

$$\begin{cases} 4a_1 + 4a_2 = 4 \\ 4a_1 + 10a_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = 3, a_2 = -2,$$

$$y = 3a_1 - 2a_2 = (3, 3, 3, 3) - (2, 4, 4, -2) = (1, -1, -1, 5)$$

$$z = x - y = (4, -1, -3, 4) - (1, -1, -1, 5) = (3, 0, -2, -1).$$

$$\text{Значит, } \rho(x, L) = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{13},$$

$$\cos \angle (x, L) = \frac{|y|}{|x|} = \frac{\sqrt{1+1+1+25}}{\sqrt{16+1+9+16}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Итак, } \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Пример 4 осуществляет взаимосвязь предложенной новой идеи с известными ранее работами в данной области и, как нельзя лучше, подчеркивает актуальность решаемой здесь задачи в новой постановке.

#### Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный-15-е издание. – Москва: Айрис-пресс, 2018. – 602 с.

2. Акимов В.А., Новиков А.А. Теорема Пифагора в n-мерном пространстве. // Материалы Международной научно-технической конференции. / Дорожное строительство и его инженерное обеспечение. Секция «Математические методы в строительстве». Минск, БНТУ, 2021, с. 212-217.

УДК 624.073

## РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

О.Л. Вербицкая, Л.И. Шевчук

Белорусский национальный технический университет,  
пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь

Выполнен динамический расчет балочной прямоугольной железобетонной плиты. Для сгущения массы плиты в ее центре использован принцип эквивалентности энергий. Расчет выполнен по авторской программе *Sturm*, реализующей МКЭ. В результате расчета получены прогибы плиты под центрами назначенных ячеек. Приведены график свободных колебаний плиты со сгущенной массой, график колебания возмущающей силы, вызванной движущейся частью внутришлифовального станка ЗБ250, график колебаний плиты, вызванных возмущающей силой станка ЗБ250. Источником возмущающих колебаний является внутришлифовальный станок ЗБ250. Определены максимальный прогиб плиты, а также изгибающие моменты.

**Ключевые слова:** динамический расчет, плиты, колебания, прогиб.

Выполним динамический расчет балочной прямоугольной железобетонной плиты, шарнирно опертой по двум противоположным краям. Размеры плиты 1,80x5,76 м с толщиной 120 мм. Плита армирована тяжелой сеткой второго типа с размерами 200x200x20 с площадью по ширине плиты 37,68 см<sup>2</sup>. Модуль упругости арматуры и бетона соответственно равны  $E_a = 200$  ГПа,  $E_b = 39$  ГПа. Коэффициент Пуассона бетона  $\nu = 0,22$ . Плотность бетона принимаем равной  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>.

Для сгущения массы плиты в ее центре используем принцип эквивалентности энергий, – энергии изгиба плиты от действия ее собственного веса 17280 Н, распределенного по всей площади, и от действия веса плиты, сгущенного в ее центре. Расчет выполнен по программе *Sturm*, реализующей МКЭ. В результате расчета получены прогибы плиты под центрами назначенных ячеек, составленных из конечных элементов. Из узловых прогибов составлена матрица  $\vec{V}$ . Собственный вес плиты, приходящейся на одну ячейку, представлен в виде сосредоточенных сил  $G_{яч} = 1,55 \text{ кН}$ .

$$\vec{V}_p = \begin{bmatrix} 4,278 & 11,089 & 13,642 & 11,089 & 4,278 \\ 4,251 & 11,016 & 13,553 & 11,016 & 4,251 \\ 4,241 & 10,991 & 13,522 & 10,991 & 4,241 \\ 4,251 & 11,016 & 13,553 & 11,016 & 4,251 \\ 4,278 & 11,089 & 13,642 & 11,089 & 4,278 \end{bmatrix}, \text{ мм} \quad (1)$$

Энергия на перемещении плиты от ее веса, распределенного по площади, определим из выражения

$$P = \vec{V} \cdot \vec{E} \cdot G_{яч} = 343,56 \text{ Дж} \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  – единичная матрица размерности  $5 \times 5$ .

Прогиб от веса плиты, приложенного в середине плиты, равно  $V_c = 19,328 \text{ мм}$ . Энергия от собственного веса плиты, приложенного в центре плиты равна

$$W = m_{pl} \cdot g \cdot V_c = 3693,6 \cdot 10 \cdot 0,336 \cdot 10^{-3} = 713,9 \text{ Дж}, \quad (3)$$

где  $m_{pl} = 3693,6 \text{ кг}$  – масса плиты.

Используя энергетический баланс, определим сгущенную массу плиты, приведенную к ее середине

$$m_o = \frac{P}{W} \cdot m_{pl} = \frac{1670}{5810} \cdot 3693,6 = 1777,5 \text{ кг} \quad (4)$$

Коэффициент сгущения массы плиты равен

$$K = \frac{m_o}{m_{pl}} = \frac{1777,5}{3693,6} = 0,481 \quad (5)$$

Расчет по программе *Sturm* показывает, что при центрально приложенной силе  $F_o = 17,775 \text{ кН}$  прогиб плиты в ее середине составляет  $V_o = 9,867 \text{ мм}$ . Коэффициент жесткости плиты определим как отношение силы  $F_o$  и прогиба  $V_o$ .

$$c = \frac{F_o}{V_o} = \frac{17,775 \cdot 10^3}{9,867 \cdot 10^{-3}} = 1,801 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \quad (6)$$

Собственные колебания плиты со сгущенной массой определим решением дифференциального уравнения при начальном отклонении 5 см

$$m_o \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = 0 \quad (7)$$

График свободных колебаний плиты показан на рисунке 1

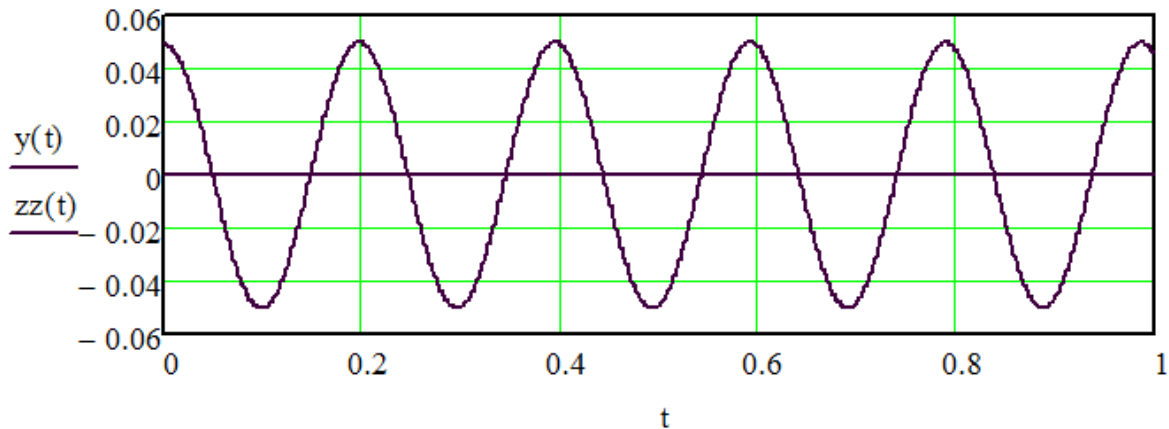


Рис.1. График свободных колебаний плиты со сгущенной массой

Очевидно, что период свободных колебаний плиты со сгущенной массой составляет  $T = 0,96$  с.

Источником возмущающих колебаний является внутришлифовальный станок ЗБ250 со следующими характеристиками: масса движущихся частей 590 кг; половина хода подвижной части 250 мм; число двойных ходов в минуту  $n=20$ ; амплитуда инерционной силы 12,0 кН; масса станка 3900 кг; число оборотов двигателя 1410 об/мин.

Изменение возмущающей силы может быть описано функцией

$$F(t) = Z_{\text{ИН}} \sin(2\pi n t) \quad (8)$$

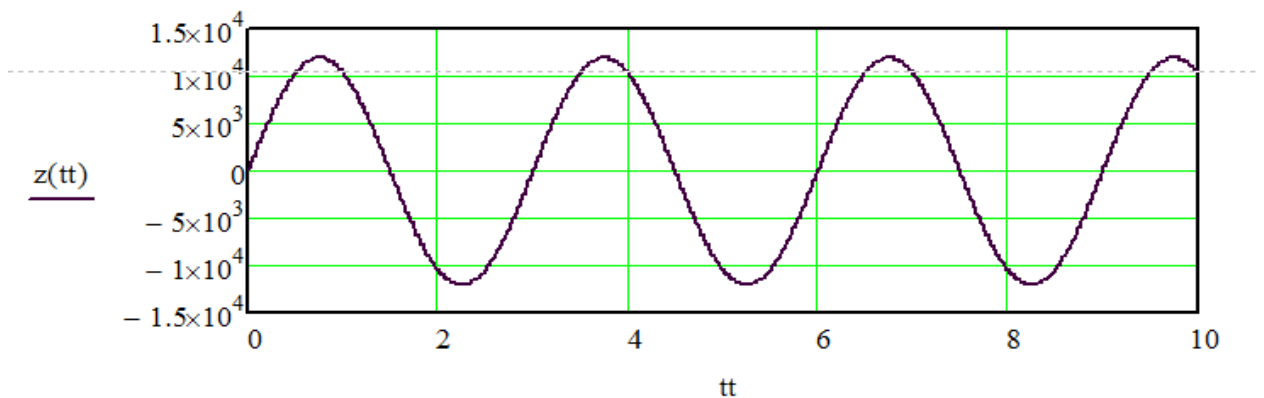


Рис. 2. График колебания возмущающей силы, вызванной движущейся частью внутришлифовального станка ЗБ250

Закон изменения прогибов плиты со сгущенной массой от динамической нагрузки станка ЗБ250 и его веса определим решая дифференциальное уравнение следующего вида

$$m_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot y(t) = Z_{\text{ин}} \sin(2\pi n t) \quad (9)$$

График колебательных движений плиты приведен на рисунке 3

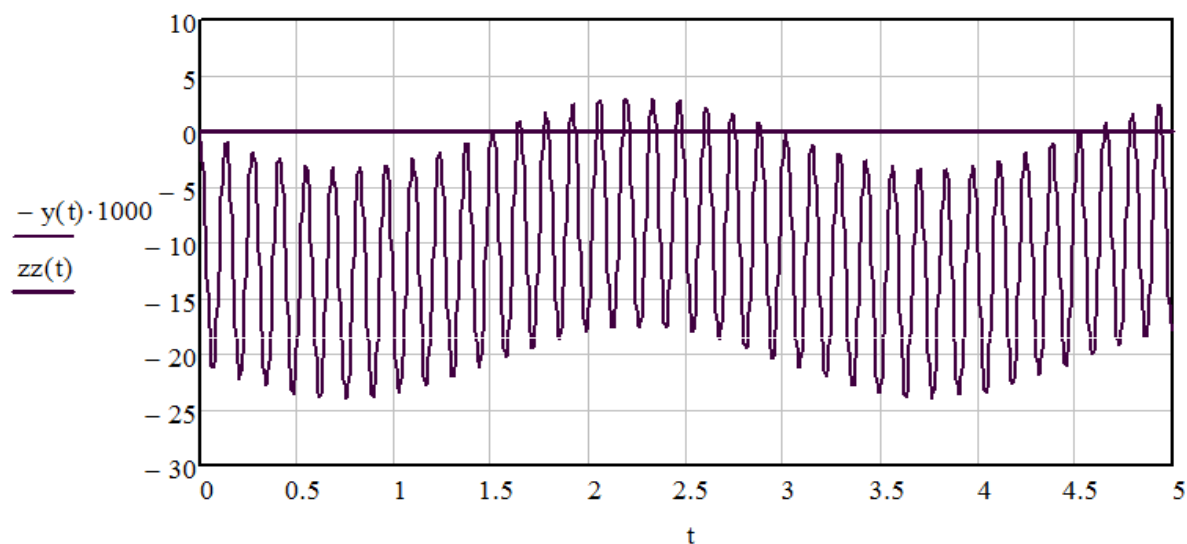


Рис. 3. График колебаний плиты, вызванных возмущающей силой станка ЗБ250

Из графика (рис.3), очевидно, что максимальный прогиб плиты составляет  $V_{\text{max}} = 24$  мм. По программе *Sturm* установлено, что такой прогиб плиты может быть вызван центрально приложенной силой  $F = 44$  кН. При этом в сечениях плиты появляются максимальные изгибающие моменты равные

$$M_x = 36,38 \text{ кНм/м} \text{ и } M_y = 6,40 \text{ кНм/м}.$$

УДК 378.147

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАНЯТИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ НЕПРЕРЫВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Н.П. Воронова, О.А. Мороз

Белорусский национальный технический университет,  
пр-т Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь, volgamaroz@mail.ru.

В статье рассматриваются вопросы проведения дополнительных занятий по математике для студентов-первокурсников технического вуза, методы отбора на эти занятия и связь тематики занятий с курсом высшей математики, а также анализ проведенной работы.

**Ключевые слова:** математика, школа, вуз, образовательный процесс, дополнительные занятия, тесты.

Актуальность проведения дополнительных занятий по математике объясняется необходимостью построения более тесной связи между школьным курсом и курсом высшей