2485	-14,24	101,63
$j=4$	0,2708	15,52	0,0068	0,39	-0,2910	-16,67	-0,2454	-14,06	102,88
$j=5$	0,3111	17,83	0,0104	0,60	-0,2946	-16,88	-0,2418	-13,86	104,13
$j=6$	0,3245	18,59	0,0119	0,68	-	-	-0,2404	-13,77	104,59

Расчет 8-й впадины ведомого колеса									
$i=8$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,2072	-11,87	-0,1754	-10,05	99,59
$j=2$	0,1576	9,03	0,0013	0,08	-0,2085	-11,95	-0,1741	-9,98	100,84
$j=3$	0,2218	12,71	0,0037	0,21	-0,2109	-12,08	-0,1717	-9,84	102,09
$j=4$	0,2702	15,48	0,0068	0,39	-0,2140	-12,26	-0,1686	-9,66	103,34
$j=5$	0,3105	17,79	0,0104	0,59	-0,2175	-12,46	-0,1650	-9,46	104,59
$j=6$	0,3193	18,29	0,0113	0,65	-	-	-0,1641	-9,40	104,89
Расчет 9-й впадины ведомого колеса									
$i=9$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,1305	-7,48	-0,0988	-5,66	99,89
$j=2$	0,1574	9,02	0,0013	0,08	-0,1318	-7,55	-0,0975	-5,59	101,14
$j=3$	0,2214	12,69	0,0037	0,21	-0,1342	-7,69	-0,0951	-5,45	102,39
$j=4$	0,2698	15,46	0,0067	0,39	-0,1372	-7,86	-0,0921	-5,28	103,64
$j=5$	0,3100	17,76	0,0103	0,59	-0,1408	-8,07	-0,0885	-5,07	104,89
$j=6$	0,3144	18,01	0,0108	0,62	-	-	-0,0880	-5,04	105,04
Расчет 10-й впадины ведомого колеса									
$i=10$	α_{ij} , ра- дианы	α_{ij} , гра- дусы	Ω_{ij} , ра- дианы	Ω_{ij} , гра- дусы	Φ_{ij} , радиа- ны	Φ_{ij} , граду- сы	Φ_{sij} , радиа- ны	Φ_{sij} , граду- сы	r_{Hij} , мм
$j=1$	0,0000	0,00	0,0000	0,00	-0,0540	-3,10	-0,0224	-1,28	100,04
$j=2$	0,1573	9,01	0,0013	0,08	-0,0553	-3,17	-0,0211	-1,21	101,29
$j=3$	0,2213	12,68	0,0037	0,21	-0,0577	-3,31	-0,0187	-1,07	102,54
$j=4$	0,2696	15,45	0,0067	0,39	-0,0608	-3,48	-0,0157	-0,90	103,79
$j=5$	0,3098	17,75	0,0103	0,59	-0,0643	-3,69	-0,0121	-0,69	105,04
$j=6$	0,3098	17,75	0,0103	0,59	-	-	-0,0121	-0,69	105,04

У ведомого колеса будут симметричные впадины между зубьями, образованные участками эвольвентных кривых. Зубья ведомого колеса будут образовываться путем сопряжения эвольвент соседних секторов. Таким образом, у ведомого колеса будут несимметричные зубья, для профилирования вершин которых следует использовать линии сопряжения с переменным радиусом кривизны.

После построения профилей зубьев ведущей шестерни и впадин ведомого колеса, необходимо в дальнейшем решить задачу сопряжения участков эвольвентных кривых между соседними секторами, чтобы завершить профилирование зубчатых венцов [6, 8]. Следующим этапом должно стать изготовление опытных образцов этих некруглых колес, применение которых должно улучшить кинематические и динамические характеристики процесса движения колесно-щажгающего движителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда А. Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А. Т. Скойбеда И. М. Комяк В. Н. Жуковец / Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – Стр. 138–144.
2. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2013 г., вып. 28. – С. 228–233.
3. Беккер М. Г. Введение в теорию систем местность–машина. – М., «Машиностроение», 1973. – 520 с.
4. Котович С. В. Движители специальных транспортных средств. Часть I: Учебное пособие / МАДИ (ГТУ). – М., 2008. – 161 с.
5. Скойбеда А. Т., Комяк И. М., Жуковец В. Н. Применение некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя / Республиканский межведомственный сборник научных трудов «Машиностроение». Выпуск 27. – Минск.: БНТУ, 2013. – С. 113–117.
6. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Расчет начальных линий некруглых зубчатых колес // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Выпуск 31. 2016. – С. 110–117.
7. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н., Калина А. А., Комяк И. М. Перспективные ходовые системы мобильных машин / Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 8. – Минск, 2019. – Стр. 100–103.
8. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Применение линий сопряжения с заданной кривизной при профилировании несимметричных зубьев в приводе колесно-шагающего движителя / Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 10. – Минск, 2021. – Стр. 177–180.
9. Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.
10. Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю. С. – Мн.: Выш. шк. 1995. – 380 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: 1973. – 832 с.

Поступила: 31.03.2022

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ НОЖЕЙ РОТОРА

Моисеенков Д. В.

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Россия

Измельчение – наиболее распространенный механический процесс, используемый человечеством на протяжении всего существования. В промышленном масштабе данный вид обработки сырья внедрен во множество отраслей, начиная от пищевой и сельскохозяйственной промышленности, заканчивая нефтеперерабатывающим производством. Ключевым элементом при измельчении является режущий инструмент – нож. Современные технологии позволяют изготовить режущий элемент, способный измельчить практически любое сырье до заданной фракции. Комбинируя форму ножей, угол заточки режущей кромки, металл и технологическую обработку можно добиться индивидуальных характеристик под определенные цели и задачи. В производственном масштабе наиболее востребованным оборудованием для измельчения является дробилка. Как показывает практика, самая распространенная дробилка – роторная. Данный вид оборудования, в зависимости от характеристик, позволяет измельчить как зерновые культуры и сырье пищевых производств, так и уголь, кокс и прочие составляющие горной и нефтеперерабатывающих отраслей [1]. Основными режущими элементами дробилки являются роторные и статорные ножи. При утилизации автомобильных покрышек механическим методом, ведущим оборудованием в технологической линии является роторная дробилка, так как именно в камере дробления данного оборудования резиновая крошка измельчается до конечной фракции. От производительности дробилки зависит производительность всей линии по производству резиновой крошки из автомобильных покрышек [2]. Также, используя роторную дробилку появляется возможность контролировать размер фракции получаемого продукта, посредством установки сита, с необходимым размером ячеек. Измолотое сырье, меньшее чем ячейка сита, поступает на следующий этап технологической схемы, а более крупные куски дробимого материала повторно измельчаются до заданного размера. В данной статье произведен анализ напряженно-деформируемого состояния ножей ротора.

Проведем математическое моделирование процесса движения рассматриваемой механической системы, а также составим расчетную схему для аналитического исследования процессов, возникающих в процессе измельчения.

В работе предлагается динамическая модель, состоящая из ротора 1, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси с угловой скоростью ω в установившемся режиме работы ротора, статорного ножа 2, установленного в камере дробления. Куски, предварительно измельченной автомобильной покрышки 3 разрезаются посредством контакта с роторными и статорными ножами (рисунок 1).

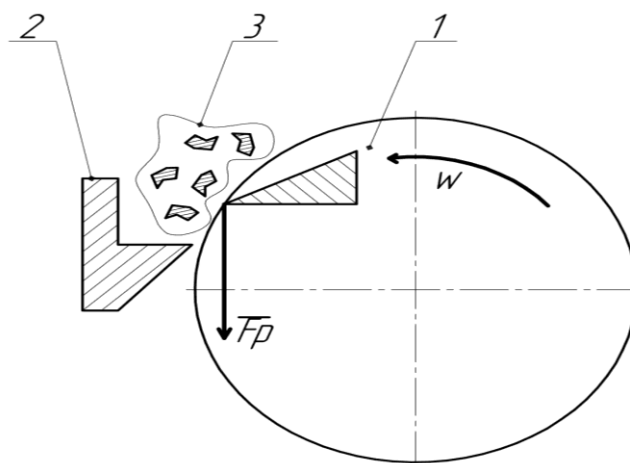


Рис. 1. Модель процесса измельчения резиновой крошки

В предлагаемой модели в роли ротора выступает выходной вал редуктора, с насаженными на него роторными ножами, посредством шлицевого и шпилечного соединений. Вал имеет две опоры качения – конические шарикоподшипники.

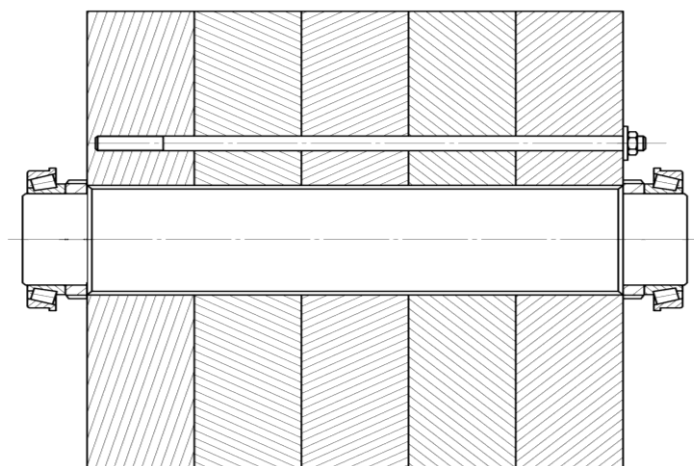


Рис. 2. Модель ротора

Для исследования механических процессов, возникающих при переработке автомобильных покрышек в резиновую крошку рассмотрим ротор, который закреплен на выходном валу редуктора и вращается с заданной угловой скоростью ω . Конструкция ротора состоит из вала и насаженных на него роторных ножей. Предварительно разрезанные куски автомобильной покрышки подаются в камеру дробления с помощью ленточного конвейера со скоростью v . В данной работе расчет параметров ленточного конвейера не рассматривается. Измельчение кусков автомобильной покрышки в резиновую крошку происходит при попадании их между роторными и статорными ножами. Далее измельченный продукт проходит сквозь сито, установленное в камере дробления, и попадает в приемный контейнер.

Первым этапом исследования напряженно-деформированного состояния роторной дробилки является определение сил резания, возникающих на роторных ножах. В процессе дробления на нож действуют две силы \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , расположенные в плоскости ножа. Лезвие ножа подвергается изгибу, вызываемым действием силы \vec{F}_1 растяжению,

вызываемым силой \vec{F}_2 [1, 3,5]. Принимаем, что сила резания равномерно распределена по всей плоскости лезвия ножа. Следовательно, можно выразить F_1 и F_2 (рисунок 3):

$$F_1 = F \cdot \cos \alpha, \quad F_2 = F \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол установки ножа.

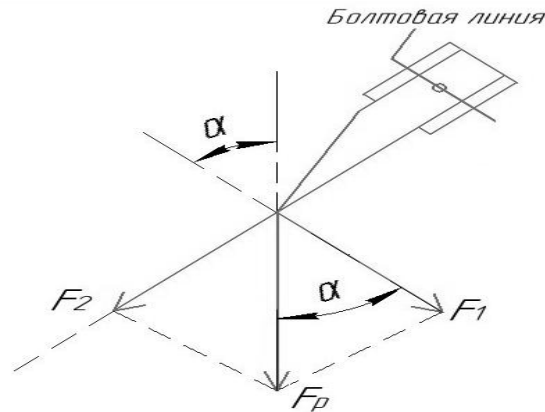


Рис. 3. Схема сил, действующих на лезвие ножа

Рассмотрим изгиб лезвия ножа. Данную деформацию с некоторыми допущениями можно рассматривать, как консольную балку с жесткозакрепленным концом [1, 4]. Полагаем, что рассматриваемая балка имеет прямоугольное сечение одинаковой переменной высоты y и ширины ℓ (рисунок 4).

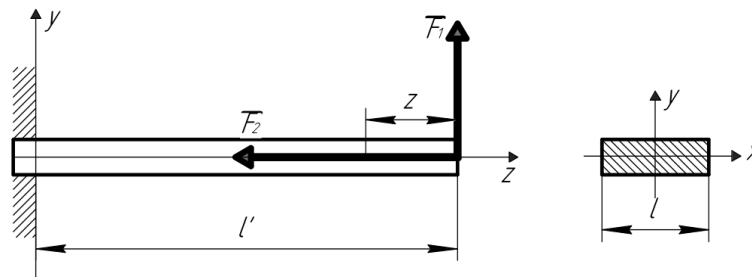


Рис. 4. Расчетная схема лезвия ножа

За счет вертикальной составляющей силы резания по длине лезвия ноже определяется изгибающий момент:

$$M_x = F_1 \cdot z, \tag{1}$$

осевой момент сопротивления прямоугольного сечения лезвия ножа:

$$W_x = \frac{y \cdot \ell^2}{6}, \tag{2}$$

где y – величина, зависящая от угла заточки лезвия ножа β , ℓ – длина лезвия ножа. Напряжение в каждом сечении при деформации изгиба определяется [4]:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6 \cdot k \cdot F_p \cdot \cos \alpha \cdot z}{y \cdot \ell^2}, \quad (3)$$

где $M_x = M_{xmax}$ – максимальное значение изгибающего момента.

$$M_{xmax} = \frac{6 \cdot k \cdot F_p \cdot \cos \alpha \cdot \ell'}{h \cdot \ell^2}. \quad (4)$$

Подставив полученное выражение в условие прочности, можно определить технические характеристики ножа:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (5)$$

Рассмотрим деформации растяжения лезвия ножа, с переменной величиной u . Определим критическое значение стержня прямоугольного поперечного сечения. Гибкость стержня:

Вычислим радиус инерции:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell'}{i_{min}}; \quad (6)$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}}, \quad (7)$$

где J_{min} – минимальное значение момента инерции, S – площадь поперечного сечения ножа.

Предположим, что в рассмотренной модели лезвия ножа коэффициент приведения длины $\mu = 1$. Следовательно, можно определить предельную гибкость по формуле:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}. \quad (8)$$

Исходя из материала роторного ножа и угла заточки лезвия, определим возможность использования формулы Эйлера:

$$\lambda \geq \lambda_{пред} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \quad (9)$$

В случае, если условие выполняется, то для расчета критической силы применяют формулу Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot \ell')^2}, \quad (10)$$

В противном случае, используют формулу Ясинского.

Таким образом, получены аналитические выражения, которые можно использовать для определения составляющих сил для силы резания ножей роторной дробилки.

Анализируя напряженно-деформированное состояния рабочих органов роторной дробилки, используемой для переработки автомобильных покрышек в резиновую крошку, предложена динамическая модель рабочего органа дробилки. Представленная модель позволяет оптимизировать технические характеристики режущего инструмента, в промышленных масштабах получать резиновую крошку необходимой фракции и заданном объеме, которую применяют в качестве амортизационного слоя, как при строительстве дорог, так и при проектировании спортивных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В., Головацкий Г. А., Краснов И. В. Некоторые направления повышения эффективности технологического оборудования для переработки пищевого сырья / Известия Санкт-Петербургского.
2. Куликова М. Г., Кончина Л. В. Моделирование технологического оборудования в пищевой промышленности. Естественные и технические науки. 2017. №5 (107). С. 126–127.
3. Родзевич П. Е., Миренков В. В., Хиженок В. Ф., Шельманова Е. П. Влияние углов установки на напряженно-деформируемое состояние ножа измельчающего барабана кормоуборочного комбайна // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. 2016. № 1. С. 32–37.
4. Бауман В. А. Роторные дробилки. Исследование, конструирование, расчет и эксплуатация. – М: «Машиностроение». 1973. 272 с.
5. Konchina L. V., Kulikova M. G., Tulegenova K. B. Modeling of the Stress-Deformed State of Working Bodies of Technological Equipment. Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). ICIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85230-6_43

Поступила: 31.03.2022

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В РОТОРЕ ДЕКАНТЕРНОЙ ЦЕНТРИФУГИ

Тищенко Н. М., Гончаров М. В.

Филиал ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Россия

Декантерная центрифуга – оборудование, предназначенное для удаления механических примесей из смеси за счет действия центробежных сил и цилиндрическо-конического шнека (рисунок 1).

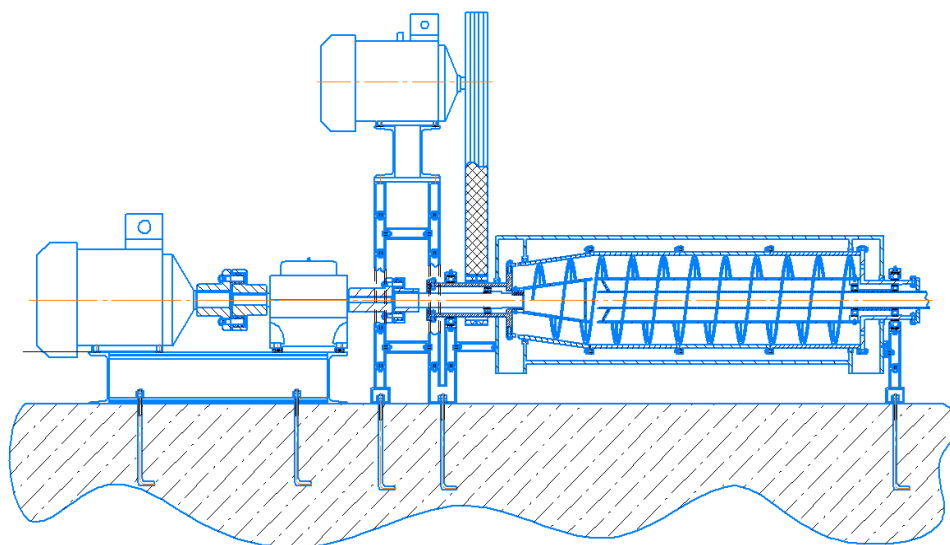


Рис. 1. Декантерная центрифуга

Декантерная центрифуга работает по следующему принципу: суспензия через горизонтально расположенную трубу поступает во внутреннее пространство ротора, который непрерывно вращается. За счет высокой частоты вращения частицы механических включений практически мгновенно прижимаются к внутренней поверхности ротора. Шнек, вращающийся быстрее ротора, непрерывно перемещает частицы к выходным отверстиям, которые находятся в конце конической части ротора. Жидкость же течет между витков и выходит из внутреннего объема ротора в конце его цилиндрической части.

Данный вид оборудования находит применение:

- в молочной промышленности;
- во время отделения от масла примесей;
- при очистке нефтепродуктов;
- в винодельной промышленности;
- в утилизации нефтешламов и т. д.

В данной работе рассматривается случай отделения механических примесей от нефтешламов, образованных в результате проливов нефти.

Модель движения механических включений по поверхности ротора представлена на рисунке 2. На твердые включения нефтешлама действуют силы сухого $\vec{F}_{с.т.}$, и вязкого трения $\vec{F}_{в.т.}$, реакции опоры \vec{R} , тяжести $m\vec{g}$ центробежная сила $\vec{F}^ц$, вызванная враще-

нием ротора, а также окружная сила \vec{F}_a и радиальная сила \vec{F}_r , действующие со стороны шнека на частицы.

Запишем дифференциальное уравнение горизонтального движения частицы диаметром d , находящейся в контакте с цилиндрической частью поверхности ротора, вращающегося с угловой скоростью ω (рисунок 2):

$$-m \frac{dV}{dt} = kmr\omega^2 + C \frac{\pi d^2 \rho_{ж} V^2}{4} - F_a, \quad (1)$$

где k – коэффициент трения; ω – угловая скорость вращения ротора, рад·с⁻¹; r – внутренний радиус ротора, м; $\rho_{ж}$ – плотность жидкости, кг/м³; C – коэффициент вязкого трения.

F_t – окружная сила, которая определяется по формуле [1]:

$$F_t = \frac{2 \cdot T}{K \cdot D}, \quad (2)$$

где T – крутящий момент, приложенный к валу шнека, Н·м; D – диаметр шнека, м; K – коэффициент, который учитывает положение равнодействующих сил сопротивления вращения на витках шнека; осевая сила F_a определяется по формуле:

$$F_a = \frac{2 \cdot T}{K \cdot D \cdot \operatorname{tg}(\gamma_c + \varphi)}, \quad (3)$$

где φ – угол трения между витком шнека и частицей; γ_c – средний угол подъема линии шнека.

Средний угол подъема винтовой линии определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \gamma_c = (0,4 \dots 0,5) \cdot \frac{p}{D}, \quad (4)$$

где p – шаг шнека, м; угол трения между винтом и частицей определяется по формуле:

$$\varphi = \operatorname{arctg}(f),$$

где f – коэффициент трения.

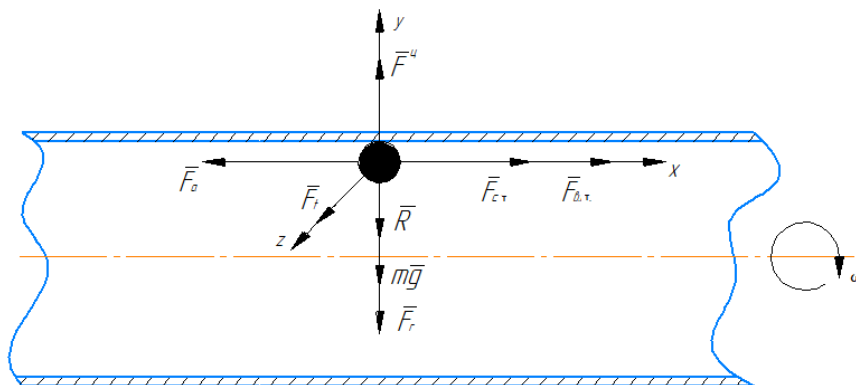


Рис. 2. Силы, действующие на цилиндрическом участке ротора

Дифференциальное уравнение (1) можно привести к следующему уравнению:

$$\frac{dV}{dt} = -(a^2V^2 - b^2), \quad (5)$$

где введены следующие обозначения:

$$a^2 = C \frac{\pi d^2 \rho_{ж}}{8m},$$

$$b^2 = kr\omega^2 - \frac{F_a}{m}.$$

Тогда общее решение уравнения (5) с начальными условиями – $t = t_0, V = V_0$ можно записать в виде:

$$-\frac{1}{2ab} \cdot \ln \left| \frac{aV - b}{aV + b} \right| = t + C, \quad (6)$$

где C определяется выражением:

$$C = -t_0 - \frac{1}{2ab} \cdot \ln \left| \frac{aV_0 - b}{aV_0 + b} \right|. \quad (7)$$

В зависимости от времени t частицы ее скорость примет вид:

$$V = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2ab(t-t_0)} \cdot (aV_0 + b) + aV_0 - b}{e^{2ab(t-t_0)} \cdot (aV_0 + b) - aV_0 + b}. \quad (8)$$

Из анализа полученного решения можно заключить, что скорость горизонтального движения частицы по цилиндрической части поверхности ротора будет тем выше, чем больше угловая скорость ротора и меньше диаметр частицы нефтешлама. Аналогичным образом можно далее рассмотреть движение частицы по конической части вращающегося ротора, определив начальные условия движения частицы на этом участке с помощью полученного выражения (6) и конечную скорость движения частицы на цилиндрической части. Таким образом, полученные решения позволят изменять динамические характеристики декантерной центрифуги в зависимости от состава механических примесей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проектирование и расчет подъемно-транспортующих машин сельскохозяйственного назначения / М. Н. Ерохин А. В. Карп Н. А. Выскребенцев и др.; Под ред. М. Н. Ерохина и А. В. Карпа. – М.: Колос, 1999. – 228 с.

Поступила: 31.03.2022

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБАЮЩИХ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ЭЛЕМЕНТА КРУГОВОГО КОЛЬЦА

¹Докукова Н. А., ²Кафтайкина Е. Н.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Иностранное общество с ограниченной ответственностью "Плэйтिका Бел", Минск

Введение. В авиастроении упругое круговое кольцо имеет большое практическое значение, поскольку оно является частью силовой конструкции оболочек – шпангоутом [1, 2]. Постановка задачи о его изгибе и кручении связана с выводом уравнений равновесия бесконечно малого элемента и зависимостей, объединяющих перемещения и деформации. Полученные расчетные законы смещений и углов закручиваний на основании используемых общих уравнений могут найти применение в проектировании как изолированных шпангоутов, так и шпангоутов, подкрепляющих тонкую обшивку.

Основная часть. Рассматривается кольцо радиуса R , находящееся в сложном нагруженном режиме. При его достаточно больших величинах круговая форма кольца может стать неустойчивой, тогда кольцо изогнется и примет новую некруговую форму. В общем случае исследуемого нагружения кольцо испытывает изгиб в своей плоскости, кручение в поперечных сечениях проволочно-цилиндрического бесконечно малого элемента, продольное и радиальное растяжение – сжатие, рисунок 1.

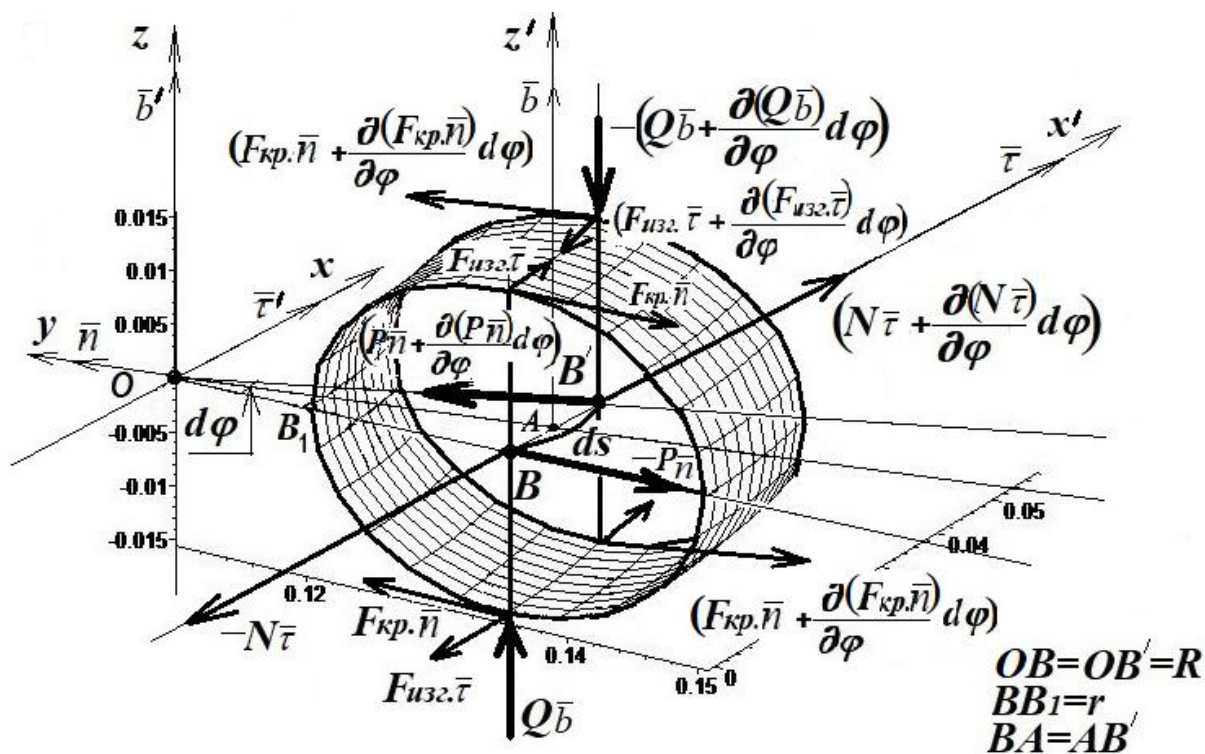


Рис. 1. Элемент кругового кольца ds в сложном нагруженном режиме

Вследствие специфического нагруженного состояния кольца в структуре его однородного упругого материала возникают продольная сила \bar{N} , перерезывающая \bar{Q} , радиальная растягивающая сила \bar{P} . Направления которых не будут изменяться во все

время наблюдения за кольцом. В поперечных сечениях кольца появляются изгибающие и крутящие моменты, изображенные на рисунке 1, в виде изменчивых взаимно противоположных пар сил. Для описания динамического напряженно-деформируемого состояния кольцевого элемента используется гипотеза плоских сечений при кручении и изгибе Бернулли – Эйлера и принцип Сен-Венана: поперечные сечения, плоские и перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси после ее деформации. Помимо гипотезы плоских сечений принимается допущение: продольные волокна балки при ее изгибе не надавливают друг на друга. Вследствие этого, единичные орты, вдоль которых направлены основные силы, не будут изменять своего направления и величины.

Положение поперечного сечения S кольца в процессе движения характеризуется смещением $x_3(\varphi, t)$ его центра тяжести из плоскости кольца и углом поворота сечения $x_4(\varphi, t)$, рисунок 2, а. В направлении силы \bar{P} возникает перемещение $v(\varphi, t)$, в направлении \bar{N} – $u(\varphi, t)$, рисунок 2, б.

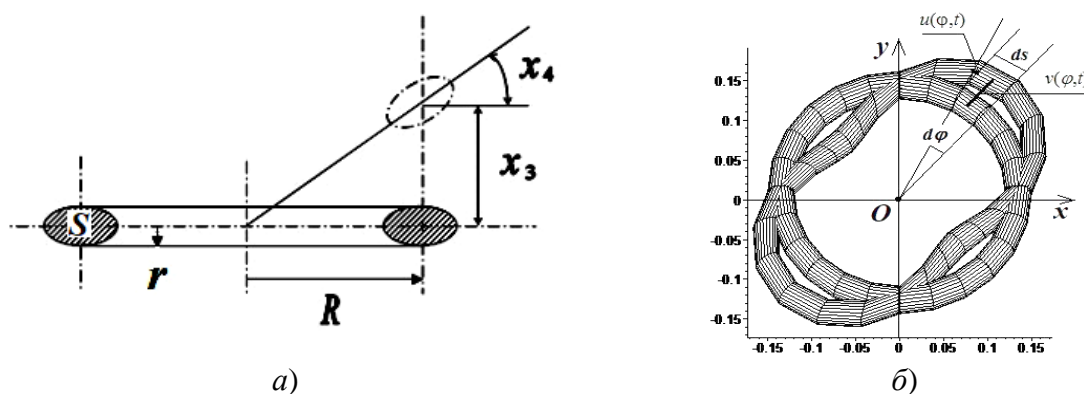


Рис. 2. Смещение $x_3(\varphi, t)$ центра тяжести сечения кольца из срединной плоскости кольца и угол поворота сечения $x_4(\varphi, t)$ на а, радиальное смещение элемента ds кольца $v(\varphi, t)$ и продольное $u(\varphi, t)$ на б

Для установления общих закономерностей моментов от перемещений и углов поворота рассматриваются пространственные формы равновесия кольца с линейными зависимостями относительно деформаций и смещений. Если $x_3(\varphi, t)$ постоянно по длине окружности, то кольцо смещается как жесткое и внутренние силы не возникают. Известно, что в этом случае в поперечных сечениях возникает крутящий момент [1, 2]

$$M_{кр1} = -\frac{GJ_k}{R^2} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига, E – модуль Юнга, ν – значение коэффициента Пуассона для выбранного материала, GJ_k – крутильная жесткость сечения бруса, J_k – полярный момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести, $J_k = \frac{\pi D^4}{64}$, D – диаметр поперечного сечения кольца.

При переменном по длине кольца повороте на угол $x_4(\varphi, t)$ соседние сечения поворачиваются друг относительно друга, и возникает другой крутящий момент

$$M_{кр_2} = \frac{GJ_k}{R} \frac{\partial x_4}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Если вторая производная $d^2 x_3/d\varphi^2$ отлична от нуля, то изменяется кривизна бруса и возникает изгибающий момент

$$M_{изг_1} = \frac{EJ_1}{R^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2}, \quad (3)$$

где J_1 – момент инерции сечения относительно центральной оси, лежащей в плоскости кривизны, R – расстояние от начала координат $Oxuz$ до срединной линии кольца, r – радиус поперечного сечения.

Силовые факторы, обусловленные поворотом на $x_4(\varphi, t)$, приводят к осесимметричному изгибу кольца, причем в его сечениях возникает второй изгибающий момент

$$M_{изг_2} = \frac{EJ_1}{R^2} x_4. \quad (4)$$

Суммируя все перечисленные силовые зависимости (1–2) и (3–4), связанные с перемещением $x_3(\varphi, t)$ и поворотом $x_4(\varphi, t)$, получаются общие изгибающий и крутящий моменты:

$$M_{изг} = \frac{EJ_1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + x_4 \right), \quad (5)$$

$$M_{кр} = \frac{GJ_k}{R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_4}{\partial \varphi} \right). \quad (6)$$

Для конкретизации поставленной задачи, вызванной специфическим нагрузочным режимом, рисунки 1–2. Следует составить уравнения равновесия бесконечно малого элемента ds бруса [3–10]. Для этих целей необходимо определить выражения моментов

для пар сил $(F_{изг.} \bar{\tau}, -F_{изг.} \bar{\tau})$, $(F_{кр.} \bar{n}, -F_{кр.} \bar{n})$, $\left(\left(F_{изг.} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{изг.} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{изг.} \bar{\tau} - \frac{\partial(F_{изг.} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$,

$\left(\left(F_{кр.} \bar{n} + \frac{\partial(F_{кр.} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{кр.} \bar{n} - \frac{\partial(F_{кр.} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$. Моменты рассматриваются относительно одной

точки, центра масс элемента ds кольца, точки A – начала координат естественного трехгранника $A\tau nb$. Все моменты вычисляются по формуле $\bar{M}_A = [\bar{r}_A \times \bar{F}]$, где \bar{M}_A – момент силы \bar{F} относительно точки A ; \bar{r}_A – радиус-вектор из начала координат A до точки приложения силы; $M_{A\tau}, M_{An}, M_{Ab}$ – осевые моменты относительно соответствующих осей $A\tau, An, Ab$.

Рассмотрим момент изгибающий плоскость кольца от пары сил $(F_{u3z} \bar{\tau}, -F_{u3z} \bar{\tau})$, радиусы-векторы до каждой из которых $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$, рисунок 3, а,

$$\bar{M}_{u3z} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & r \\ F_{u3z} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & -r \\ -F_{u3z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{u3z} \bar{n} \quad (7)$$

Модуль изгибающего момента равен $|\bar{M}_{u3z}| = 2r F_{u3z}$, его векторная величина от первой пары сил $(F_{u3z}, -F_{u3z})$ сонаправлена вектору нормали $\bar{M}_{u3z} = M_{u3z} \bar{n}$

$$\bar{M}_{u3z} = (0; M_{u3z}; 0). \quad (8)$$

Противоположный ему момент от второй пары сил $\left(\left(F_{u3z} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right), \left(-F_{u3z} \bar{\tau} - \frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \right)$ на рисунке 3, б. Для его вычисления необходимо

продифференцировать выражение $\frac{\partial(F_{u3z} \bar{\tau})}{\partial \varphi}$, используя известные свойства естественной

системы координат – репера Френе, смещающегося вслед за каждой рассматриваемой точкой кривой. Во всех точках регулярно параметризованной кривой можно построить подвижный, меняющийся от точки к точке, ортонормированный репер, состоящий из орта направленного вдоль касательной $\bar{\tau}$, орта нормали \bar{n} , перпендикулярного к касательной и орта бинормали \bar{b} , перпендикулярного первым двум. Нормалью кривой является прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания, лежащая в соприкасающейся плоскости к этой кривой, и направленная в сторону ее вогнутости.

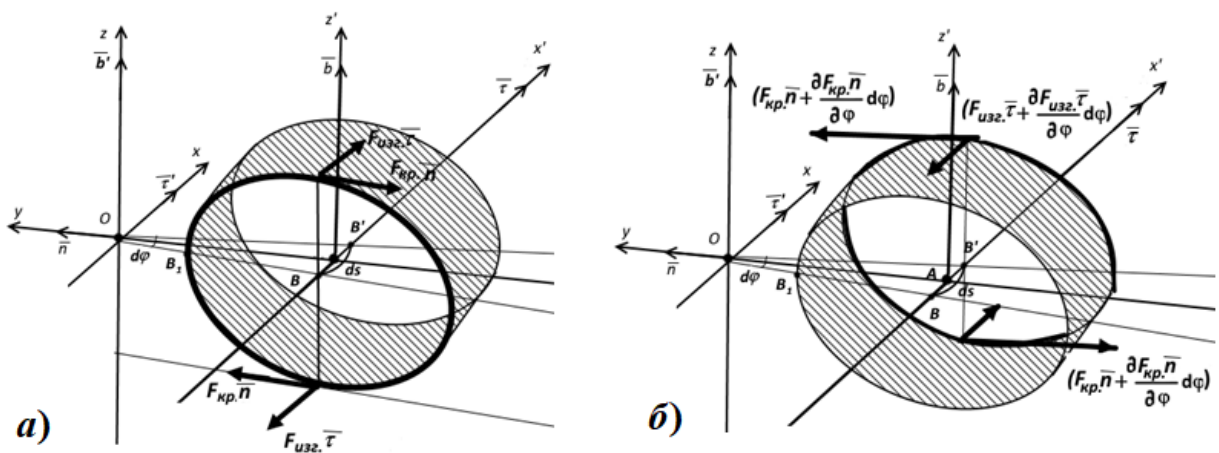


Рис. 3. Изгибающие и крутящие пары сил в сечении, содержащем точку В, на а и, содержащем точку В', на б

Единичные векторы $\bar{\tau}$, \bar{n} репера Френе показаны на рисунке 4, соответственно для касательной и главной нормали, при слежении за точками деформируемого состояния кольца вдоль ее кривой линии. Бинормаль во все время смещений точек сечений кольца и его деформирования перпендикулярна им обоим. При соответствующем выборе направлений этих векторов, известных величинах кривизны $k = 1/R$ и кручения $\chi = \left(\frac{d\bar{b}}{ds}, \bar{n}\right)$, выписываются производные ортов с использованием формул Френе, в которых $ds = R d\varphi$:

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{d\varphi} = -\bar{\tau} + \chi R \bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{d\varphi} = -\chi R \bar{n}. \quad (9)$$

Исходя из полученных формул можно вычислить приращение вектора $F_{u_{3z}} \bar{\tau}$ и найти координатную форму $\bar{F}'_{u_{3z}} = \left(F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u_{3z}} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi \right)$ в естественной системе $A \tau n b$

$$\bar{F}'_{u_{3z}} = F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial(F_{u_{3z}} \bar{\tau})}{\partial \varphi} d\varphi = F_{u_{3z}} \bar{\tau} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \bar{\tau} + F_{u_{3z}} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (10)$$

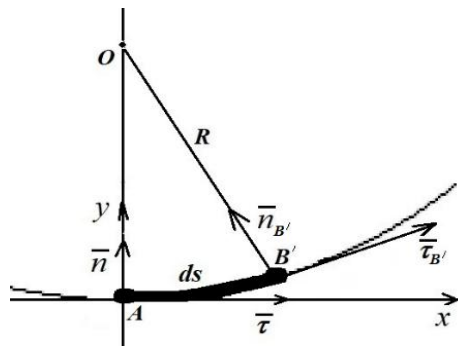


Рис. 4. Касательный и нормальный векторы $\bar{\tau}$, \bar{n} для элемента ds кольца

В общем виде сила, изгибающая плоскость кольца от второй пары, примет вид

$$\bar{F}'_{u_{3z}} = \left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial(F_{u_{3z}})}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{\tau} + F_{u_{3z}} d\varphi \cdot \bar{n}, \quad (11)$$

при этом пара в координатной форме станет такой

$$\begin{aligned} \bar{F}'_{u_{3z}} &= \left(\left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \right); F_{u_{3z}} d\varphi; 0 \right), \\ -\bar{F}'_{u_{3z}} &= \left(- \left(F_{u_{3z}} + \frac{\partial F_{u_{3z}}}{\partial \varphi} d\varphi \right); -F_{u_{3z}} d\varphi; 0 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Радиусы-векторы до каждой из этих сил: $\bar{r}_1 = \left(\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$. Аналогично предыдущим вычислениям (7) осуществляется расчет симметричного изгибающего момента от второй пары сил $\bar{M}'_{узз}$

$$\bar{M}'_{узз} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & r \\ -F_{узз} - \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi & -F_{узз} d\varphi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & -r \\ F_{узз} + \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi & F_{узз} d\varphi & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{узз} d\varphi \cdot \bar{\tau} - 2r \left(F_{узз} + \frac{\partial F_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (13)$$

Общий вектор изгибающего момента $\bar{M}'_{узз}$ в координатной форме имеет следующую зависимость:

$$\bar{M}'_{узз} = (M_{узз} d\varphi; -\left(M_{узз} + \frac{\partial M_{узз}}{\partial \varphi} d\varphi \right); 0). \quad (14)$$

Аналогичные вычисления выполняются для крутящих моментов поперечных сечений S элемента объема ds кольца $\bar{M}_{кр} = (M_{кр\tau}; M_{крn}; M_{крb})$, $\bar{M}'_{кр} = (M'_{кр\tau}; M'_{крn}; M'_{крb})$. Для этого определяются координаты радиусов-векторов \bar{r}_1 , \bar{r}_2 до точек приложений первой пары сил $F_{кр} \bar{n}, -F_{кр} \bar{n}$. Тогда $\bar{r}_1 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; r\right)$ и $\bar{r}_2 = \left(-\frac{ds}{2}; 0; -r\right)$. Вычисляется первый крутящий момент

$$\bar{M}_{кр} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & r \\ 0 & -F_{кр} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ -\frac{ds}{2} & 0 & -r \\ 0 & F_{кр} & 0 \end{vmatrix} = 2r F_{кр} \cdot \bar{\tau}. \quad (15)$$

Если модуль крутящего момента равен $|\bar{M}_{кр}| = M_{кр} = 2r F_{кр}$, то векторная величина $\bar{M}_{кр} = M_{кр} \bar{\tau}$. В координатном виде выражение для момента $\bar{M}_{кр}$ от первой пары сил $(\bar{F}_{кр}, -\bar{F}_{кр})$, в котором $M_{крn} = 0$, $M_{крb} = 0$, получается

$$\bar{M}_{кр} = (M_{кр}; 0; 0). \quad (16)$$

Противоположный ему момент от второй пары сил $-\left(F_{кр} \bar{n} + \frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi, -F_{кр} \bar{n} - \frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi \right)$. Для его нахождения необходимо вычислить производную $\frac{\partial (F_{кр} \bar{n})}{\partial \varphi}$, определить приращение вектора $F_{кр} \bar{n}$ и записать в координатной форме

$$\bar{F}'_{kp} = F_{kp} \bar{n} + \frac{\partial(F_{kp} \bar{n})}{\partial \varphi} d\varphi = F_{kp} \bar{n} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \bar{n} + F_{kp} \frac{\partial \bar{n}}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (17)$$

В общем виде закручивающее элемент ds кольца усилие от второй пары примет вид

$$\bar{F}'_{kp} = -F_{kp} d\varphi \cdot \bar{\tau} + \left(F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \bar{n} + \chi R F_{kp} d\varphi \cdot \bar{b}, \quad (18)$$

и в координатной форме будет таким

$$\bar{F}'_{kp} = \left(-F_{kp} d\varphi; F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi; \chi R F_{kp} d\varphi \right). \quad (19)$$

Противоположное ему усилие

$$-\bar{F}'_{kp} = \left(F_{kp} d\varphi; -F_{kp} - \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi; -\chi R F_{kp} d\varphi \right). \quad (20)$$

Радиусы-векторы до каждого из них $\bar{r}_1 = \left(\frac{ds}{2}; 0; -r \right)$ и $\bar{r}_2 = \left(\frac{ds}{2}; 0; r \right)$. Вычислим симметричный крутящий момент второй пары сил, закручивающих противоположное сечение S элемента кольца ds .

$$\bar{M}'_{kp} = \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & -r \\ F_{kp} d\varphi & -F_{kp} - \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi & -\chi R F_{kp} d\varphi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b} \\ \frac{ds}{2} & 0 & r \\ -F_{kp} d\varphi & F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi & \chi R F_{kp} d\varphi \end{vmatrix} = -2r \left(F_{kp} + \frac{\partial F_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cdot \bar{\tau} - 2r F_{kp} \cdot d\varphi \bar{n} + 0 \cdot \bar{b}. \quad (21)$$

Алгебраическая величина момента будет равна $M_{kp} = 2rF_{kp}$. В координатной форме вектор \bar{M}'_{kp} примет вид:

$$\bar{M}'_{kp} = \left(- \left(M_{kp} + \frac{\partial M_{kp}}{\partial \varphi} d\varphi \right); -M_{kp} d\varphi; 0 \right). \quad (22)$$

Выводы. На рисунке 5 изображена векторная схема приложенных изгибающих и крутящих моментов к элементу кольца ds , идентичная приведенной в [1].

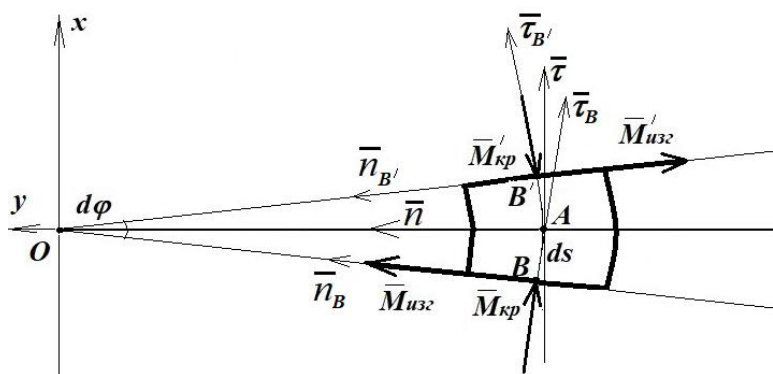


Рис. 5. Схема векторов изгибающих и крутящих моментов кругового элемента ds кольца

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
2. Бидерман В. Л. Поперечные колебания пружин // Расчеты на прочность. – М., 1962. – Вып.8. – С.256–270.
3. Dokukova N. A. and Konon P. N. General laws governing in mechanical vibratory systems / JEPT, 2006. – V. 79. – N. 4. – P. 824–831.
4. Докукова Н. А., Мартыненко М. Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук, 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
5. Мартыненко М. Д., Докукова Н. А., Бойко Л. И. О колебательных процессах в механических системах / Инженерно-физический журнал, 1999. – Т. 72 (3). – С. 491–494.
6. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Некоторые математические аспекты виброизоляции современных технических устройств // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Минск. – 2021. Выпуск – 36. – 6 с.
7. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование деформирований витков упругой цилиндрической пружины // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». Минск. – 2021. Выпуск – 36. – 8 с.
8. Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование динамического деформируемого состояния упругой цилиндрической пружины // Scientific collection “Interconf”, № 89. IV ISPC “Current issues and prospects for the development of scientific research”, 7–8 December, 2021. Orleans, France. – 14 с.
9. Докукова Н. А., Конон П. Н. Исследование двух физических моделей вязкой среды в задаче гидромеханической виброизоляции // Scientific collection “Interconf”, № 93. III ISPC “Scientific trends and trends in the context of globalization”, 21–22 December, 2021. Umeå, Sweden. – 15 с.
10. Высоцкий М. С., Докукова Н. А., Конон П. Н. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / Доклады Национальной академии наук Беларуси, 2006. – Т. 50. – С. 114–119.

Поступила: 31.03.2022

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Василевич Ю. В., Макеев С. В., Комиссаров В. В., Лапушкин А. С., Гончаров Г. Р. **Методика и результаты оценки вибрационной эффективности конструкций верхнего строения пути для условий метрополитена** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 3–11. Результаты натурных испытаний блоков БОМ-В при различных модификациях виброизолирующих слоев. В конструкцию вносились изменения по виду используемого материала, твердости виброизоляционных прокладок, их толщины, материала опорной площадки, а также их комбинации. – Ил. 7. Табл. 1. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3+51-74+622.2

Лопатин С. Н., Журавков М. А. **Некоторые модельные задачи, сопровождающие проходку шахтного ствола в многослойном соляном массиве на больших глубинах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 12–18. В статье рассматривается проблема моделирования напряженно-деформированного состояния горнотехнической системы «крепь ствола – вмещающий массив горных пород» при проходке шахтного ствола в многослойном массиве горных пород на больших глубинах. Основной вывод по результатам исследования заключается в том, что критерии прочности в перемещениях и деформациях более эффективны при оценке прочности массивов горных пород на таких глубинах. Классические теории прочности могут быть неприменимы для оценки прочности массива горных пород на больших глубинах. – Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Мойсейчик Е. А., Василевич Ю. В., Можаровский В. В., Мойсейчик А. Е., Неумержицкая Е. Ю. **Контроль сооружений и машин методом пассивной инфракрасной термографии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 19–28. Выделяющееся при работе сооружения, машины тепло создает поле температур соответствующих изделий. Величины поверхностных температур можно рассматривать в качестве диагностического параметра для оценки технического состояния структурных частей, узлов и деталей. Так как нагретые тела излучают тепловую энергию в инфракрасном волновом диапазоне, то проявление соответствующих температурных поверхностных полей может производиться с использованием методов компьютерной инфракрасной термографии. Такая технология теплового контроля позволяет достоверно выявлять опасные зоны в стальных изделиях, находить дефекты, контролировать их развитие, зарождение разрушения. Эта технология продемонстрирована на примерах композитных элементов машин и деформируемых растяжением стальных листовых элементах с конструктивными дефектами. – Ил. 7. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3+51-74

Николайчик М. А., Климкович Н. М. **Оценка напряженно-деформированного состояния солеотвала из галитовых отходов в условиях складирования шламов гидронамывом на тело солеотвала** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 29–35. В статье представлены результаты конечно-элементного моделирования процесса гидронамыва на затвердевшие галитовые отходы солеотвала новых слоев галитового шлама. Определены прочностные характеристики несущей конструкции солеотвала в соответствии с

энергетическим критерием прочности и критерием прочности Кулона-Мора. Результаты указывают на сохранение прочности солеотвала при намывке на его свободную поверхность каждого нового слоя шлама без формирования шламоохранилищ, огражденных системой дамб. – Ил. 9. Табл. 4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3:691

Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Василевич Ю. В. **Реализация расчета напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических труб из полимеров и композитов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 36–44. Разработаны численные методы расчета напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (в том числе трубопроводов) из новых армированных материалов, а также слоистых цилиндрических труб, находящейся под действием внутреннего давления с учетом влияния внешних факторов и процессов нагружения. Предложены алгоритмы вычисления напряжений в слоистой трубе, выполнены расчеты технических примеров. Предлагаемый программный комплекс может найти применение в машиностроении, теплоэнергетике при подборе материалов для конструкций с элементами в виде труб из композитов и полимеров. – Ил. 5. Библиогр.: 16 назв.

УДК 534-16:534-8:621.9.048.6

Степаненко Д. А., Бунчук К. А. **Определение эксплуатационных параметров ультразвуковых колебательных систем интегральным методом свободных колебаний** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр.45–53. В статье рассмотрена методика определения собственных частот колебаний и механической добротности ультразвуковых колебательных систем, основанная на применении интегрального метода свободных колебаний с ударным возбуждением. Рассмотрено влияние параметров ударного воздействия на частотный диапазон возбуждаемых колебаний. Описана методика определения механической добротности для каждой из собственных частот в случае многомодовых колебаний, основанная на использовании синхронной демодуляции. – Ил. 9. Табл. 4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 532.5

Поленов В. С., Чигарев А. В. **Математическое исследование двухфазных зернистых сред методом сейсмоакустической эмиссии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 54–60. В работе рассматривается математическое моделирование сейсмоакустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухфазных зернистых средах. Зная комплексные модули упругости зернистой среды, можно определить коэффициенты затухания и скорости распространения сейсмоакустических волн и волн спонтанной дисторсии в зернистых средах. – Библиогр.: 14 назв.

УДК 004.94:621.785.54

Веремейчик А. И., Нерода М. В. **Температурное поле и напряженно-деформированное состояние образцов из стали 40x13 при лазерной закалке** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 61–69. Проведена постановка и численное решение задач нестационарной теплопроводности и термоупругости по исследованию температурного поля и напряженно-деформированного состояния при лазерной закалке образцов из стали 40X13 лазером непрерывного действия для различных параметров термообработ-

ки. С помощью расчетной платформы ANSYS Workbench исследовано влияние скорости движения лазерного луча, диаметра пятна нагрева и граничных условий на температурное поле и термонапряжения. По результатам компьютерного моделирования в ANSYS испытаний образцов на осевое растяжение теоретически определены механические характеристики стали. – Ил. 7. Табл. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3+539.389+620.17

Холодарь Б. Г. **Большие перемещения и напряженно-деформированное состояние упруго-пластического консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 70–76. Приведено численное решение задачи об определении перемещений и напряженно-деформированного состояния консольного стержня из упруго-пластического материала под действием возрастающей поперечной силы. Проанализировано влияние нагрузки и формы диаграммы растяжения материала на особенности распределения изгибающего момента, напряжений и деформаций по оси стержня. Решение показывает, что использованная методика дает сходящийся результат. – Ил. 8. Библиогр.: 4 назв.

УДК 532.526.75+531.49

Авдейчик Е. В., Конон П. Н. **Упрощенная модель движения малой капли по смачиваемой плоской вращающейся поверхности** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 77–85. Рассматривается движение малой капли по горизонтальной плоскости, вращающейся с постоянной угловой скоростью. В процессе движения капля теряет вещество за счет образования тонкого следа. В рамках предлагаемой упрощенной модели движение капли описывается тремя координатами положения ее центра масс, двумя параметрами формы капли, характеризующими степень и направление отклонения ее от вращательной симметрии, и четырьмя параметрами течения: двумя координатами вектора скорости проекции на подложку центра масс капли и двумя координатами вектора скорости жидкости непосредственно над пограничным слоем. – Ил. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 621.3.07

Кузнецов В. В., Марко А. Ф., Карпович С. Е. **Система перемещений с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 86–95. В статье представлена система перемещений с шестью степенями свободы, построенной на базе механизма параллельной кинематики в виде раскрывающегося тетраэдра и соответствующего ему гибридного шестикоординатного привода прямого действия. Для этой системы перемещений предложены математическая модель и ее алгоритмизация, позволившая разработать программу в среде MATLAB для имитационного моделирования кинематики. Проведена верификация и натурное макетирование системы перемещений. – Ил. 7. Библиогр.: 8 назв.

УДК: 519.6+539.3

Куликов И. С., Ширвель П. И. **Численный метод моделирования напряженно-деформированного состояния дисков турбин при неосесимметричном нагреве** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 96–101. Дано численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии круглых дисков при неравномерном нагреве как в ради-

альном, так и в окружном направлениях. Задача решалась в перемещениях с учетом физической нелинейности в виде ползучести. На основе метода конечных разностей предложен численный алгоритм решения задачи. – Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

УДК 621.9.011:517.962.1

Довнар С. С., Яцкевич О. К., Авсиевич А. М., Колесников Л. А., Яворский А. В. **МКЭ-анализ конструктивных мер по усилению бетоном компактного 5-осевого станка** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 102–109. Для 5-осевого токарно-фрезерного станка выполнен статический, модальный и гармонический МКЭ-анализ. Обнаружена недостаточная жесткость исходной чугунной несущей системы. Статическая жесткость шпинделя в направлениях X , Y , Z находится на уровне 24,1–47,3 Н/мкм. – Ил. 7. Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.371, 539.372, 539.62, 539.319, 539.388.1

Николайчик М. А., Маевский П. С. **Моделирование усталостного износа шахтного проводника при различных конфигурациях контактного взаимодействия с направляющими роликами** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 110–117. В статье рассмотрено моделирование усталостного износа при многоцикловом взаимодействии направляющего ролика или системы из двух роликов с шахтным проводником при движении шахтного подъемного сосуда. Рассмотрены различные типы контактов между направляющим роликом и проводником. Установлены закономерности между наличием трения и количеством циклов до разрушения. Приведен сравнительный анализ применения разных моделей износа. – Ил. 7. Табл. 2. Библиогр.: 16 назв.

УДК 536.24

Конон П. Н., Поддубная М. А. **Процессы конденсации и сушки при нестационарном тепло- и массообмене в двухслойной дымовой трубе** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 118–126. Создана модель совместного тепло- и массопереноса в двухслойной конструкции дымовой трубы с переменными теплофизическими характеристиками и учетом конденсации на внутренней поверхности трубы, определения пленки конденсата, диффузного проникновения влаги вглубь пористого скелета трубы и его просушивания. Численным методом исследована задача определения нестационарных температурных и влажностных полей в трубе в период пуска и устойчивой ее работы. Определены наиболее опасные зоны с большим градиентом температур. Разработана приближенная модель определения толщины пленки конденсата при нестационарном тепло- и массообмене. Получена инженерная формула определения времени сушки увлажненного скелета трубы. Результаты работы по нестационарному расчету тепло- и массообмена могут быть использованы проектными организациями при совершенствовании конструкций и выбору режимов эксплуатации высотных дымовых труб. – Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 534-16:534-8:621.9.048.6

Степаненко Д. А. **Моделирование многоступенчатых кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний методом конечных элементов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2025, вып. 37, стр. 127–131. В статье описана конструкция многоступенчатых кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний и рассмотрена методика их моделирования с помощью метода конечных элементов. Показано, что применение многоступенчатых

кольцевых концентраторов позволяет повысить коэффициент усиления колебаний по амплитуде по сравнению с коэффициентом усиления для единичной ступени при сохранении малых габаритных размеров колебательной системы. Установлено, что изменение толщины ступеней концентратора практически не влияет на собственную частоту его изгибных колебаний, однако при увеличении толщины снижается амплитуда паразитных внеплоскостных колебаний, что позволяет повысить коэффициент усиления колебаний по амплитуде. – Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 621.9.06

Довнар С. С., Якимович А. М., Лапука А. Д. **МКЭ-анализ бетонно-бионического бандажа подвижной колонны станка** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 132–137. Для повышения жесткости подвижной колонны многоцелевого станка предложен древовидный бетонный бандаж. Для профилирования бандажа использована бионическая кривая. Проведен МКЭ-анализ усиления бандажом. Статические деформации ослаблены в 2,03 раза. Картина резонансов остается стабильной. Она включает два изгибных резонанса (14–18 Гц) и опасный крутильный резонанс колонны (~35 Гц). Присутствие бионического бандажа ослабляет резонансные пики в 1,9–2,7 раз. Усиленный станок становится более приемлемым для резания одновременно точно и производительно. – Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Акимов В. А., Гончарова С. В., Беляцкая Л. Н. **Анализ напряженно деформируемого состояния материала при его переработке методом рассогласованной прокатки** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 138–143. Актуальность данной работы тесным образом связана с экологической безопасностью Беларуси. Переработка изношенных автомобильных шин становится насущной проблемой во всем мире. На первом этапе научных исследований, с целью оценки возможностей разрушения материала шин, получили формулы для вычисления усилий, создаваемых устройствами типа прокатного станка. Полученные новые соотношения позволяют определить мощностные и энергетические затраты, необходимые для разрушения материалов шин. – Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 62-1/-9

Быков К. Ю., Качанов И. В., Ленкевич С. А. **Влияние размеров исходной металлической вставки на геометрические параметры биметаллического соединения при выдавливании дорожных резцов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 144–152. Показана возможность применения программного комплекса DEFORM-3D при исследованиях, направленных на изучение особенностей формирования биметаллического соединения при скоростном комбинированном выдавливании биметаллических дорожных резцов. – Ил. 7. Библиогр.: 6 назв.

УДК 621.835-41

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. **Определение нагрузок в звеньях бортового планетарного редуктора колесно-шагающей ходовой системы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 153–162. В статье описана методика определения динамических нагрузок, действующих на кривошипные бортового планетарного редуктора колесно-шагающей ходовой системы. Динамический анализ выполнен для переменной частоты вращения ступицы

двигателя. Приведенную в статье методику можно использовать для расчета на прочность деталей колесно-шагающего двигателя, когда движение происходит в режиме разгона или торможения. – Ил. 1. Табл. 4. Библиогр. 10.

УДК 539.374

Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. **О законах сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 163–167. В работе построены законы сохранения для уравнений теории упругости в стационарном случае. Эти законы линейны по производным первого порядка. С помощью законов сохранения решена первая краевая задача. Решение получено в виде квадратур по замкнутому граничному контуру. Ключевые слова работы: теория упругости, законы сохранения, краевая задача. – Ил. 1. Табл. 4. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.37

Одинокова О. А., Драчев К. А. **Исследование механических свойств полилактида применительно к методам FDM-печати** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 168–173. Проведены испытания образцов из полилактида на растяжение-сжатие в режимах ползучести и растяжения-сжатия на прочность при различных способах укладки слоев пластика методом FDM-печати. Показано влияние направления приложения нагрузки относительно слоев на физико-механические свойства образцов. Следует отметить, что, несмотря на использование одного пластика при изготовлении всех образцов, готовые изделия (образцы) получились с совершенно разными физико-механическими свойствами в зависимости от ориентации образующих их волокон. – Ил. 7. Библиогр.: 4 назв.

УДК 538.93

Грода Я. Г., Ласовский Р. Н., Бильданов Э. Э. **Кинетическая диффузия в решеточном флюиде с конкурирующими взаимодействиями на простой кубической решетке** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 174–180. Рассмотрен процесс диффузии решеточного флюида с конкурирующими межчастичными взаимодействиями на простой кубической решетке. Предложен алгоритм и выполнено компьютерное моделирование процесса миграции частиц по методу Монте-Карло. Предпринята попытка оценить кинетический коэффициент диффузии с помощью соотношения Жданова на основе информации о равновесных параметрах системы. – Ил. 4. Библиогр.: 15 назв.

УДК 539.374.4:539.214.9

Сосенушкин Е. Н., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Архипов А. А. **Решение задачи Л. Прандтля применительно к фланцу, занимающему область сложной конфигурации** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 181–186. Уточнена расчетная схема для частного случая границы сложной конфигурации и решена краевая задача затекания металла в ребра пластически деформируемого фланца. Контактное давление, компонента скорости течения и сила деформирования рассмотренного участка пластической области представлены аналитическими зависимостями. – Ил. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 51-72, 51-74, 539.61

Николайчик М. А., Матиевская А. В. **Дискретно-элементное моделирование процесса разгрузки шахтного подъемного сосуда** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 187–194. Разработаны твердотельные модели различных конструкций скипов и дискретно-элементная модель транспортируемого груза. Произведена оценка времени разгрузки скипа, а также массы слежавшейся руды в зависимости от угла наклона бункера. В качестве установочного параметра при проведении расчетов использовался коэффициент отношения силы адгезии к силе тяжести. – Ил. 11. Табл. 5. Библиогр.: 7 назв.

УДК 531.011

Кафтайкина Е. Н., Докукова Н. А. **О постановке задачи изгибно-крутильных колебаний упругих колец** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 195–202. В работе рассматриваются уравнения пространственного равновесия в естественной системе координат бесконечно малого элемента кольца с линейными соотношениями между перерезывающими силами и моментами относительно смещений и закручиваний. Получены уравнения динамического равновесия относительно соответствующих осей. Составлены четыре уравнения для нахождения искомых физических переменных смещений точек сечений кругового кольца из плоскости кольца, их углов закручиваний, продольных и радиальных смещений бесконечно малых элементов. Представленная система уравнений соответствует известной в научной литературе и имеет существенную особенность. – Ил. 2. Библиогр.: 16 назв.

УДК 621.835-41

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. **Построение эвольвентных профилей зубьев некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 203–216. В статье приведена методика расчета участков эвольвент, которые используются для построения профилей зубьев некруглых зубчатых колес. Обосновано применение некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя. Выполнен расчет координат точек участков эвольвент, используемых для профилирования зубьев. – Ил. 2. Табл. 4. Библиогр. 11.

УДК 539.3

Моисеенков Д. В. **Анализ напряженно-деформируемого состояния ножей ротора** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 217–221. В работе предложена динамическая модель однороторной дробилки для переработки автомобильных покрышек в резиновую крошку. Использование представленной модели позволяет определить оптимальные характеристики измельчающего оборудования и режимы его работы. Разработанная модель может быть использована для решения задач измельчения в области пищевой, сельскохозяйственной, горнодобывающей и нефтеперерабатывающей промышленности. – Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

УДК 531.3

Тищенко Н. М., Гончаров М. В. **Моделирование движения механических частиц в роторе декантерной центрифуги** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 222–224. В статье рассмотрены силы, действующие на механические частицы, находящиеся в нефтешламе, в результате вращения ротора и шнека декантерной центрифуги, получено диффе-

ренциальное уравнение горизонтального движения частицы, находящейся в контакте с цилиндрической частью поверхности ротора и записано его решение в общем виде. – Ил. 2. Библиогр.: 1 назв.

УДК 531.011

Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. **Исследование изгибающих и крутящих моментов бесконечно малого элемента кругового кольца** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2022, вып. 37, стр. 225–232. Приведены изгибающие и крутящие моменты бесконечно малого элемента кругового кольца с линейными соотношениями относительно деформаций и смещений. Получена общая схема векторов исследуемых моментов кругового элемента кольца, полностью совпадающая с известной в научной литературе. – Ил. 5. Библиогр. – 10 назв.

ABSTRACTS

UDC 539.3

Vasilevich Yu. V., Makeyev S. V., Komissarov V. V., Lapushkin A. S., Goncharov G. R. **Methods and results of vibration assessment the effectiveness of the structures of the up-per structure of the path for metro conditions.** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 3–11. The results of full-scale tests of BOM-B blocks with various modifications of vibration-insulating layers. Changes were made to the design according to the type of material used, the hardness of the vibration isolation pads, their thickness, the material of the support platform, as well as their combination. – Fig. 7. Tab. 1 Ref.: 8 titles.

UDC 539.3+51-74+622.2

Lapatsin S. N., Zhuravkov M. A., **Some model problems accompanying mine shaft excavation process in a multilayered salt rock massif at big depths** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 12–18. The article deals with the problem of stress-strain state modeling of the mining system "shaft support-enclosing rock mass" during the process of excavation of a multilayered rock massif. The main conclusion of the research is that the strength criteria in displacements and strains are more effective for assessing the strength of rock masses. Classical strength theories may not be applicable for the strength assessments of the rock massifs at great depths. – Fig. 4. Tab. 2 Ref.: 11 titles.

UDC 539.3

Moiseychik E. A., Vasilevich Yu. V., Mozharovsky V. V., Moiseychik A. E., Neumerzhitskay E. Yu. **Control of structures and machines by passive infrared thermography method** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 19–28. The heat released during the operation of a structure or machine creates a temperature field for the corresponding products. The values of surface temperatures can be considered as a diagnostic parameter for assessing the technical condition of structural parts, assemblies and parts. Since heated bodies radiate thermal energy in the infrared wave range, the manifestation of the corresponding temperature surface fields can be carried out using computer infrared thermography methods. This thermal control technology makes it possible to reliably identify dangerous zones in steel products, find defects, control their development, and the initiation of destruction. This technology is demonstrated on the examples of composite machine elements and tensile steel sheet elements with structural defects. – Fig. 7. Ref.: 11 titles.

UDC 539.3+51-74

Nikolaitchik M. A., Klimkovich M. M. **Estimation of stress-strain state of salt dump of halite waste by hydraulic washing in storage conditions** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 29–35. The results of finite element modeling of the process by hydraulic washing the new layers of halite sludge on solidified halite waste of salt dump are presented in article. The strength characteristics of the load-bearing structure of the salt dump are determined in accordance with the energy strength criterion and the Coulomb-Mohr strength criterion. The results indicate that the strength of the salt dump is preserved when each new layer of sludge is washed on its free surface without the formation of sludge storages protected by a system of dams. – Fig. 9. Tab. 4 Ref.: 4 titles.

UDC 539.3:691

Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S., Vasilevich Yu. V. **Realization of calculation of the stress-strain state of laminated cylindrical pipes made of polymers and composites** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 36–44. Numerical methods for calculating the stress-strain state of laminated constructions (including pipelines) made of new reinforced materials and also of laminated cylindrical pipes exposed to internal pressure taking into consideration the influence of external factors and loading processes have been developed. Stress calculation algorithms for layered pipes are proposed, and calculations of technical examples are made. The proposed software package can be used in machine-building, heat power industry when selecting materials for structures with elements in the form of pipes made of composites and polymers. – Fig. 5. Ref.: 16 titles.

UDC 534-16:534-8:621.9.048.6

Stepanenko D. A., Bunchuk K. A. **Determination of operating parameters of ultrasonic vibratory systems using integral method of free vibrations** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 45–53. The article considers methodology for determination of eigenfrequencies and mechanical quality factor (Q-factor) of ultrasonic vibratory systems based on application of integral method of free vibrations with impact excitation. Effect of impact parameters on the frequency range of excited vibrations is considered. Methodology for determination of mechanical Q-factor for each of the eigenfrequencies for the case of multimodal vibrations based on application of synchronous demodulation is described. – Fig. 7. Tab. 1 Ref.: 9 titles.

UDC 532.5

Polenov V. S., Chigarev A. V. **Mathematical study of two-phase granular media by the method of seismoacoustic emission** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 54–60. Static, modal, and harmonic FEA for 5-axis turning-milling machine is fulfilled. Insufficient rigidity of the cast iron load-bearing system is revealed. Static spindle rigidity for X, Y, Z directions is inside the low interval 24.1–47.3 N/ μm . – Ref.: 14 titles.

UDC 004.94:621.785.54

Veremeychik A. I., Neroda M. V. **Temperature field and stress-strain state of 40x13 steel samples during laser quenching** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 61–69. The formulation and numerical solution of the problems of unsteady thermal conductivity and thermoelasticity for the study of the temperature field and stress-strain state during laser hardening of 40Kh13 (AISI 420) steel samples with a continuous laser for various heat treatment parameters is carried out. With the help of ANSYS Workbench, the influence of the speed of the laser beam, the diameter of the heating spot and boundary conditions on the temperature field and thermal stresses has been studied. According to the results of computer simulation in ANSYS of axial tensile tests of samples, the mechanical characteristics of steel are theoretically determined. – Fig. 7. Tab. 2. Ref.: 10 titles.

UDC 539.3+539.389+620.17

Kholodar B. G. **Large displacements and stress-strain condition of the elastic-plastic cantilever rod, loaded with tracking transverse force** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 70–76. Presented is a numerical solution for a problem of determining the displacements and the stress-strain

state of a cantilever rod made of an elastic-plastic material under the action of an increasing transverse force. The influence of the load and the shape of the tension diagram of the material on the features of the distribution of the bending moment, stresses, and strains along the axis of the rod is analyzed. The solution shows that the developed method gives a converged result. – Fig. 8. Ref.: 4 titles.

UDC 532.526.75+531.49

Audzeichyk Ya. V., Konon P. N. **Simplified model of the movement of a small drop on the wetted Flat rotating surface** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 77–85. The motion of a small drop along a horizontal plane rotating with a constant angular velocity is considered. In the process of movement, the drop loses substance due to the formation of a thin trace. Within the framework of the proposed simplified model, the motion of a drop is described by three coordinates of the position of its mass center, two parameters of the drop shape characterizing the degree and direction of its deviation from rotational symmetry, and four flow parameters: two vector coordinates of the velocity of the drop mass center projection onto the substrate and two vector coordinates of the velocity of the liquid directly above the boundary layer. – Fig. 2. Ref.: 12 titles.

UDC 621.3.07

Kuzniatsova V., Marko A., Karpovich S. **System of displacements with six degrees of freedom based on a hybrid driver of direct action** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 86–95. The paper presents the system of displacements with six degrees of freedom based on the mechanism of parallel kinematics in the kind of a throwing tetrahedron and appropriate six coordinates hybrid driver of direct action. For this system mathematical model and its algorithmization, allowed to develop a program in MATLAB for kinematics simulation are proposed. Verification and wildling of the system of displacements is performed. – Fig. 7. Ref.: 8 titles.

UDC 519.6+539.3

Kulikov I. S., Shirvel P. I. **Numerical method for modeling the stress-strain state of turbine disks under non-axisymmetric heating** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, crp. 96–101. A numerical solution of the problem of the stress-strain state of circular disks under uneven heating in both radial and circumferential directions is given. The problem was solved in displacements taking into account the physical nonlinearity in the form of creep. Based on the finite difference method, a numerical algorithm for solving the problem is proposed. – Fig. 3. Ref.: 3 titles.

UDC 621.9.011:517.962.1

Dounar S. S., Yatskewich O. C., Ausievich A. M., Kalesnikau L. A., Yavorskij A. V. **FEA of design solutions for portable 5-axis machine reinforcement by concrete** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 102–109. Simulation shows low effectivity of concrete reinforcement of the base only. It is reasonable to pour concrete into cavities of all structural parts at the top and low positions simultaneously. It brings twofold growth of the static spindle rigidity. Resonance peaks at the FRF's are weakened in 1.72–2.33 time for X, Y, Z directions. All resonances shift to higher frequencies. Intervals to productive precise cuttings become wider. – Fig. 7. Tab. 1 Ref.: 4 titles.

UDC 539.371, 539.372, 539.62, 539.319,539.388.1

Nikolaitchik M. A., Mayevski P. S. **Simulation of fatigue wear of a mine conductor with various configurations of contact interaction with guide rollers** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 110–117. The article examines the modeling of fatigue wear during multi-cycle interaction of a guide roller or a system of two rollers with a shaft guide during the movement of a shaft hoisting vessel. Different types of contacts between a guide roller and a conductor are considered. Regularities between the presence of friction and the number of cycles before failure are established. A comparative analysis of the application of different wear models is given. – Fig. 7. Tab. 2 Ref.: 16 titles.

UDC 536.24

Konon P. N., Poddubnaya M. A. **Condensation and drying processes during non-stationary heat and mass transfer in a two-layer chimney** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 118–126. In the study, a model of joint heat and mass transfer in a two-layer chimney structure with variable thermophysical characteristics and taking into account condensation on the inner surface of the pipe and diffuse penetration of moisture into the pores of the material is proposed. The amount of condensate and the drying time of the structure have been determined. The problem of determining the non-stationary fields of temperature and humidity in the pipe during the start-up period and its stable operation is solved by the numerical method. – Fig. 3. Tab. 1. Ref.: 11 titles.

UDC 534-16:534-8:621.9.048.6

Stepanenko D. A. **Modeling of multistep ring-shaped amplifiers of ultrasonic vibrations using finite element method** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 127–131. The article describes design of multistep ring-shaped amplifiers of ultrasonic vibrations and methodology of their modelling using finite element method. It is shown that application of multistep ring-shaped amplifiers enables improvement of amplifier’s gain in comparison with its value for single-step amplifier while saving overall dimensions of vibratory system. It is found out that variation of thickness of amplifier’s steps has negligible effect on eigenfrequency of its flexural vibration, however increase in thickness results in reduction of parasitic out-of-plane vibrations enabling improvement of amplifier’s gain. – Fig. 4. Ref. – 6 titles.

UDC 621.9.06

Doumar S. S., Iakimovitch A. M., Lapuka A. D. **FEA of concrete bionic bandaging of machine moving column** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, стр. 132–137. Tree-like concrete bandage is proposed to increase travelling column rigidity for heavy multipurpose machine. Bionic curve was created for bandage forming. FEA is used for simulation of bandaging. Deformations in statics are weakened in 2.03 times. Picture of eigenmodes remains stable. It includes two bending resonances (14–18 Hz) and dangerous torsional resonance (~35 Hz). Bionic bandage presence damps resonant peaks in 1.9–2.7 times. Reinforced machine should be more suitable for precise cutting with high output. – Fig. 4. Tab. 2. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Akimov V. A., Goncharova S. V., Belyatskaya L. N. **Analysis of the stress-strain state of the material during its processing by the method of mismatched rolling** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37,

p. 138–143. The relevance of this work is closely related to the environmental safety of Belarus. Recycling of worn-out car tires is becoming an urgent problem all over the world. At the first stage of scientific research, in order to assess the possibilities of destruction of tire material, formulas were obtained for calculating the forces created by devices such as a rolling machine. The obtained new ratios allow us to determine the power and energy costs necessary for the destruction of tire materials. – Fig. 2. Ref.: 6 titles.

UDC 62-1/-9

Bykov K. Y., Kachanov I. V., Lenkevich S. A. **Influence of the dimensions of the initial metal insert on the geometric parameters of the bimetallic connection during the extrusion of road milling picks** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 144–152. The possibility of using the DEFORM-3D software package in research aimed at studying the features of the formation of a bimetallic connection during high-speed combined extrusion of bimetallic road milling picks is shown. – Fig. 7. Ref.: 6 titles.

UDC 621.835-41

Skoybeda A. T., Zhukavets V. M. **Determination of loads in the links of the onboard planetary gearbox of a wheel-step running system** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 153–162. The article describes a method for determining the dynamic loads, acting on the cranks of the onboard planetary gearbox of a wheel-step running system. The dynamic analysis was performed for a variable speed of the mover hub. The method given in the article can be used to calculate the strength of the parts of a wheel-step mover, when the movement occurs in the acceleration or deceleration mode. – Fig. 1. Tab. 4. Ref.: 10 titles.

UDC 539.374

Senashov S. I., Savostyanova I. L. **On conservation laws for solving problems of deformable solid mechanics** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 163–167. Conservation laws for the equations of elasticity theory in the stationary case are constructed in this paper. These laws are linear in first-order derivatives. With the help of conservation laws, the first boundary value problem is solved. The solution is obtained in the form of quadratures along a closed boundary contour. – Fig. 1. Tab. 4. Ref.: 10 titles.

UDC 539.37

Odinokova O. A., Drachev K. A. **Study of the mechanical properties of polylactide in relation to fdm printing methods** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 168–173. Tensile-compression tests of polylactide specimens in creep and tensile-compression modes for strength at different ways of laying of plastic layers by FDM-printing have been carried out. Influence of direction of load application in relation to layers on physical and mechanical properties of samples is shown. It should be noted that despite using the same plastic for all the samples, the finished products (samples) have quite different physical and mechanical properties depending on the orientation of the fibres forming them. – Fig. 7. Ref.: 4 titles.

UDC 538.93

Groda Ya. G., Lasovsky R. N., Bildanau E. E. **Jump diffusion in the lattice fluid with competing interactions on the simple cubic lattice** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 174–180. The process

of diffusion of a lattice liquid with competing interparticle interactions along a simple cubic lattice is considered. A Monte Carlo algorithm for modeling the migration of adparticles on the lattice is proposed. Computer simulation of the diffusion process has been implemented. An attempt is made to estimate the jump diffusion coefficient of the system using the Zhdanov's expression based on information on the equilibrium parameters of the system. – Fig. 4. Ref. 15 titles.

UDC 539.374.4:539.214.9

Sosenushkin E. N., Kadyrov V. A., Yanovskaya E. A., Arkhipov A. A. **Solution of L. Prandtl's problem as applied to a flange occupying an area of complex configuration.** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 181–186. The design scheme for the particular case of a complex boundary is refined and the boundary value problem of metal inflow into the edges of a plastically deformable flange is solved. The contact pressure, the component of the flow velocity and the deformation force of the considered section of the plastic region are presented by analytical dependences. – Fig. 2. Tab. Ref.: 12 titles.

UDC 51-72, 51-74, 539.61

Nikolaitchik M. A., Matievskaya A. V. **Discrete-element modeling of the process of unloading a mine lifting vessel** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 187–194. Solid models of various skip designs and a discrete-element model of the transported cargo have been developed. The estimation of the time of unloading the skip, as well as the mass of compacted ore, depending on the angle of inclination of the bunker, was made. The force fraction (coefficient of adhesion force to gravity) was used as a setting parameter in the calculations. – Fig. 11. Tab. 5. Ref.: 7 titles.

UDC 531.36

Kaftaikina E. N., Dokukova N. A. **About setting the task of bending-torsional vibrations of elastic rings** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 195–202. The task of bending-torsional and radial-longitudinal oscillations of elastic rings is presented. The obtained equations of dynamic equilibrium are compared with those known in the scientific literature and their significant difference is commented on. – Fig. 2. Ref.: 16 titles.

UDC 621.835-41

Skojbeda A. T., Zhukavets V. M. **Construction of involute profiles of teeth of non-circular gears in the drive of the wheel-step mover** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 203–216. The article describes a method for calculating involute sections, that are used to construct tooth profiles of non-circular gears. The use of non-circular gears in the drive of wheel-step mover has been substantiated. The calculation of the coordinates of the points of the involute sections used for profiling the teeth is presented. – Fig. 2. Tab. 4. Ref.: 11 titles.

UDC 539.3

Moiseenkov D. V. **Analysis of the stress-deformable state of the rotor blades** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2022, issue 37, p. 217–221. 1. The paper proposes a dynamic model of a single-rotor crusher for processing car tires into crumb rubber. 2. The use of the presented model makes it possible to determine the optimal characteristics of the grinding equipment and its operating modes 3. The developed model can be used to solve grinding problems in the food, agricultural, mining and oil refining industries. – Fig. 4. Ref.: 5 titles.

UDC 531.3

Tishchenkov N. M., Goncharov M. V. **Simulation of the movement of mechanical particles in the rotor of a decanter centrifuge** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 222–224. The article considers the forces acting on mechanical particles in oil sludge as a result of rotation of the rotor and the screw of the decanter centrifuge, a differential equation of horizontal motion of a particle in contact with the cylindrical part of the rotor surface is obtained and its solution is written in general form. – Fig. 2. Ref.: 1 titles.

UDC 531.011

Dokukova N. A., Kaftaikina E. N. **Study of bending and torques of infinitesimal circular ring element** // International Scientific and Technical Collection “Theoretical and Applied Mechanics”, Minsk, 2022, issue 37, p. 225–232. Bending and torque moments of infinitesimal element of circular ring with linear ratios relative to deformations and displacements are given. A general diagram of the vectors of the investigated moments of the circular element of the ring is obtained, completely coinciding with the known in the scientific literature. – Fig. 5. Ref.: 10 titles.

ПРАВИЛА ПРИЕМА СТАТЕЙ

В сборник «Теоретическая и прикладная механика» принимаются статьи, авторами которых являются профессорско-преподавательский состав, аспиранты, соискатели, докторанты, научные сотрудники, инженеры и ведущие специалисты, работающие в учебных учреждениях, исследовательских и научно-технических организациях Республики Беларусь. Также в сборнике могут публиковаться статьи студентов и магистрантов в соавторстве с научными руководителями. В сборнике могут публиковаться работы зарубежных авторов. Статьи могут присылаться на английском языке.

Материалы статей авторы могут предоставить в редакцию на электронном носителе или прислать на электронную почту (sborn.tpm@yandex.ru, sborn.tpm@gmail.com). Материалы, присланные в редакцию сборника автору(-ам) не возвращаются. Редакция берет на себя обязательства по недопущению распространения сторонним лицам присланных автором(-ами) материалов.

Основные требования к присылаемым статьям основываются на требованиях ВАК Республики Беларусь к оформлению научных публикаций (статей). Требования составлены в соответствии с главой № 5 «Инструкции о порядке оформления квалификационной научной работы (диссертации) на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук, автореферата и публикаций по теме диссертации», утвержденной постановлением Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь 28.02.24 г. № 3.

Статьи, поступившие в редакцию сборника, рассматриваются редакционной коллегией сборника в двухнедельный срок на предмет соответствия статьи профилю издания и требованиям к оформлению. В случае несоответствия материалов указанным требованиям редакция может отправить статью ответственному автору на доработку или отказать в публикации данной статьи. В случае грубого нарушения правил подготовки статей или очевидного несоответствия тематики статьи тематике издания – статья не принимается к рассмотрению. Максимальное количество статей, принимаемых к публикации от одного автора или от одного коллектива авторов – не более четырех штук.

Редакция не принимает статьи, опубликованные ранее в других журналах или научных изданиях, а также материалы дублирующие предшествующие работы автора(-ов) или доподлинно копирующие части из общедоступных и известных учебных пособий или публикаций. Возможна публикация расширенного варианта какой-либо работы с обязательным упоминанием исходного ее варианта в списке литературных источников и тексте. Поступившие в редакцию материалы проверяются на антиплагиат посредством российской системы обнаружения текстовых заимствований «Антиплагиат» (на странице сервиса – <https://bntu.antiplagiat.ru>). Авторы статей несут всю ответственность за достоверность и точность содержащейся в них информации, корректность имеющихся в тексте ссылок на интернет-ресурсы и литературу. Все ссылки на литературу и источники должны соответствовать общепринятому формату ГОСТ. В частности – ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления», ГОСТ 7.82-2001 «Библиографическая запись. Библиографическое описание электронных ресурсов. Общие требования и правила составления», а так же ГОСТ 7.80-2000, ГОСТ 7.0.12-2011, СТБ 7.12-2001, ГОСТ 7.11-2004 (ИСО 832:1994).

По содержанию статьи должны быть современными, на актуальные и востребованные темы теоретической и прикладной механики, механики материалов, механики деформируемого твердого тела и др. В статье должна быть представлена ее научная и практическая ценность. Статьи должны содержать следующие основные разделы или их аналоги: «Введение», «Постановка задачи», «Решение задачи», «Заключение/Выводы». Статьи должны содержать четкую логическую структуру повествования, проходящую через весь текст. Задача и ее решение должны быть изложены научным языком с лингвистически и грамматически верными пояснениями. В тексте повествования допускается использование только общеизвестных и «не двусмысленных» научных концепций и понятий без двойного изложения материала. Предоставляемая статья должна описывать решение поставленной проблемы, в ней должна быть представлена возможность проверки методов и результатов исследования.

В представляемой статье не допускается использование неприемлемых с морально-этической точки зрения читателей выражений и смысловых концептов. Автор несет полную ответственность за информацию, представляемую в статье. В случае, если редакция журнала не может проанализировать структуру или смысловую последовательность информации, представленной в статье, то такие материалы либо отправляются на доработку автору(-ам), либо не принимаются к рассмотрению.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Вышедшие электронные версии Сборника «Теоретическая и прикладная механика» можно найти на портале Репозитория БНТУ (<https://rep.bntu.by/handle/data/51116>) или на портале Национальной библиотеки Беларуси (<https://e-catalog.nlb.by/Collection/BY-NLB-br77969/CollectionList#holdings>).

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Оформление статьи должно удовлетворять следующим требованиям:

Формат документа – *Microsoft Word 2007, 2010* и выше, Размер бумаги – А4 (210×297мм).

Поля. Верхнее – 20 мм, нижнее – 25 мм, левое – 25 мм, правое – 25 мм.

Объем статей не должен превышать 14 страниц (не менее 14 тысяч печатных знаков). В случае значительного превышения установленного допустимого количества страниц на статью рекомендуется разделить статью на две последовательные статьи с соответствующей нумерацией. Структура статьи должна включать основные разделы: «Введение», «Основная часть», «Выводы», «Литература»; а также дополнительные разделы необходимые для раскрытия смысла статьи.

Язык статьи. Статья должна быть написана на русском, белорусском или английском языках.

Заголовок. УДК – указывается(-ются) индекс(-ы) публикации по универсальной десятичной классификации, в верхнем левом углу листа (**прописными буквами, шрифт 14 пт., курсив, выравнивание по левому краю**). Затем указывается **название доклада (прописными буквами, шрифт 14 пт., полужирный, выравнивание текста по центру), затем фамилия(-ии) и инициалы автора(-ов) (шрифт 14 пт., полужирный, выравнивание текста по центру)**. Затем – **название(-я) учреждения(-ий), организации(-ий)** (выравнивание текста по центру, шрифт 12 пт., курсив). Фамилия(-ии) и названия организации(-ий) имеют верхний индекс, указывающий на принадлежность одного к другому.

Основной текст. Статья должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.5–98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», ГОСТ 2.105–95 «Межгосударственный стандарт. Общие требования к текстовым документам». Шрифт текста Times New Roman – обычный – 14 пт. Межстрочный интервал – одинарный, абзац (отступ первой строки) – 1 см. Отступ: слева – 0, справа – 0. Интервал: перед – 0, после – 0. Автоматическая расстановка переносов. Запрет висячих строк. Выравнивание текста по ширине. Страницы нумеруются внизу страницы по центру.

Формулы. Формулы должны быть подготовлены в программе *MathType* (Размер формул: Обычный – 14 пт., Индекс – 11 пт., Малый индекс – 9 пт., Символ – 16 пт., Малый символ – 14 пт.; только одно условие: «Переменная – Курсив»). В случае невозможности использования программы *MathType*, допускается использование приложения *Microsoft Equation*, входящего в состав *MS Word*, с таким же шрифтом и размером, как и основной текст статьи. Формулы располагаются по центру страницы. Нумерация формул сквозная.

Буквенные обозначения. Буквы (прописные и строчные) латинского алфавита (*E, V, K, t, a* и др.), обозначающие физико-математические величины, набираются курсивом. Русские, греческие ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \pi$, град, и др.) буквы и целостные выражения ($\cos, \sin, \log, \max, \min, Ra$ и др.) набираются прямым шрифтом.

Размерность всех физических величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ).

Принятые обозначения расшифровываются непосредственно в тексте статьи.

Заголовки набираются шрифтом 14 пт. полужирным, курсивным, полужирным – курсивным начертанием. Переносы заголовков запрещаются.

Таблицы набираются шрифтом 14 пт. Если таблица не помещается на страницу, допускается уменьшение шрифта до 11 пт. Таблицы размещаются после первого упоминания о них в тексте. Заголовки таблиц выравниваются по левому краю, шрифт 12 пт. Линии таблиц стандартные – 0,5 пт. Размеры таблиц не должны выходить за границы текста.

Иллюстрации размещаются по тексту сразу после первого упоминания о них в тексте. Иллюстрации должны быть четкими и контрастными (в формате .jpg, .png). Каждая иллюстрация должна иметь подрисуючную подпись (выравнивание по центру, шрифт 12 пт.). **Графики и диаграммы** представляются как рисунки. Графический материал должен быть оформлен в соответствии с требованиями Р 50–77–88 «Рекомендации ЕСКД. Правила выполнения диаграмм».

Литература приводится в конце статьи. Список литературы должен быть составлен в порядке появления ссылок в тексте, которые помещаются в квадратные скобки. Сведения об источниках, включенных в список, необходимо давать в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1–2003 «Библиографическое описание» и ГОСТ 7.82–2001 «Библиографическое описание электронных ресурсов».

Резюме. В конце статьи через 1 интервал печатается «Резюме» на русском языке и «Summary» (не более 75 слов) на английском языке. Так же прилагается перевод на английский язык фамилия(-ии) автора(-ов) и название статьи.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Василевич Ю. В., Макеев С. В., Комиссаров В. В., Лапушкин А. С., Гончаров Г. Р.</i> Методика и результаты оценки вибрационной эффективности конструкций верхнего строения пути для условий метрополитена.....	3
<i>Лопатин С. Н., Журавков М. А.</i> Некоторые модельные задачи, сопровождающие проходку шахтного ствола в многослойном соляном массиве на больших глубинах.....	12
<i>Мойсейчик Е. А., Василевич Ю. В., Можаровский В. В., Мойсейчик А. Е., Неумержицкая Е. Ю.</i> Контроль сооружений и машин методом пассивной инфракрасной термографии.....	19
<i>Николайчик М. А., Климкович Н. М.</i> Оценка напряженно-деформированного состояния солейотвала из галитовых отходов в условиях складирования шламов гидронамывом на тело солейотвала.....	29
<i>Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Василевич Ю. В.</i> Реализация расчета напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических труб из полимеров и композитов.....	36
<i>Степаненко Д. А., Бунчук К. А.</i> Определение эксплуатационных параметров ультразвуковых колебательных систем интегральным методом свободных колебаний.....	45
<i>Поленов В. С., Чигарев А. В.</i> Математическое исследование двухфазных зернистых сред методом сейсмоакустической эмиссии.....	54
<i>Веремейчик А. И., Нерода М. В.</i> Температурное поле и напряженно-деформированное состояние образцов из стали 40x13 при лазерной закалке.....	61
<i>Холодарь Б. Г.</i> Большие перемещения и напряженно-деформированное состояние упруго-пластического консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой.....	70
<i>Авдейчик Е. В., Конон П. Н.</i> Упрощенная модель движения малой капли по смачиваемой плоской вращающейся поверхности.....	77
<i>Кузнецов В. В., Марко А. Ф., Карпович С. Е.</i> Система перемещений с шестью степенями свободы на гибридном приводе прямого действия.....	86
<i>Куликов И. С., Ширвель П. И.</i> Численный метод моделирования напряженно-деформированного состояния дисков турбин при неосесимметричном нагреве...	96
<i>Довнар С. С., Яцкевич О. К., Авсиевич А. М., Колесников Л. А., Яворский А. В.</i> МКЭ-анализ конструктивных мер по усилению бетоном компактного 5-осевого станка.....	102
<i>Николайчик М. А., Маевский П. С.</i> Моделирование усталостного износа шахтного проводника при различных конфигурациях контактного взаимодействия с направляющими роликами.....	110
<i>Конон П. Н., Поддубная М. А.</i> Процессы конденсации и сушки при нестационарном тепло- и массообмена в двухслойной дымовой трубе.....	118
<i>Степаненко Д. А.</i> Моделирование многоступенчатых кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний методом конечных элементов.....	127
<i>Довнар С. С., Якимович А. М., Лапука А. Д.</i> МКЭ-анализ бетонно-бионического бандажа подвижной колонны станка.....	132
<i>Акимов В. А., Гончарова С. В., Беляцкая Л. Н.</i> Анализ напряженно деформируемого состояния материала при его переработке методом рассогласованной прокатки.....	138

Быков К. Ю., Качанов И. В., Ленкевич С. А. Влияние размеров исходной металлической вставки на геометрические параметры биметаллического соединения при выдавливании дорожных резцов.....	144
Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Определение нагрузок в звеньях бортового планетарного редуктора колесно-шагающей ходовой системы.....	153
Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. О законах сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела.....	163
Одинокова О. А., Драчев К. А. Исследование механических свойств полилактида применительно к методам FDM-печати.....	168
Грода Я. Г., Ласовский Р. Н., Бильданов Э. Э. Кинетическая диффузия в решеточном флюиде с конкурирующими взаимодействиями на простой кубической решетке.....	174
Сосенушкин Е. Н., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Архипов А. А. Решение задачи Л. Прандтля применительно к фланцу, занимающему область сложной конфигурации.....	181
Николайчик М.А., Матиевская А. В. Дискретно-элементное моделирования процесса разгрузки шахтного подъемного сосуда.....	187
Кафтайкина Е. Н., Докукова Н. А. О постановке задачи изгибно-крутильных колебаний упругих колец.....	195
Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. Построение эвольвентных профилей зубьев некруглых зубчатых колес в приводе колесно-шагающего движителя.....	203
Моисеев Д. В. Анализ напряженно-деформируемого состояния ножей ротора.....	217
Тищенко Н. М., Гончаров М. В. Моделирование движения механических частиц в роторе декантерной центрифуги.....	222
Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. Исследование изгибающих и крутящих моментов бесконечно малого элемента кругового кольца.....	225
Рефераты	233
Abstracts	241
Правила приема статей	248
Правила оформления статей	249

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

Международный
научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 37

Подписано в печать 12.12.2022. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 29,18. Уч.-изд. л. 16,34. Тираж 50. Заказ 700.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.