ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП АРГУМЕНТА ДЛЯ $A(z)$ - АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИИ И АНАЛОГ ТЕОРЕМА ГУРВИЦА

М.Д. Неъматиллаева

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбеке

E-mail: muhayyo.rn@gmail.com

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z}(z)=A(z)\,f_z(z), \tag{1}$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)|\le C<1$ почти всюду в рассматриваемой области $D\subset\mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) принято говорить $A-$*аналитическими функциями.* В настоящей работе предполагается, что $A(z)-$антианалитическая, $\partial A=0$ в области $D\subset\mathbb{C}$.

Пусть $A(z)-$антианалитическая, $\partial A=0$ в области $D\subset\mathbb{C}$ такая, что $|A(z)|\le C<1,\ \ \forall z\in D.$ Положим

$$D_A=\frac{\partial}{\partial z}-\bar A(z)\frac{\partial}{\partial \bar z},\quad \bar D_A=\frac{\partial}{\partial \bar z}-A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (1) класс $A-$аналитических функций $f\in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar D_A f=0.$ Так как антианалитческая функция является бесконечно гладкой, то $O_A(D)\subset C^\infty(D).$

Теорема 1 (см. [3]) *(Аналог теоремы Коши). Если* $f\in O_A(D)\cap C(\bar D),$ *где* $D\subset\mathbb{C}$ $-$ *область со спрямляемой границей* $\partial D,$ *то* $\int\limits_{\partial D} f(z)\big(dz+A(z)d\bar z\big)=0.$

Теорема 2 *(см. [4]) (Формула Коши). Пусть* $D\subset\mathbb{C}-$*выпуклая область и* $G\subset D-$*произвольная подобласть с кусочно гладкой границей*

∂G. *Тогда для любой функции* $f(z)\in O_A(G)\cap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{z-\xi+\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\overline{A(\tau)d\tau}}\left(d\xi+A(\xi)d\,\bar{\xi}\right),\;\; z\in G. \tag{2}$$

Определение 1. *Точка* $z=a$ *называется нулем* $A(z)$ *- аналитической функции* $f(z)$ *порядка* n, *если в некоторой окрестности* $L(a,r)$ *этой точки*

$$f(z)=\psi^n(z,a)\cdot g(z), \tag{3}$$

где $g(z)\in \mathrm{O}_A(L(a,r))$ *и* $g(a)\neq 0.$

Определение 2. *Точка* $z=a$ *называется полюсом* $A(z)$ *- аналитической функции* $f(z)$ *порядка* n, *если точка* a *является нулем порядка* n *функции* $\dfrac{1}{f(z)}$.

Теорема А *(Обобщенный принцип аргумента). Пусть функция* $f(z)$ *является* $A(z)$*- аналитической функцией, за исключением полюсов в области* $D\subset\mathbb{C}$ *и* $G\subset\subset D$ *– область, граница* ∂G *которой является кусочно гладкой, причем* ∂G *не содержит ни нулей, ни полюсов функции* $f(z)$. *Тогда для любой* $A(z)-$ *аналитической в* D *функции* $\varphi(z)$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\varphi(z)\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz+A(z)d\bar{z})=\sum_{i=1}^{k}n_i\varphi(a_i)-\sum_{j=1}^{l}m_j\varphi(b_j).$$

$n_i\,-\,a_i\,-$*нулями порядка*

$m_j\,-b_j\,-$*полюсами порядка*.

Используя доказанный принцип аргумента аналогично классическому случае получается следующее утверждение.

Теорема 3 *(аналог теоремы Руше). Пусть функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *аналитической в замкнутой области* $\overline{G}$ *с непрерывной границей* ∂G *и пусть*

$$\left|f(z)\right|>\left|g(z)\right| \text{ для всех } z\in\partial G. \qquad (4)$$

Тогда функции $f(z)$ *и* $f(z)+g(z)$ *имеют в G одинаковое число нулей.*

Это теорема верно когда область не выпукло.

Теорема Б *(аналог теорема Гурвица). Пусть последовательность функций* f_j, $A(z)-$ *аналитических в области D, сходится в топологии* $O_A(D)$ (т.е. равномерно на компактах в D *) к функции* $f\neq const.$ *Если точка* $z_0\in D$ *является изолированном нулем функции f, т.е.* $f(z_0)=0,$ *то в любом лемнискате* $L(z_0,r)\subset D$ *все функции* $f_n,$ *начиная с некоторой, также имеют нуль.*

Использованные литературы

1. Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London, 1966, 133 pp.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.

3. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр. 15-18.

4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.

5. Sadullaev A.,Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016 y 9(3), c. 374-383.

6. J.K.Tishabaev, T.U.Otaboyev, Sh.Ya. Khursanov. Residues and argument prinsple for $A(z)-$analytic functions,Journal of Mathematical Sciences,Vol.245,No. 3, March, 2020. 350-358.