

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ КАБИНЫ НА УЧАСТКЕ ПАССАЖИРСКОЙ ПОДВЕСНОЙ КАНАТНОЙ ДОРОГИ

*Игнатович Никита Сергеевич, магистрант кафедры
«Механизация и автоматизация дорожно-строительного комплекса»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Шавель А.А., канд. техн. наук, доцент)*

Теория динамического действия подвижной нагрузки имеет более чем вековую историю. Главный вопрос заключается в том, насколько прогибы и внутренние усилия в канате отличаются от соответствующих эффектов, которые возникают в условиях статического нагружения.

Установлено, что траектория движения груза и изогнутая ось, каната, совершенно разные кривые (Рис. 1).

На рисунке 1, изогнутая ось каната эскизно изображена в различные моменты времени, здесь же показаны соответствующие положения движущегося груза; штриховой линией показана траектория груза (для ясности отмечены состояния, относящиеся к движению груза только вдоль левой половины балки).



Рисунок 1 – Формы изгиба каната при различных положениях груза

Для составления уравнения движения кабины, введем систему «канат-кабина» в состояние фиктивного равновесия. Для этого к активным силам и реакциям связи, действующим на участке ППКД, добавляем силы инерции (Рис. 2).

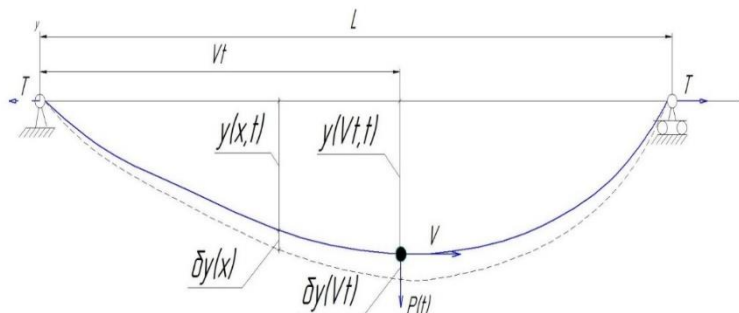


Рисунок 2 – Схема для решения уравнения движения гондолы

Используя принцип возможных перемещений, найдем работу всех сил на элементарном перемещении $\delta y(x)$:

$$-T \int_0^L \dot{y}_x(x, t) \delta \dot{y}_x dx - \int_0^L \rho \ddot{y}_t(x, t) \delta y dx - EJ \int_0^L \ddot{y}_x(x, t) \delta \ddot{y}_x dx + P(t) \delta y(Vt) = 0,$$

где $\delta y(x)$ - элементарное перемещение участка каната толщиной dx на произвольном расстоянии x ,

$\delta y(Vt)$ - элементарное перемещение кабины на произвольном расстоянии Vt ,

$y(x, t)$ - провес каната на произвольном расстоянии x , зависящий от времени t , м,

$y(Vt)$ - вертикальное перемещение кабины при $x=v$, м,

E - модуль упругости, Н/м²,

J - момент инерции поперечного сечения каната, м⁴,

$P(t)$ - некоторая сила, учитывающая вес кабины и силы инерции, Н,

L - расстояние между опорами, м,

T - силы натяжения, Н,

$-T \int_0^L \dot{y}_x(x, t) \delta \dot{y}_x dx$ - работа сил натяжения на участке ППКД длиной L ,

$\int_0^L \rho \ddot{y}_t(x, t) \delta y dx$ - работа сил инерции распределенной массы каната,

$EJ \int_0^L \ddot{y}_x(x, t) \delta \ddot{y}_x dx$ - работа сил упругости (физический смысл: работа момента сопротивления на изменении угла поворота $\delta \ddot{y}_x$,

$P(t) \delta y(Vt)$ - выражение, учитывающее работу сил инерции кабины и работу силы тяжести. Выразим силу $P(t)$:

$$P(t) = M \times g - M \times \frac{d^2 y}{dt^2},$$

где $M \times g$ - вес кабины, Н,

$-M \times \frac{d^2 y}{dt^2}$ - сила инерции, Н,

Полное ускорение кабины находим по формуле:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}_t(x, t) + 2 \times V \times y'(\dot{x}, t) + v^2 \times \ddot{y}_x(x, t) | x = vt,$$

где $\ddot{y}_t(x, t)$ - ускорение в переносном движении,

$v^2 \times \ddot{y}_x(x, t)$ - ускорение в относительном движении,

$2 \times V \times y'(\dot{x}, t)$ - Кориолисово ускорение.

Решение для функции прогиба балки $y(x, t)$ будем искать в виде ряда:

$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \times \sin \frac{i\pi x}{L}$. Ограничившись первым членом ряда, получим функцию для прогиба: $y(x, t) = f(t) \times \sin \frac{\pi x}{L}$, $f(t)$ - искомая функция времени. Элементарное перемещение каната запишем в следующем виде: $\delta y(x) = \delta A \times \sin \frac{\pi x}{L}$. Аналогично, перемещение кабины определим как $\delta y(vt) = \delta A \times \sin \frac{\pi vt}{L}$.

Выполним некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= f(t) \times \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \dot{y}(x, t) &= \dot{f}(t) \times \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \ddot{y}(x, t) &= \ddot{f}(t) \times \sin \frac{\pi x}{L}, \\ y'(x, t) &= f(t) \times \frac{\pi}{L} \times \cos \frac{\pi x}{L}, \\ y''(x, t) &= -f(t) \times \frac{\pi^2}{L^2} \times \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \dot{y}'(x, t) &= \dot{f}(t) \times \frac{\pi}{L} \times \cos \frac{\pi x}{L}, \\ \delta y(x) &= \delta A \times \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \delta y'(x) &= \delta A \times \frac{\pi}{L} \times \cos \frac{\pi x}{L}, \\ \delta y''(x) &= -\delta A \times \frac{\pi^2}{L^2} \times \sin \frac{\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение равновесия $\dot{y}_x(x, t)$, $\ddot{y}_t(x, t)$, $\ddot{y}_x(x, t)$, $\delta \dot{y}_x$, $\delta \ddot{y}_x$, $\delta y(Vt)$, $\delta y(x)$, получим дифференциальное уравнение второй степени относительно искомой функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} -Tf \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L \cos^2 \frac{\pi x}{L} dx - \rho \ddot{f} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx - EJf \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\ - M \left(\ddot{f} \sin \frac{\pi vt}{L} + 2v \dot{f} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi vt}{L} - v^2 f \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi vt}{L} \right) \sin \frac{\pi vt}{L}. \end{aligned}$$

Выполним подстановку $\int \sin^2 ax \cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$, $\int \cos^2 ax \times dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$, а также некоторые преобразования, после чего получим дифференциальное уравнение в конечном виде:

$$\left(1 + 2\alpha \sin^2 kt\right) \ddot{f} + 2\alpha k \sin(2kt) \dot{f} + \left(\frac{\pi^2 T}{L^2 \rho} + \omega_0^2 - 2\alpha k^2 \sin^2 kt\right) f =$$

$$2\alpha g \sin kt,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{M}{\rho L},$$

$$k = \frac{\pi v}{L},$$

$$\omega_0^2 = EJ \frac{\pi^4}{\rho L^4}.$$

Левую часть уравнения можно преобразовать с помощью подстановки $f = u(t) \exp\left(-\int \frac{\alpha k \sin 2kt}{1+2\alpha \sin^2 kt} dt\right)$ к уравнению Маттье-Хилла [1]:

$$\ddot{u}(t) + a(t)u(t) = 0,$$

где $a(t) = \frac{\frac{\pi^2 T}{L^2 \rho} + \omega_0^2 - 2\alpha k^2 \sin^2 kt}{(1+2\alpha \sin^2 kt)} - \frac{2\alpha k^2 (1+2\alpha \sin^2 kt) \cos 2kt + 3\alpha^2 k^2 \sin^2 2kt}{(1+2\alpha \sin^2 kt)^2}$

Полученное дифференциальное уравнение описывает колебания, возникающие при движении кабины на участке ППКД. Подставляя конкретные параметры дороги (длина пролета, жесткость и масса каната, масса кабины, скорость движения кабины, натяжение каната) и используя Mathcad, можно получить графические решения уравнения для различных условий [2].

Зависимость амплитуды колебаний от количества человек, находящихся в кабине, представлена на (Рис. 3).

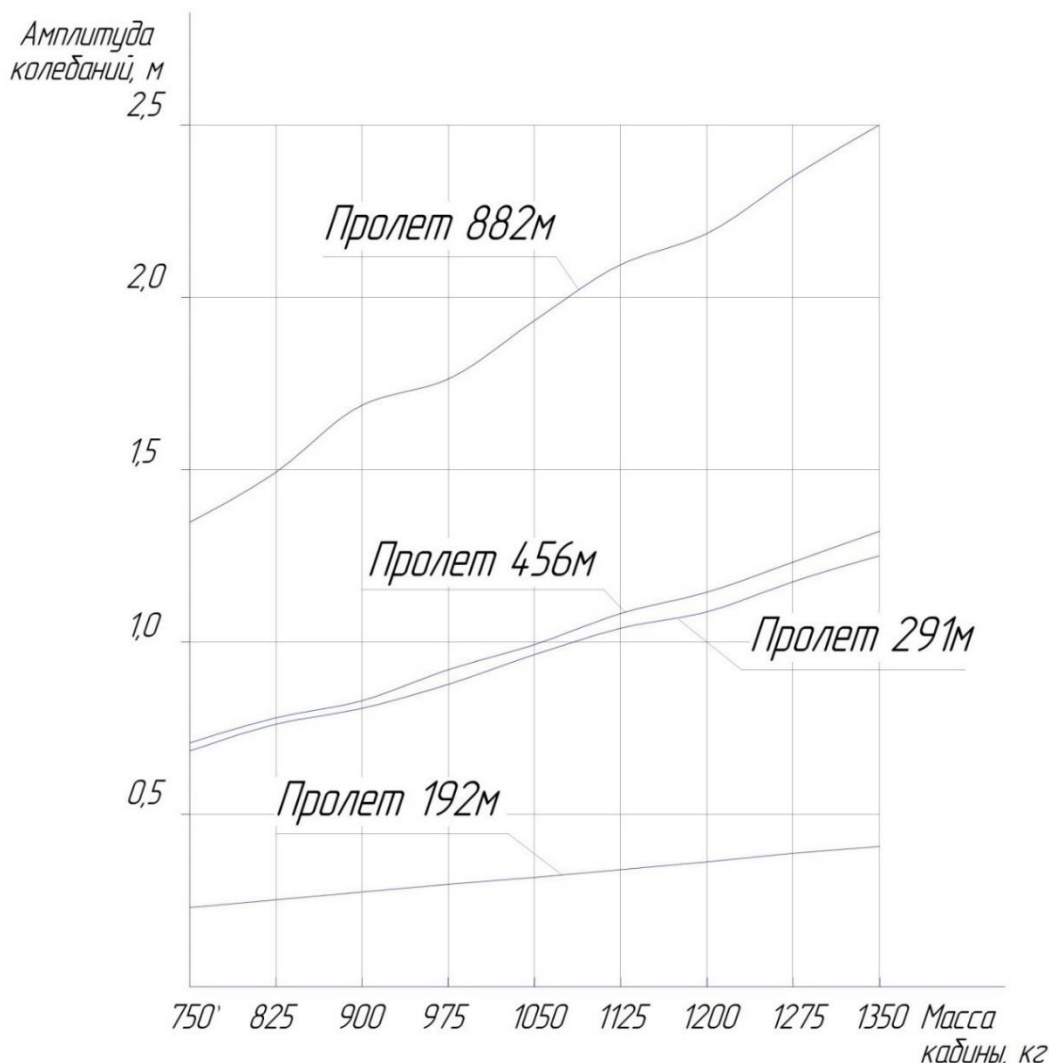


Рисунок 3 – Зависимость амплитуды колебаний от массы кабины

Амплитуду колебаний кабины можно уменьшить, увеличивая натяжение каната. На рис. 4. показана зависимость амплитуд от натяжения несуще-тягового каната на участке длиной 200 м.

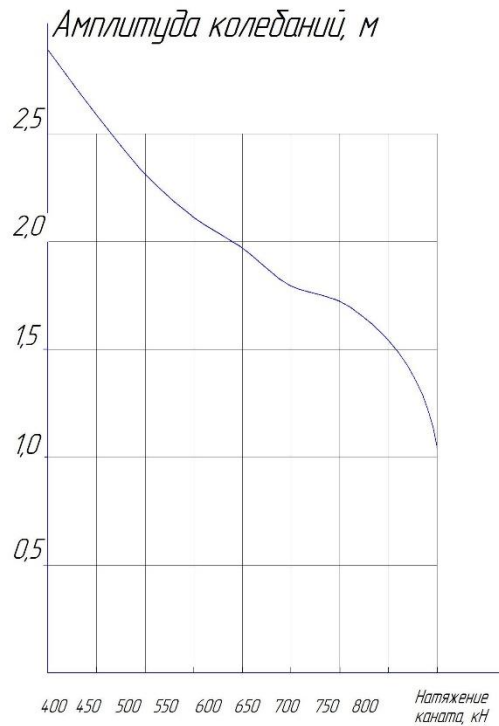


Рисунок 4 – Зависимость амплитуды колебаний кабины от натяжения

С увеличением натяжения в несуще-тяговом канате максимальный провес в пролете также уменьшается. Зависимость величины провеса от натяжения представлена на (Рис. 5).

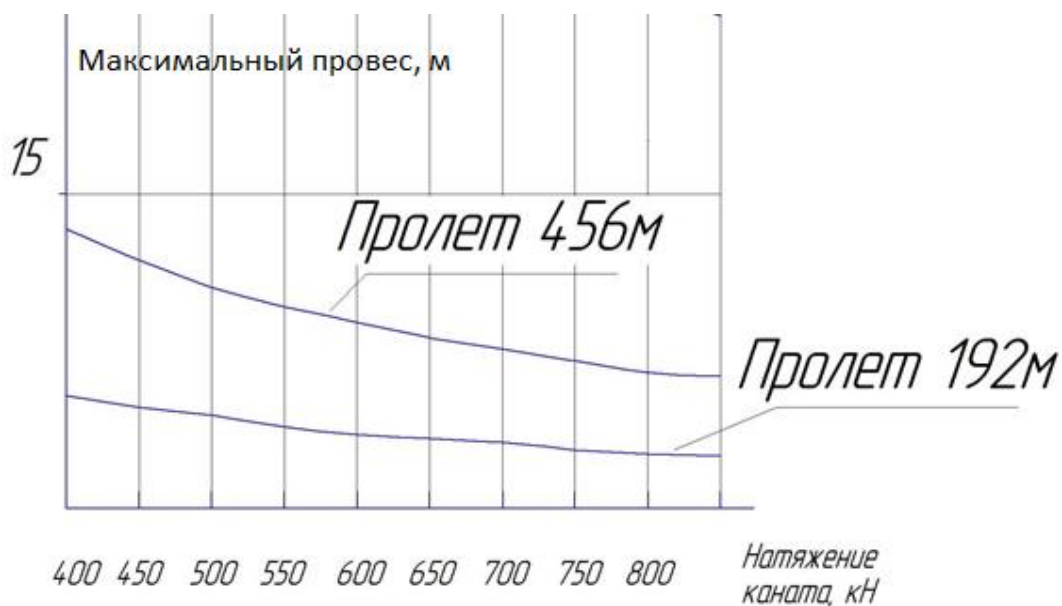


Рисунок 5 – Зависимость провеса от натяжения каната

Литература:

1. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. 477с.
2. Кирьянов Д. В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 704с.