

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ТЯГОВОЙ СИСТЕМЕ ПАССАЖИРСКОЙ ПОДВЕСНОЙ КАНАТНОЙ ДОРОГИ

*Игнатович Никита Сергеевич, магистрант кафедры
«Механизация и автоматизация дорожно-строительного комплекса»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Шавель А.А., канд. техн. наук, доцент)*

Канатная дорога (ППКД), как система с гибкой связью обладает рядом особенностей, к которым, в первую очередь, следует отнести ее поведение в период неустановившегося движения. Исследование состояния неустановившегося движения может помочь выявить ряд неясностей, относящихся к ее работе в статическом положении и положении установившегося движения. Одними из весьма сложных, ввиду произвольного положения ветвей дороги и нагрузки на них систем с гибкой связью, являются тяговые системы канатных дорог.

Будем считать данными следующие основные параметры и дороги:

ρ — плотность тягового каната;

E — модуль упругости тягового каната;

F — площадь поперечного металлического сечения каната;

R_1 — рабочий радиус приводного шкива;

R_2 — рабочий радиус натяжного шкива;

P_0 — усилие натяжения.

Требуется найти аналитическое выражение основных параметров, определяющих поведение канатной дороги (динамических усилий, удлинений), в функции времени и координат.

Сформулируем основные допущения, в пределах которых будет разрешаться поставленная в предыдущем разделе задача:

1. Тяговый канат будем считать «обтянутым», т.е. получившим под влиянием нагрузки некоторую вытяжку. При этом условии, его модуль упругости E может считаться постоянным; сам канат подчиняется закону Гука. Под напряжением в канате будем понимать среднее по металлическому сечению.

2. Будем считать тяговый канат упругой системой и, в соответствии с этим, пренебрегать влиянием внутренних сопротивлений на его продольные колебания.

3. Все внешние усилия, действующие на находящийся в пролете тяговый канат, будем считать направленными по касательным к его продольной оси.

4. Коэффициент трения каната о приводной шкив считаем постоянным.

5. Коэффициенты сопротивления перемещению тягового каната по роликовым батареям считаем постоянными.

6. Ролики и блоки для поддержания и отклонения несуще-тягового каната, а также натяжной и приводной шкивы считаем абсолютно жесткими.

Наличие футеровки на приводном шкиве почти не влияет на продольные деформации несуще-тягового каната и, следовательно на рассматриваемые явления, порождаемые ими (если не учитывать изменений размеров футеровки в радиальном направлении).

7. Будем пренебрегать влиянием вертикальных провесов тягового каната на величину динамических усилий в нем. Это пренебрежение допустимо по следующим соображениям:

а) Поперечная жесткость подвешенного тягового каната значительно меньше его продольной жесткости. Следовательно, и усилия в канате, возникающие в процессе поперечных колебаний, значительно меньше усилий, возникающих при его продольных колебаниях.

б) Энергия приводного двигателя, передаваемая тяговому канату от приводного шкива посредством трения между ними, затрачивается на продольное деформирование каната, его перемещение как твердого тела и вертикальное перемещение каната при поперечных колебаниях.

Отсюда следует, что последующее решение строго описывает случай замкнутой, однородной, изотропной, упругой и гибкой нити, с небольшими отклонениями ее положения от прямой, касательной к приводному и концевому шкивам.

Прежде чем переходить к рассмотрению динамических явлений в тяговой системе канатной дороги, необходимо рассмотреть ее статическое состояние. Известно, что статическое состояние системы определяет ее динамическое поведение в неустановившемся движении, являясь составной частью начальных условий для динамических уравнений.

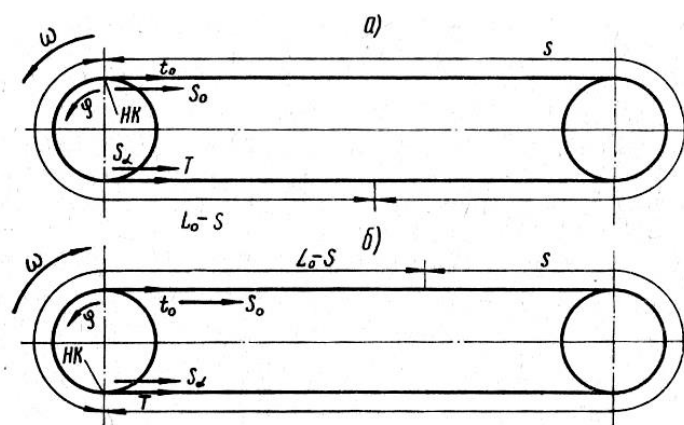


Рисунок 1 – Определение систем координат

Для описания явлений, происходящих в канатной дороге в статическом состоянии, выберем следующие системы координат (рис. 1):

1. С независимой угловой переменной φ и началом координат в точке набегания ветви каната на приводной шкив (для описания явлений, происходящих на приводном шкиве).

2. С независимой линейной координатой s , отсчитываемой вдоль продольной оси тягового каната, с началом в точке набегания его на приводной шкив и положительным направлением, противоположном направлению движения дороги.

Для дальнейшего потребуются результаты следующей задачи: пусть гибкая растяжимая нить охватывает на угле α абсолютно жесткий шкив радиуса R , причем приложенные к ее свободным концам силы T и t_0 таковы, что:

$$\frac{T}{t_0} = e^{\mu \times \alpha_0} \leq e^{\mu \times \alpha};$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\mu} \times \ln \frac{T}{t_0} = \frac{1}{0,3} \times \ln \frac{49820}{40550} = 0,68.$$

где T - натяжение на набегающей ветви, 49820 кг (488567 Н),
 t_0 - натяжение на сбегающей ветви, 40550 кг (397660 Н),
 μ - коэффициент трения между канатом и приводным шкивом 0,3,
 α - угол охвата шкива, 3,02рад,
 α_0 - некоторое число.

Если предположить, что несущее-тяговый канат одевается на шкив и только после этого к нему прикладываются усилия T и t_0 , то распределение усилий определится из соотношения:

$$S = \begin{cases} t_0 \times e^{-\mu\varphi}, & \text{если } 0 \leq \varphi \leq \alpha_{\text{п}} \\ T \times e^{\mu(\varphi-\alpha)}, & \text{если } \alpha_{\text{п}} \leq \varphi \leq \alpha \end{cases},$$

где $\alpha_{\text{п}}$ - переходная точка приводного шкива, деформации каната в которой отсутствуют.

Определим переходную точку по формуле:

$$\alpha_{\text{п}} = \frac{\alpha - \alpha_0}{2} = \frac{3,02 - 0,68}{2} = 1,17 \text{ рад.}$$

Физический смысл существования переходной точки заключается в том, что в набегающей ветви несущее-тягового каната деформации уменьшаются от

некоторого максимального значения до нуля в переходной точке, соответствующей $\varphi = \alpha_n$. Затем деформации начинают возрастать до некоторого значения в точке сбегания каната с приводного шкива.

Графическое решение распределения усилий в канате в зависимости от угла φ представлено на (Рис. 2).

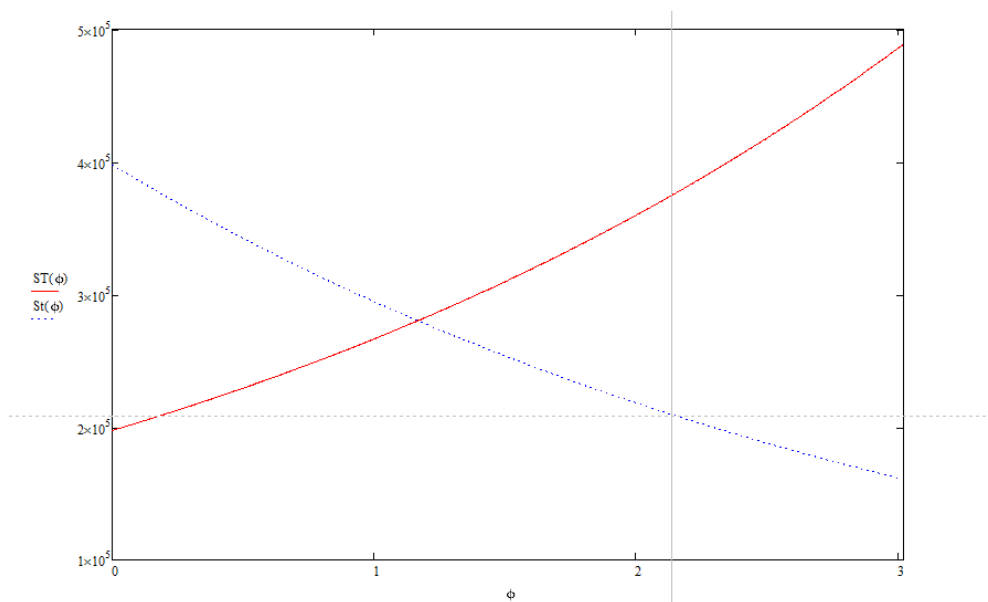


Рисунок 2 – Распределение усилий в канате на приводном шкиве

Из рисунка 2. видно, что усилие $S(\varphi)$ начинает убывать от t_0 (усилие в точке набегания на приводной шкив) до минимального значения $S(1,17) = 280$ кН, соответствующего $\varphi = \alpha_n$.

Распределение деформаций в канате найдем по формуле:

$$U(\varphi) = \frac{t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{-\mu \alpha_n} \times |\varphi - \alpha_n|,$$

$$U(\varphi) = \frac{40550 \times 9,81 \times 2,45}{0,3 \times 1,2 \times 10^{11} \times 1,225 \times 10^{-3}} \times e^{-0,3 \times 1,17} \times |\varphi - 1,17|,$$

где R – радиус приводного шкива, 2,45 м,

μ – коэффициент трения каната о шкив, 0,3,

E – эквивалентный модуль упругости, $1,2 \times 10^{11}$ Н/м²,

F – площадь сечения каната, $1,225 \times 10^{-3}$ м².

Графическое решение распределения деформаций в канате в зависимости от угла φ представлено при равномерном (установившемся) движении на рис. 3.

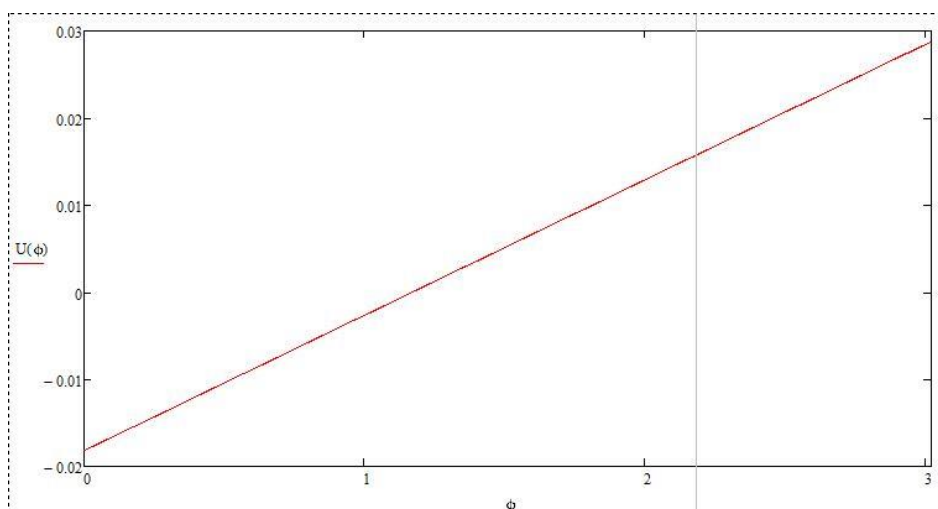


Рисунок 3 – Распределение деформаций в канате на приводном шкиве

Из рисунке 3. видно, что деформации каната начинают линейно уменьшаться от некоторого значения в точке сбегания каната с приводного шкива $\varphi=0$ до нулевого значения в переходной точке $\varphi=\alpha_{п}$. Затем деформации каната начинают линейно возрастать до максимального значения в точке набегания на шкив $\varphi=0$.

Тяговый канат считается однородной упругой (растяжимой) нитью. Это обстоятельство в значительной мере определяет особенности разгона канатной дороги.

В момент включения двигателя, в силу допущений все точки шкива одновременно придут в движение с одной и той же скоростью. Вследствие трения, возникшего между шкивом и охватывающим его канатом в статическом состоянии, канат получит силовой импульс и в нем, как и во всяком упругом теле, возникнет колебательный процесс.

В любом состоянии движения шкива существует точка на дуге обхвата, в котором деформация каната равна нулю.

Отсюда следует, что эта точка может рассматриваться как общее начало двух полубесконечных струн (ветвей каната дороги), от которой распространяются по ветвям дороги бегущие волны.

Таким образом, мы имеем процесс установившихся колебаний каната (на приводном шкиве) и процесс распространения бегущих волн по ветвям дороги. Временем, в течение которого волны «пробегают» отрезок каната, охватывающего шкив, можно пренебречь, ввиду очень малой его длины и большой скорости распространения волн (равной скорости распространения звука в канате).

Поэтому в дальнейшем будем считать началом каждой полубесконечной струны (ветви дороги) точку ее входа на приводной шкив.

Указанные выше колебания связаны между собой очевидным образом: бегущие волны на ветвях дороги порождаются колебаниями каната на приводном шкиве в крайних точках дуги обхвата (граничные режимы).

Скорость распространения звука в канате (скорость распространения волны) будем считать постоянной. В силу этого допущения, «обтянутый» канат может считаться однородным упругим стержнем с постоянным модулем упругости E и плотностью, а поэтому должна быть постоянна и величина скорости звука в канате:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,2 \times 10^{11}}{\frac{10,92}{1,225 \times 10^{-3}}}} = 3670 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

При распространении упругой волны вдоль ветвей тягового каната, несомая волной энергия тратится на преодоление работы сопротивления перемещению вагонеток по канату, самого каната по роликовым батареям и т. п. Однако, при этом скорость упругой волны не изменяется, но изменяется величина «несомого» волной усилия.

Движение растяжимого каната канатной дороги может быть рассмотрено состоящим из двух движений: а) движения нерастяжимого каната. Это движение будем называть переносным; б) смещения каждой точки каната, вследствие его деформируемости, относительно того его положения, которое он занимал бы в тот же самый момент времени, будучи абсолютно жестким. Это движение будем называть относительным.

Полные динамические усилия определяются, естественно, с учетом динамических усилий переносного движения. При определении последних мы воспользуемся известными теоремами динамики о сложении ускорений при поступательном и вращательном переносных движениях.

Из этих теорем следует, что если пренебречь кориолисовым и центробежным ускорениями при вращательном переносном движении, полные динамические усилия получаются алгебраическим сложением динамических усилий переносного и относительного движений, поскольку направления переносного и относительного ускорений либо совпадают, либо прямо противоположны.

Поскольку на канатных дорогах нагрузка принципиально дискретна, поскольку движение приводного шкива всегда происходит неравномерно, с ускорением или замедлением. Так как источником волн деформаций на ветвях дороги является начало неравномерного вращения приводного шкива (импульс), то динамические усилия в них имеют место во все время ее работы.

Полученный вывод весьма существенен, ибо он означает, что расчет каната должен быть не статическим, а обязательно динамическим.

Очевидно, что профиль и скорость дороги также влияют на ускорение (или замедление) в течение, превышающее период разгона.

Если бы тяговый канат был нерастяжим, то в некоторой точке его, совпадающей с фиксированной точкой пространства, при перемещении вагонеток, усилия менялись бы только статически. В случае растяжимого каната, усилие в любой его точке будет складываться из статического и динамического, порождаемого колебаниями каната.

При определении динамических усилий, возникающих на приводном шкиве, нужно учитывать, что на нем возникают собственные колебательные процессы, независимые от колебательных процессов на ветвях. Отсюда следует, что динамические усилия в канате, охватывающем приводной шкив, определяются в результате сложения динамических усилий, порождаемых обоим колебаниями порознь.

Аналитическое описание явлений, происходящих в тяговой системе ППКД, находящейся в состоянии разгона. Введем следующие обозначения:

U — упругое скольжение каната по приводному шкиву, т.е. абсолютное смещение точек каната относительно точек шкива, которыми они совпадали до приложения к канату нагрузок;

j — текущее линейное ускорение приводного шкива.

Усилие, возникающее при деформации элементарной части каната массой dm определяется из выражения:

$$dF_y = \frac{EF}{R} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi.$$

Усилие, возникающее при деформации элементарной части каната массой dm определяется из выражения:

$$dF_y = \frac{EF}{R} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi.$$

Сила трения, действующая на участок каната dm , определяется из выражения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

Где μ - коэффициент трение между канатом и шкивом,

N - реакция опоры, определяемая по формуле:

$$N = \frac{EF}{R} \times \frac{\partial U}{\partial \varphi} \times d\varphi.$$

Сила инерции в относительном движении определим по формуле:

$$F_{\text{отн}} = dm \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Динамические усилия в тяговом канате складываются из возбуждаемых волнами усилий в относительном движении и усилий, возникающих в переносном движении с неравным нулю ускорением. Можно сказать, что динамические усилия в тяговом канате складываются из усилий, которые возникают в канате, если бы он был абсолютно жесток и нерастяжим (усилия в переносном движении) и усилий, возникающих в растяжимом канате (усилия в относительном движении). Из сказанного следует, что в первый период разгона переносное движение с достаточной точностью можно считать отсутствующим.

Определим усилия в относительном движении. Сначала рассмотрим относительное движение на приводном шкиве. При составлении уравнений равновесия пренебрежем кориолисовой и центробежными силами инерции, поскольку вторые пропорциональны квадратам малых величин — угловой скорости и скорости упругого скольжения, — а первая — произведению малых величин — угловой скорости и скорости относительного движения (упругого скольжения).

Рассматривая относительное движение каната на приводном шкиве (рис. 4.), получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \mu \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{R^2}{c^2} \times \frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{R^3}{c^2} \times \frac{d\omega}{dt},$$

где $c^2 = \frac{E}{\rho}$.

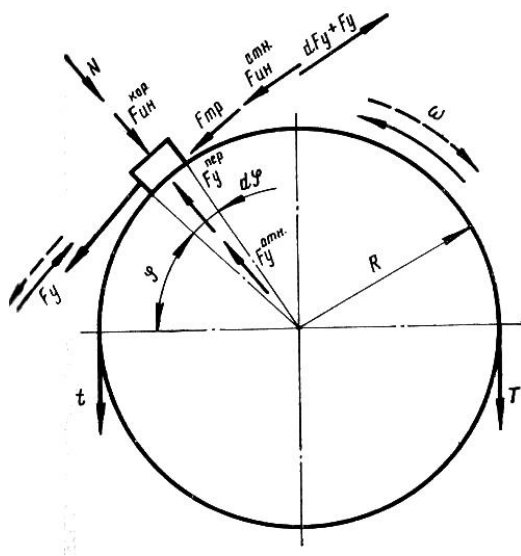


Рисунок 4 – Равновесие каната в относительном движении на абсолютно жестком шкиве

Плотность каната предполагается постоянной ввиду малости относительного удлинения его сравнительно с единицей.

Начальные условия, учитывая, что канат, охватывающий шкив в момент включения приводного двигателя, можно считать неподвижным получим в следующем виде:

$$U|_{t=0} = \frac{t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{-\mu\alpha_n} \times |\varphi - \alpha_n|,$$

$$U|_{t=0} = \frac{40550 \times 9,81 \times 2,45}{0,3 \times 1,2 \times 10^{11} \times 1,225 \times 10^{-3}} \times e^{-0,3 \times 1,17} \times |\varphi - 1,17|,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

Для выяснения граничных условий уравнения будем рассуждать следующим образом. Упругое удлинение каната в точках входа и схода его с приводного шкива, вообще говоря, зависит от времени. Однако, эта зависимость не может не быть монотонной, ибо в этом случае не удовлетворится исходное уравнение с начальными условиями. Отклонение упругого удлинения от его статического значения — периодически и невелико. Исходя из этого получим выражения деформации в граничных точках:

$$U|_{\varphi=0} = \frac{t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{-\mu\alpha_n} \times \alpha_n,$$

$$U|_{\varphi=\alpha} = \frac{t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{-\mu\alpha_n} \times |\alpha - \alpha_n|.$$

Решение уравнения относительного движения каната на приводном шкиве с известными начальными и граничными условиями определяется по формуле:

$$U = \frac{t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{-\mu\alpha_n} \times |\varphi - \alpha_n| + \frac{4 \times t_0 \times R}{\mu \times E \times F} \times e^{\frac{\mu(\varphi-\alpha)}{2}} \times \left(3 + 2e^{\frac{\mu\alpha}{2}}\right) \times \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha} \times \cos \frac{\pi ct}{R\alpha},$$

Сравним деформации при равномерном движении и в начальный момент разгона ППКД, соответствующий максимальному значению динамических нагрузок в несущем-тяговом канате. Переходная точка каната, деформации в которой равны нулю смещается в сторону набегающей ветви. В случае, если переходная точка совпадет с точкой набегания, то тяговая система окажется в критическом состоянии, которое характеризуется проскальзыванием каната по приводному шкиву. Это означает, что окружное усилие достигло своего максимального значения, и дальнейшее увеличение мощности привода не имеет смысла.

Сравнивая выражения для статического и динамического удлинений каната, можно заметить, что динамическое упругое удлинение представляет собой небольшие периодические отклонения от статического.

Дифференцируя выражение для динамических деформаций по φ , обозначив через $P_{\text{перв}}$ распределение с t_0 и T , получим распределение динамических усилий в канате, охватывающем шкив в виде:

$$P_{\text{дин}} = P_{\text{перв}} + \frac{2 \times (3 + 2e^{\frac{\mu\alpha}{2}})}{\pi^3} \times \mu^2 \times \alpha^2 \times e^{-\frac{\mu\alpha}{2}} \times t_0 \times e^{-\frac{\mu(\alpha-\alpha_0)}{2}} \times \frac{\sin(\frac{\pi\varphi}{\alpha} + \gamma)}{\cos \gamma} \times e^{\frac{\mu\varphi}{2}} \times \cos \frac{\pi ct}{R\alpha},$$

где $\tan \gamma = -\frac{2\pi}{\alpha\mu}$.

В данной работе были описаны физические явления, происходящие в тяговой системе ППКД, описаны аналитически явления, происходящие в тяговой системе при равномерном движении и при разгоне. Определены деформации несущего-тягового каната на приводном шкиве для разных режимов работы ППКД. Деформации каната между точками сбегания и набегания в режиме разгона превышают статические значения и изменяются по экспоненциальной зависимости, а не по линейной.

Усилия в канате при разгоне ППКД также отличаются от статических значений. Появляется динамическая составляющая. Причем, усилия со стороны сбегания с приводного шкива уменьшаются в начальный период разгона (с 405 кН до 370 кН), а со стороны набегания, наоборот, увеличиваются (с 486 кН до 560 кН). Также было показано, что существуют точки каната, где усилия максимальны, т.е. амплитуды колебаний, распространяющихся от точек сбегания и набегания, совпадают. Усилие в этих точках равно 885 кН, причем разрывное усилие каната составляет 2220 кН.

Литература:

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480с.
2. Кирьянов Д. В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 704с.