

ПРОИЗВОДНАЯ В ЭКОНОМИКЕ

*Карпина Анастасия Игоревна, студент 1-го курса кафедры «Экономика, организация строительства и управление недвижимостью»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Мороз О.А., канд. физ.-мат. наук)*

К вопросу приложений производной.

Одним из важных приложений производной в экономических задачах является понятие эластичности, которое впервые возникло в работах А. Маршалла в 1885 г.

Понятие эластичности позволяет прояснить процесс адаптации рынка к изменению его факторов. Предприятие, повышая цену на продукцию, имеет возможность увеличить выручку от её продажи. Эластичность как раз и даёт ответ на вопрос о том, на какую величину изменится объём спроса и предложения при изменении цены.

Эластичность является мерой чувствительности одного из параметров по отношению к другому. Она показывает, на сколько процентов изменится первый показатель при изменении другого на 1%.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая получит приращение Δy , если x получит приращение Δx .

Отношение $\frac{\Delta y}{y}$ называется относительным приращением функции, а отношение $\frac{\Delta x}{x}$ – относительным приращением аргумента.

Тогда эластичность функции определяется как предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y' \cdot \frac{x}{y}$$

Пример 1. Найти эластичность функции $y = (1 + 2x)e^{-x^2}$ в точке $x_0 = 1$.
Решение.

$$E_x(y) = y' \cdot \frac{x}{y}$$

$$y' = 2 \cdot e^{-x^2} + (1 + 2x)e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2e^{-x^2}(1 - x - 2x^2)$$

$$y'(x_0) = -4e^{-1}$$

$$\frac{x}{y} \Big|_{x_0} = \frac{x}{(1+2x)e^{-x^2}} \Big|_{x_0=1} = \frac{1}{3e^{-1}}$$

$$E_x(y) = \frac{-4e^{-1}}{3e^{-1}} = -\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти эластичность спроса q относительно цены p , если $q(p) = -3p^2 + 2p + 8$ при $p = 1$.

Решение.

$$E_p(q) = q' \cdot \frac{p}{q}$$

Если $|E_p(q)| > 1$, то спрос эластичен; $|E_p(q)| < 1$, то спрос неэластичен; $|E_p(q)| = 1$, то спрос нейтрален.

$$q'(p)|_{p=1} = (6p + 2)|_{p=1} = -4$$

$$E_p(q) = -4 \cdot \frac{p}{-3p^2 + 2p + 8} \Big|_{p=1} = -\frac{4}{7}$$

Таким образом, $|E_p(q)| = \frac{4}{7} < 1$. Это означает, что если цена возрастёт на 1% (т.е. станет 1,01), то спрос уменьшится на 0,57%.

Пример 3. Найти эластичность спроса q по доходу r , если $q(r) = 2 + 1,2r + 0,4r^2$. Как изменится спрос, если доход изменится от 100 до 150?

Решение.

$$q'(r) = 1,2 + 0,8r$$

$$E_r(q) = (1,2 + 0,8r) \cdot \frac{r}{2 + 1,2r + 0,4r^2} \Big|_{r=100} = 1,9699 \approx 1,97$$

$$E_r(q) = (1,2 + 0,8r) \cdot \frac{r}{2 + 1,2r + 0,4r^2} \Big|_{r=150} = 1,9799 \approx 1,98$$

Спрос практически не изменится.