Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Основы бизнеса»

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методическое пособие по дисциплине «Математика»
для студентов специальностей
1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии»,
1-52 04 01 «Производство экспозиционно-рекламных объектов»

Учебное электронное издание

Минск 2010

УДК 517.3

Авторы:

Г.И. Лебедева, В.П. Грибкова, И.Е. Ругалева

Рецензенты:

Е.А. Федосик, доцент кафедры «Высшая математика № 1» БНТУ, кандидат физ.-мат. наук;

И.Н. Катковская, доцент кафедры «Высшая математика № 1» БНТУ кандидат физ.-мат. наук

Методическое пособие составлено в соответствии с программой курса математики для инженерных специальностей. В нем дано краткое описание теории по разделу математики «Теория поля», приведены примеры решения, даны задания для аудиторной и домашней работы. Для всех заданий даны ответы. Излагаемый материал разбит по занятиям, каждое из которых посвящено отдельной теме.

Методическое пособие будет полезным при организации практических и лабораторных занятий, а также может использоваться для самостоятельной работы студентов.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 293-91-97 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ФММП51 – 11.2010

СОДЕРЖАНИЕ

Занятие № 1
СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Теоретические сведения

Пространственным скалярным полем называется функция

$$u = u(x, y, z), \tag{1.1}$$

заданная в некоторой области трехмерного евклидового пространства.

Аналогично **плоским скалярным полем** называется функция $u = u(x, y)$, заданная в некоторой области двумерного евклидового пространства.

Характеристики поля

1. Геометрической характеристикой скалярного поля служат **поверхности уровня** – множества точек области определения поля, в которых оно принимает постоянное значение:

$$u(x, y, z) = C, \tag{1.2}$$

где C – любое фиксированное число из области значений функции.

Аналогично определяются линии уровня для плоского поля: $u(x, y) = C$.

2. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения поля $u = u(x, y, z)$ по направлению координатных осей OX, OY, OZ соответственно. Точки, в которых выполнено условие $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, называются **стационарными** (иногда говорят – критическими) для поля.

Пусть $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор (α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}$ с осями координат). Тогда **производной по направлению** $\vec{l}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1.3}$$

Если вектор не является единичным, то следует сначала найти его направляющие косинусы.

3. **Градиентом скалярного поля** $u = u(x, y, z)$ в точке M называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \tag{1.4}$$

где частные производные вычислены в точке M и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей.

Если в качестве вектора $\vec{l}$ взять направление градиента $\operatorname{grad} u / |\operatorname{grad} u|^{-1}$

$$\frac{du}{d\vec{l}} = |\operatorname{grad} u|. \tag{1.5}$$

В направлении градиента производная по направлению принимает наибольшее значение, то есть в этом направлении поле имеет наибольшую скорость возрастания.

Примеры

1. Найти линии уровня скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Решение. По (1.2) имеем $2x + 3y = c$ – это семейство прямых линий (рис. 1.1).

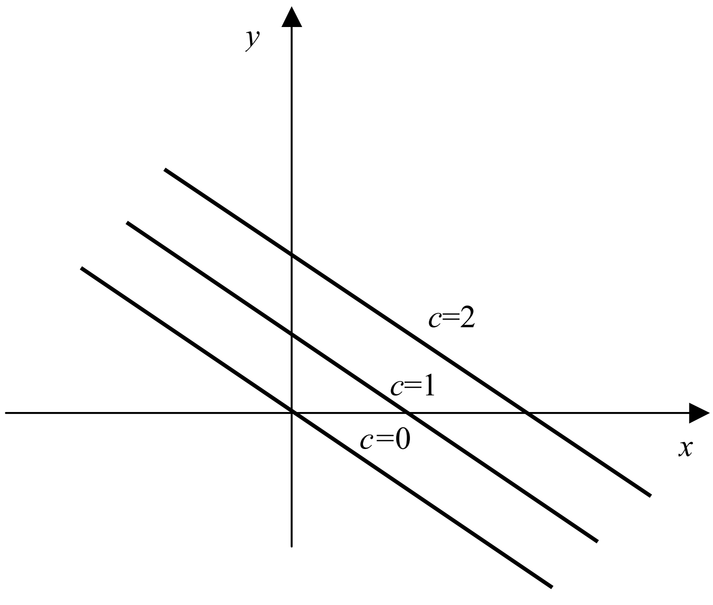

Рис. 1.1

2. Для скалярного поля $u = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2$ найти стационарные точки, поверхности уровня и записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $M(2; -1; 2)$.

Решение. Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

одновременно обращаются в нуль в точке $N(1, -1, 0)$, которая является стационарной.

По определению поверхности уровня имеем:

$$2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = c$$

или

$$2(x-1)^2 - 2 + (y+1)^2 - 1 + z^2 = c$$

$$2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = c + 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{1/2} + \frac{(y+1)^2}{1} + \frac{z^2}{1} = c + 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{c+3}{2}} + \frac{(y+1)^2}{c+3} + \frac{z^2}{c+3} = 1 .$$

Последнее уравнение при различных $c > -3$ определяет семейство эллипсоидов с центром в точке $O(1, -1, 0)$ и полуосями

$$a = \sqrt{\frac{c+3}{2}}, \quad b = \sqrt{c+3}, \quad d = \sqrt{c+3} .$$

Поверхность уровня, проходящая через точку $M(2, -1, 2)$, имеет уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{6} + \frac{z^2}{6} = 1 ,$$

где $c = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + (-1)^2 + 2(-1) + 2^2 = 3$.

3. Найти производную скалярного поля $u = xy + y^2 - 4z$ в точке $M(1,\ 2, 3)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.

Решение. Вектор $\vec{l}$ имеет координаты $(2, 3, 5)$. Найдем его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}, \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{3}{2\sqrt{7}},\ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{-5}{2\sqrt{7}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(1,\ 2,3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\big|_M = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x+2y)\big|_M = 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -4.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} + 5\cdot\frac{3}{2\sqrt{7}} - 4\frac{-5}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{15}{2\sqrt{7}} + \frac{20}{2\sqrt{7}} = \frac{39}{2\sqrt{7}}.$$

4. Найти производную скалярного поля $u = 4xy + y^2$ в точке $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

Решение. Направление $\vec{l}$ внешней нормали к эллипсу в точке М перпендикулярно к направлению вектора $\vec{a}$ касательного к эллипсу в этой точке (рис. 1.2).

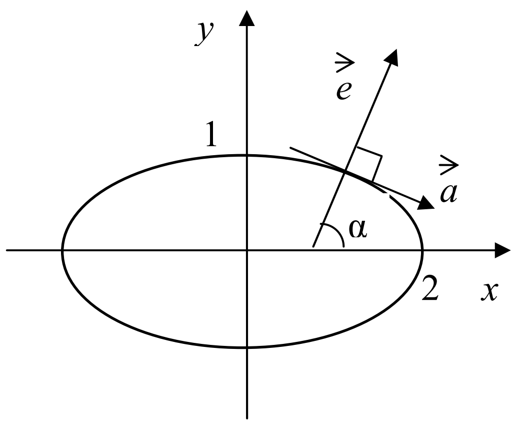

Рис. 1.2

Точка $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ лежит на верхней части эллипса $y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Обозначим через φ угол, который образует касательный вектор $\vec{a}$ с осью OX. Тогда

$$tg\varphi = y'\Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_M = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Если обозначить через α угол, образованный вектором $\vec{l}$ с осью OX, то из условия ортогональности $\vec{l}$ и $\vec{a}$ получим: $tg\alpha = -\frac{1}{tg\varphi} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Находим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Значения частных производных функции $u = 4xy + y^2$ в точке $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y\Big|_M = 2\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + 2y\Big|_M = 4 + \sqrt{3}.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} + (4+\sqrt{3}) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}(5+\sqrt{3}).$$

5. Найти вектор-градиент скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Решение. $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

В нашем случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u = (2; 3)$.

6. Для скалярного поля $u = tg(yz) + l^{z\ln x} - z$ в точке $M(1;0;2)$ найти вектор-градиент и наибольшую скорость возрастания.

Решение. Имеем, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{z}{x} l^{z\ln x}\Big|_M = 2;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{\cos^2(yz)}\Big|_M = 2;$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\cos^2(yz)} + l^{z\ln x} \cdot \ln x - 1\Big|_M = -1 .$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u = (2;\, 2; -1)$

Наибольшую скорость возрастания поля u в точке M найдем по формуле

$$\max \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{4+4+1} = 3 .$$

Аудиторные задания

1. Для заданного скалярного поля u записать линии уровня.

1.1. $u = x + 3y$. (Отв. $c = x + 3y$)

1.2. $u = x + 2y + 5z$. (Отв. $c = x + 2y + 5z$)

1.3. $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{6}$. (Отв. $c = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{6}$)

2. Для заданного скалярного поля u: а) записать уравнение линии уровня, проходящей через точку M; б) определить в точке M производную поля u по направлению вектора $\vec{l}$; в) градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке, если: $u = \ln(x \operatorname{tg} y)$, $M\left(1; \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\vec{l} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

$$\left(\text{Отв. } y = arctg\frac{1}{x},\quad \frac{du}{d\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{13}},\quad \operatorname{grad} u = \vec{i} + 2\vec{j},\quad \max\frac{du}{d\vec{l}} = \sqrt{5}. \right)$$

3. Пусть заданы скалярное поле u, точки M_1 и M_2, направление $\vec{l}$ и угол φ. Определить в точке M_1: а) производную поля по направлению $\vec{l}$; б) производную поля по направлению $\overrightarrow{M_1M_2}$; в) градиент; г) производную по направлению вектора $\vec{l}_1$, образующего с градиентом в точке M_1 угол φ, если

$u = x^2 y + xz^2 - 2z, \quad M_1(1,1,-1), \; M_2(2,-1,2), \quad \vec{l}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, \quad \varphi = 180^\circ$.

$$\left(\text{Отв. } \frac{du}{d\vec{l}} = \frac{8}{\sqrt{26}}, \quad \frac{du}{d\overline{M_1 M_2}} = -\frac{11}{\sqrt{14}}, \quad \operatorname{grad} u = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}, \quad \frac{du}{d\vec{l}} = -\sqrt{26}. \right)$$

4. Вычислить производную поля $u = u(x, y)$ в направлении:

а) биссектрисы первого координатного угла XOY от его вершины.

$\left(\text{Отв.}\, 0{,}5\sqrt{2}\left(u'_x + u'_z\right)\right)$

б) отрицательной полуоси OX.

$\left(\text{Отв.} \quad -u'_x\right)$

5. В каких точках плоскости XOY градиент поля $u = x^2 + y^2 - 3xy$

а) перпендикулярен к оси OY.

$\left(\text{Отв.} \quad y = 1{,}5x\right)$

б) параллелен оси OY.

$\left(\text{Отв.} \quad y = \frac{2}{3}x\right)$

Домашнее задание

1. Для заданного скалярного поля записать уравнение линии уровня, проходящей через точку M. Определить в точке M производную поля u по направлению $\vec{l}$, градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

$u = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 2,$
$M(-1, 2), \quad \vec{l} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\left(\text{Отв.} \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 10, \quad \frac{du}{d\vec{l}} = \frac{18}{5}, \quad \operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 6\vec{j}, \quad \max \frac{du}{d\vec{l}} = 2\sqrt{10} \right)$$

2. Для заданного скалярного поля u определить в точке M_1 производную поля по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, градиент, производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке M_1 угол φ.

2.1. $u = xy^2z + yz^2 - 3z,\quad M_1(0,1,2),\quad M_2(-2,3,-1),\quad \vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},\quad \varphi = 30^\circ$.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Отв.}\quad \dfrac{du}{d\vec{e}} = 0;\quad \dfrac{du}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\\ \operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k},\\ \dfrac{du}{d\vec{l}_1} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}\end{array}\right)$$

2.2. $u = \dfrac{y}{xz} + \dfrac{x}{yz} + \dfrac{z}{xy},\quad M_1(1,2,3),\quad M_2(-2,1,-1),\quad \vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k},\quad \varphi = 225^\circ$.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Отв.}\quad \dfrac{du}{d\vec{l}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{29}},\quad \dfrac{du}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = \dfrac{101}{18\sqrt{26}}\\ \operatorname{grad} u = -2\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j} + \dfrac{2}{9}\vec{k},\\ \dfrac{du}{d\vec{l}_1} = -\dfrac{\sqrt{2786}}{36}\end{array}\right)$$

3. Вычислить производную поля $u = \ln\left(xz^2 + 2yz\right)$ в точке $M(1,3,2)$ по положительному направлению окружности $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \sin t \\ z = 2 \end{cases}$.

$$\left(\text{Отв.}\quad -\frac{1}{4}\right)$$

4. Найти угол φ между градиентами функций $u = x + yz + 2\sqrt{xz}$ и $\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(2,3,2)$.

$$\left(\text{Отв.}\quad \varphi = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{102}}\right)\right)$$

Занятие № 2

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Теоретические сведения

Векторное поле задается вектор-функцией

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

принимающей значения в трехмерном евклидовом пространстве.

В случае двумерного векторного плоского поля

$$\vec{F}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

1. Векторной линией поля $\vec{F}$ называется такая линия, касательная в каждой точке параллельна вектору поля в этой точке (рис. 2.1).

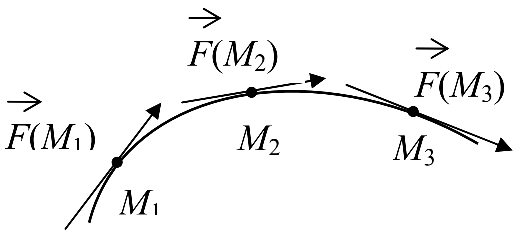

Рис. 2.1.

В трехмерном случае векторные линии определяются из уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{2.1}$$

А для плоского векторного поля

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{P(x,y)} &= \frac{dy}{Q(x,y)} \\ \frac{dx}{P(x,z)} &= \frac{dz}{R(x,z)} \\ \frac{dy}{Q(y,z)} &= \frac{dz}{R(y,z)} \end{aligned}\right\}. \tag{2.2}$$

2. Потоком векторного поля через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на единичный вектор нормали $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$:

$$\Pi_s = \oiint\limits_{(S)} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \iint\limits_{(S)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS\,. \qquad (2.3)$$

Напомним, что ориентация гладкой поверхности определяется выбором одного из двух возможных векторов нормали, который изменяется на поверхности непрерывным образом.

В случае замкнутой поверхности S в качестве вектора $\vec{n}$ берется вектор к внешней стороне этой поверхности, а поток записывается в виде

$$\Pi_S = \iint\limits_{S} \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS\,. \qquad (2.4)$$

Свойства потока

1. При изменении ориентации поверхности поток изменяет знак на противоположный.

2. $\Pi_S\left(\vec{F}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Pi_{Si}\left(\vec{F}\right)$, где $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Физический смысл потока зависит от природы поля $\vec{F}$. Если, например, $\vec{F}$ – поле скоростей текущей жидкости в области V, а S – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}$, то поток $\Pi_S\left(\vec{F}\right)$ будет равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность S в направлении $\vec{n}$.

Если $\vec{F}$ – силовое поле, то поток $\Pi_S\left(\vec{F}\right)$ выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих поверхность S в единицу времени в направлении $\vec{n}$.

Если S – часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, ограниченная поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(z_1(x, y) \le z_2(x, y))$, то в цилиндрических координатах поток векторного поля через рассматриваемую поверхность вычисляется по формуле:

$$\Pi_S\left(\vec{F}\right)=\pm\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{z_1(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}\left(x\cdot P(x,y)+yQ(x,y)dz\right),\qquad(2.5)$$

где $\begin{cases}x=\rho\,\cos\varphi\\ y=\rho\,\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ – цилиндрические координаты, $0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho<\infty,\quad -\infty<z<\infty$.

Если S – часть сферы, то

$$\Pi_S\left(\vec{F}\right)=\pm\rho\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\left(xP(x,y,z)+y\cdot Q(x,y,z)+zR(x,y,z)\right)\sin\theta\,d\theta,\qquad(2.6)$$

где $\begin{cases}x=\rho\,\cos\varphi\sin\theta\\ y=\rho\,\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\,\cos\theta.\end{cases}$

Примеры

1. Для плоского поля $\vec{F}=(5x-y)i+2y\,\vec{j}$ найти векторные линии.

Решение. Данное поле дифференцируемо во всех точках плоскости XOY.

$P(x,y)=5x-y$
$Q(x,y)=2y.$

Согласно (2.2) имеем: $\dfrac{dx}{5x-y}=\dfrac{dy}{2y}$.

Отсюда $2ydx=(5x-y)dy$ или $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{5x-y}$. Мы получили однородное уравнение, которое решаем с помощью подстановки

$y=t\cdot x$
$y'=t'x+t$:

$t'x+t=\dfrac{2tx}{5x-tx}$

$t'x+t=\dfrac{2t}{5-t}$

$t'x=\dfrac{2t}{5-t}-t$

$t'x=\dfrac{2t-5t+t^2}{5-t}$

или

$\dfrac{dt}{dx}\cdot x=\dfrac{t^2-3t}{-t+5}$

$\dfrac{(5-t)dt}{t^2-3t}=\dfrac{dx}{x}$

$\int\dfrac{(5-t)}{t^2-3t}dt=\int\dfrac{dx}{x}$

Разложим подынтегральную дробь:

$$\frac{5-t}{t^2-3t}=\frac{5-t}{t(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}=\frac{At-3A+Bt}{t(t-3)}.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} t^{\circ}&:\quad 5=-3A \\ t^{1}&:\quad -1=A+B \end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=-\frac{5}{3} \\ B&=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\frac{-\frac{5}{3}}{t}\,dt+\int\frac{\frac{2}{3}}{t-3}\,dt=\int\frac{dx}{x}$$

или

$$-\frac{5}{3}\ln|t|+\frac{2}{3}\ln|t-3|=\ln|x|+\ln C$$

$$\ln\frac{(t-3)^{2/3}}{t^{5/3}}=\ln(x\cdot C)$$

$$\frac{(t-3)^{2/3}}{t^{5/3}}=x\cdot C;\quad t={}^{y}\!/_{x}$$

.

Следовательно, $C=\dfrac{\left(\frac{y}{x}-3\right)^{2/3}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{5/3}\cdot x}$ – семейство векторных линий.

2. Найти векторные линии поля $\vec{F}=(x-y+z)\,\vec{i}+(x+y-z)\,\vec{j}+(2z-y)\,\vec{k}$.

Решение. Запишем систему дифференциальных уравнений (2.1), используя дифференцирование по параметру t:

$$\frac{dx}{dt}=x-y+z;\quad \frac{dy}{dt}=x+y-z;\quad \frac{dz}{dt}=2z-y.$$

Найдем общее решение этой системы. Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 1 & (-1-\lambda) & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1.$$

а) Рассмотрим $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{cases} -e_1 - e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 - e_2 - e_3 = 0 \\ -e_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $e_1 = e_3, \quad e_2 = 0$. Следовательно, (1, 0 ,1) – собственный вектор и

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 0 \\ z = e^{2t} \end{cases} . -$$

частное решение системы.

б) Рассмотрим $\lambda_1 = 1$.

Система линейных уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} -e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 \quad - e_3 = 0 \\ -e_2 + e_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность, равную 2. Поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} x = (a + bt)\, e^t \\ y = (c + dt)\, e^t \\ z = (k + \ell t)\, e^t. \end{cases}$$

Подставив правые части последних равенств в систему дифференциальных уравнений, записанных через параметр t, после преобразований получим:

$$\left.\begin{array}{ll} -d + \ell = 0 & b = -c + k \\ b - \ell = 0 & d = a - k \\ 2\ell - d = \ell & \ell + k = 2k - c \end{array}\right\}.$$

Приняв $\ell = C_1, \quad k = C_2$, получим:

$$d = C_1, \quad b = C_1, \quad c = -C_1 + C_2,$$
$$a = C_1 + C_2, \quad \ell = C_1, \quad k = C_2.$$

Подставив эти значения в выражения для x, y, z и прибавив частное решение $(x = e^{2t}, \quad y = 0, \quad z = e^{2t})$, умноженное на C_3, получим общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_1 t)\, e^t + C_3 e^{2t} \\ y = (-C_1 + C_2 + C_1 t)\, e^t \\ z = (C_2 + C_1 t)\, e^t + C_3 e^{2t}, \end{cases}$$

определяющее параметрические уравнения семейства векторных линий поля.

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

Решение. Поверхность $z = 4 - x^2 - y^2$ представляет собой параболоид вращения (рис. 2.2).

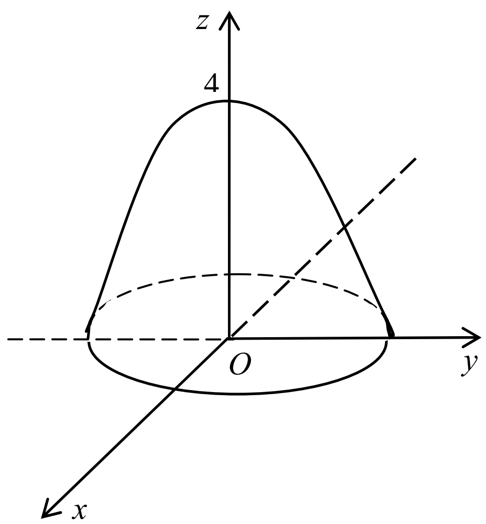

Рис. 2.2

Проекцией (G) рассматриваемой поверхности на плоскость *XOY* является круг радиуса 2. Так как верхняя сторона параболоида видна со стороны положительного направления оси *OZ*, то перед интегралом по проекции G надо взять знак плюс.

Находим нормаль $\vec{n} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$ к нашей поверхности и скалярное произведение

$$(\vec{F}\cdot\vec{n}) = x\cdot 2x + y\cdot 2y + 1\cdot(-z) = 2x^2 + 2y^2 - z = 2x^2 + 2y^2 - 4 + x^2 + y^2 =$$
$$= 3x^2 + 3y^2 - 4 = 3(x^2 + y^2) - 4.$$

Следовательно,

$$\prod_s(\vec{F}) = +\iint_G (3(x^2+y^2-4)\,dx\,dy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |J| = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3\rho^2 - 4)\cdot\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3\rho^4}{4}\bigg|_0^2 - \frac{4\rho^2}{2}\bigg|_0^2 \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,(12-8) = 4\varphi\big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

4. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (4x-3)\,\vec{i} + (2y-6x)\,\vec{j} - y^2z^3\,\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте (см. рис. 2.3).

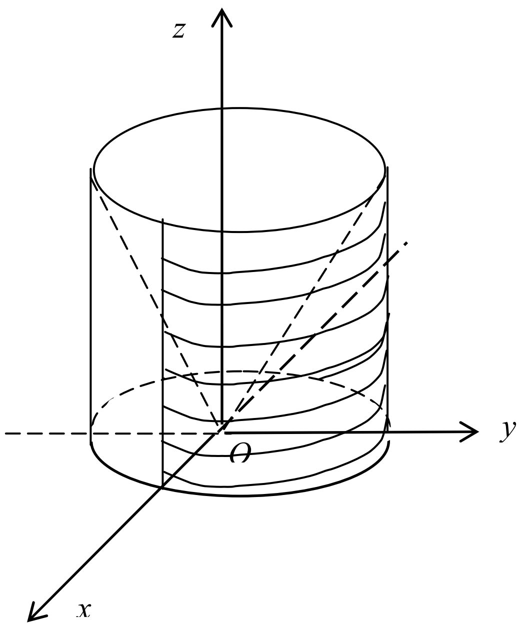

Рис. 2.3

Решение. Для решения используем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \\ |I| = \rho. \end{cases}$$

По внутренней стороне поверхности интеграл берем со знаком «минус», т.к. заданная поверхность видна с отрицательной стороны оси OY:

$$\Pi_\rho(\vec{F}) = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(x(4x-3y)+y(2y-6x)\right)dz = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4x^2-12xy+2y^2-6xy\right)dz =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4\cdot\rho^2\cos^2\varphi - 12\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - 6\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right)dz =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 \left(4\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - 18\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right)\Big|_{\rho=3} dz =$$

$$= -9\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi - 18\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi\cdot z\Big|_0^9 =$$

$$= -81\int_0^{\pi/2}\left(\frac{4(1+\cos 2\varphi)}{2} + 1 - \cos 2\varphi - 18\cos\varphi\,\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= -81\left(2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + 18\frac{\cos^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= -81\left(\pi + \frac{\pi}{2} - 18\right) = -81\left(\frac{3}{2}\pi - 18\right).$$

5. Вычислить поток поля $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + 2z\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, вырезанной конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (см. рис. 2.4).

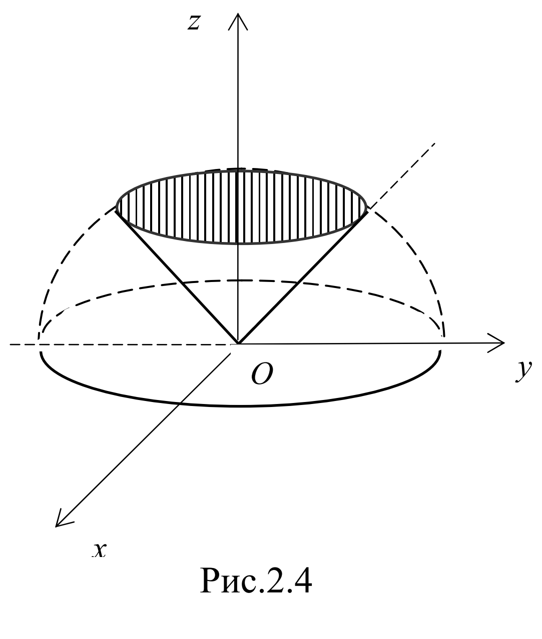

Рис.2.4

Решение: Для решения используем сферические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\sin\theta \\ y = \rho\sin\phi\cos\theta \\ z = \rho\cos\theta \\ |I| = \rho^2\sin\theta, \end{cases}$$

в которых уравнение сферы задается равенством $\rho = 1$.

В соответствии с формулой (2.6) имеем:

$$\varPi_S(\vec{F}) = +\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(x\cdot x^3 + y(-y)^3 + z\cdot 2z\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\cos^4\varphi - \sin^4\theta\sin^4\varphi + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\left(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi\right) + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cdot\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} \left(\sin^4\theta\cdot\cos 2\phi + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi \int_0^{\pi/4} \sin^5\theta\, d\theta + 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta\cos\theta\, d\theta - 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, d(\cos\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi \int_0^{\pi/4} \sin^4\theta\, d(\sin\theta) - 2\int_0^{2\pi} d\phi \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/4} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi\cdot\left.\frac{\sin^5\theta}{5}\right|_0^{\pi/4} - 2\int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \int_0^{2\pi} \cos 2\phi\, d\phi\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5} - 2\left.\left(\frac{2\sqrt{2}}{24} - \frac{1}{3}\right)\cdot\phi\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5}\left.\frac{\sin 2\phi}{2}\right|_0^{2\pi} - \frac{\pi\left(2\sqrt{2} - 8\right)}{6} = -\frac{\pi\left(\sqrt{2} - 4\right)}{3}.$$

Аудиторные задания

1. Найти векторные линии для поля $\vec{F}$.

1.1. $\vec{F} = \left(3x - y^2\right)\vec{i} + y\vec{j}$. $\quad\left(\text{Отв.}\quad x = y^2\right)$

1.2. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}$.

$$\left(\begin{array}{ll} \text{Отв.} & x = c \cdot \cos t \\ & y = c \cdot \sin t \\ & z = 2t + c_1 \end{array}\right)$$

1.3. $\vec{F} = \left(x + y^2 + z^2\right)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\left(\begin{array}{ll} \text{Отв.} & x - y^2 - z^2 = c_1 z \\ & y = c_2 z \end{array}\right)$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

$\left(\text{Отв.} \quad 2\pi\right)$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, расположенной в первом октанте.

$\left(\text{Отв.} \quad 6\right)$

4. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ через нижнюю сторону части поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$.

$\left(\text{Отв.} \quad -2\pi\right)$

5. Вычислить поток поля $\vec{F} = xy^2\vec{i} + \frac{1}{2}yz\vec{j} + x^2z\vec{k}$ через нижнюю сторону части параболоида $z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2$.

$\left(\text{Отв.} \quad \frac{2\pi}{3}\right)$

Домашнее задание

1. Найти векторные линии поля $\vec{F}$.

1.1. $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + 2(y + 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$.

$$\left(\begin{array}{ll} \text{Отв.} & x = C_1 + C_2 t + 4C_3 e^{3t} \\ & y = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + 4C_3 e^{3t} \\ & z = C_1 - C_2 + C_2 t + C_3 e^{3t}. \end{array}\right)$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (4x - 3y)\vec{i} + (2y - 6x)\vec{j} - y^2 z\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте.

$\left(\text{Отв.} \quad 72 - 3\pi\right)$

3. Вычислить поток поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоскости треугольника ABC, где $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$.

$\left(\text{Отв.} \quad -4\right)$

4. Вычислить поток поля $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} - z^2 \cos y\vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, лежащей в третьем октанте и ограниченной плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

$\left(\text{Отв.} \quad \dfrac{80}{3}\right)$

Занятие № 3

ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО. ДИВЕРГЕНЦИЯ. ЦИРКУЛЯЦИЯ. РОТОР. ФОРМУЛА СТОКСА

Теоретические сведения

Если векторное поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ дифференцируемо в некоторой окрестности замкнутой области V, границей которой является гладкая или кусочно-гладкая поверхность S (которую считаем положительно ориентированной), то справедлива **формула Остроградского**:

$$\oint\!\!\!\oint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) dxdydz. \tag{3.1}$$

Дивергенцией векторного поля $\vec{F}$ в точке $M(x, y, z)$ называется

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{3.2}$$

Если $divF(M) > 0$, то в точке M – источник, если $divF(M) < 0$, то в точке M – сток, если $divF(M)$=0, то в точке M нет ни источника, ни стока. Поле в этом случае называется **соленоидальным.**

С учетом равенства (3.2) формула Остроградского примет вид:

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS = \iiint_V divF dV \ . \tag{3.3}$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вдоль замкнутой линии L называется криволинейный интеграл

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz\ , \tag{3.4}$$

где обход линии L осуществляется в положительном направлении. Циркуляция имеет простой физический смысл: циркуляция – это работа силы поля вдоль кривой L, расположенной в области действия силового поля.

Ротором векторного поля $\vec{F}$ в точке $M(x,y,z)$ называется вектор

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{3.5}$$

где частные производные вычислены в этой точке. Его можно записать в символической форме следующим образом

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Ротор является характеристикой вихревых движений в поле. Если $rot\vec{F} = 0$, то поле называется **безвихревым**.

Для любой незамкнутой поверхности $S \subset V$, опирающейся на контур L, имеет место формула Стокса

$$\oint_L \left(\vec{F} \cdot d\vec{\ell}\right) = \iint_S \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS. \tag{3.7}$$

Формула Стокса позволяет свести вычисления циркуляции векторного поля $\vec{F}$ по контуру L к вычислению потока поля $rot\vec{F}$ через незамкнутую поверхность S, опирающуюся на контур L (L – граница незамкнутой поверхности S)

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \pm \iint_{D_{xy}} \left(rot\vec{F}, \vec{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)} dxdy, \tag{3.8}$$

где D_{xy} – проекция S на плоскость XOY, $\vec{n} = -z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + \vec{k}$ – вектор нормали к поверхности S.

Примеры

1. Вычислить дивергенцию поля $\vec{F} = (2xy + zx)\vec{i} + (xyz + y)\vec{j} + (x + y + 2z)\vec{k}$ в точке $M(1,1,2)$.

Решение. Согласно формуле (3.3) имеем $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$,

где $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2y + z\big|_M = 2 \cdot 1 + 2 = 4$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial y} = xz + 1\big|_M = 1 \cdot 2 + 1 = 3$,

$\dfrac{\partial R}{\partial z} = 2.$

Отсюда $div\vec{F}(M) = 4 + 3 + 2 = 9 > 0$. Следовательно, в точке M находится источник, мощность которого равна 9.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j} - 5z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, накрывающей параболоид (рис. 3.1).

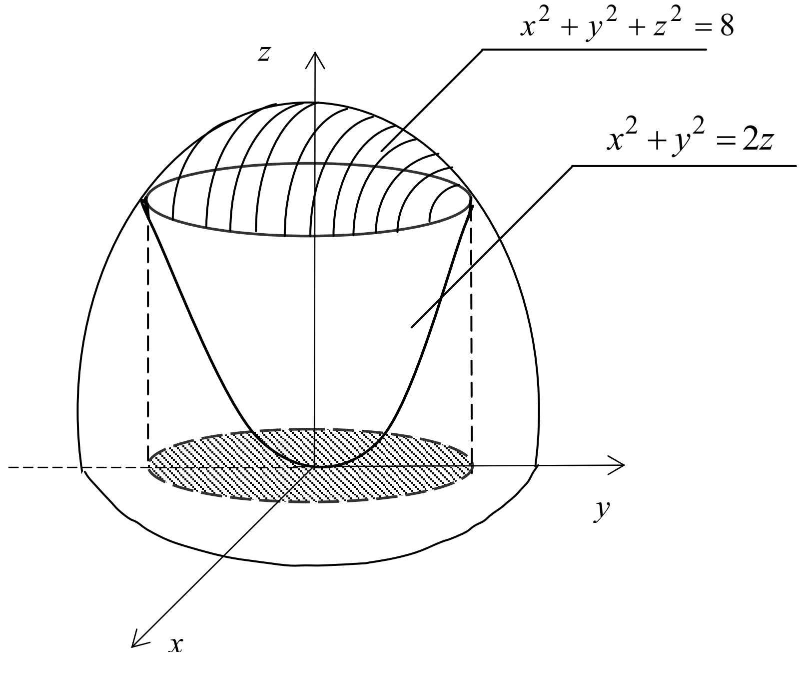

Рис. 3.1

Решение. Вычислим поток по формуле Остроградского. Дивергенция заданного поля равна $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = -10z$, где $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = -3$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = -10z$.

Поток $\Pi_s(\vec{F}) = \iiint\limits_V div\vec{F}dv = \iiint\limits_V (-10z)\, dxdydz.$

Вычисление тройного интеграла по области V будем осуществлять в цилиндрических координатах: $x = \rho\cos\phi; \quad y = \sin\phi; \quad z = z$:

$$\Pi_s(\vec{F}) = -10\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}} zdz = -10\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left(\left. \frac{z^2}{2} \right|_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}} \right) =$$

$$= -10\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left(\frac{8-\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{8} \right) = -10\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\sqrt{2}} 4\rho d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2} d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^5}{8} d\rho \right) =$$

$$= -10\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left. \frac{4\rho^5}{5} \right|_0^{\sqrt{2}} - \left. \frac{\rho^4}{8} \right|_0^{\sqrt{2}} - \left. \frac{\rho^6}{48} \right|_0^{\sqrt{2}} \right) = -10\left(\frac{16\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \left(-32\sqrt{2} + \frac{20}{3} \right) 2\pi.$$

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности, ограниченной поверхностями:

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ (см. рис. 3.2).

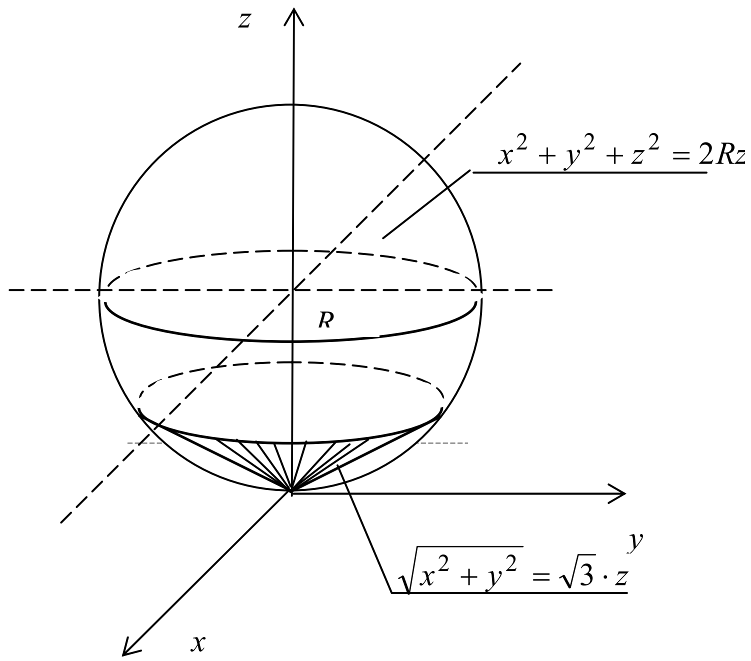

Рис. 3.2

Решение. Исходное поле $\vec{F}$ определено и дифференцируемо во всем пространстве и

$div\vec{F} = 3z^2$, где $\frac{\partial P}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$

Следовательно, $\Pi_s(\vec{F}) = \iiint\limits_V 3z^2\, dxdydz.$

Вычислим этот интеграл в сферических координатах:

$$F_s(\vec{F}) = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta d\rho = 6\pi\cdot\int\limits_0^{\pi/3}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta}\rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{192\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\pi/3}\cos^7\theta\cdot\sin\theta\, d\theta = \frac{153\pi R^5}{32}.$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$ по линии L, состоящей из отрезка прямой AB и параболы $x = 3 - y^2$ (рис. 3.3).

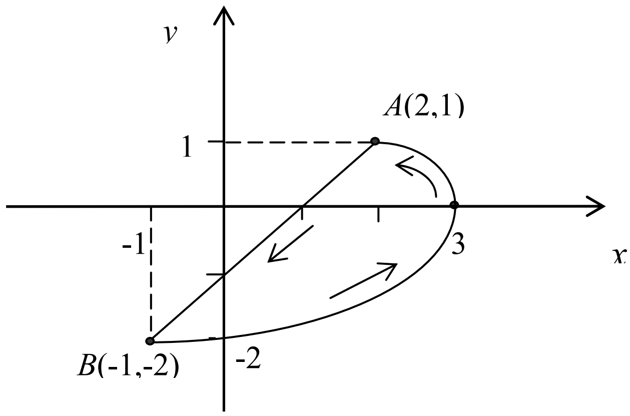

Рис. 3.3

Решение. Исходная линия L состоит из 2-х участков: прямой AB и параболы. Следовательно, циркуляция заданного поля $\vec{F}$ будет равна сумме двух линейных интегралов:

$$Ц_L(\vec{F}) = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BCA}.$$

Уравнение прямой AB записывается в виде $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-2}{-1-2}$ или $\frac{y-1}{-3} = \frac{x-2}{-3} \Rightarrow y = x - 1$. Тогда

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_2^{-1}\left(2x - (x-1)^2 + 1) + (3x + 2(x-1)^2 - 10)\right)dx = \int\limits_2^{-1}\left(5x + (x-1)^2 - 9\right)dx =$$

$$= \left.\frac{5x^2}{2}\right|_2^{-1} + \left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_2^{-1} - 9x\Big|_2^{-1} = \frac{5}{2} - 10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 9 + 18 = 16{,}5.$$

$$\int\limits_{BCA} = \int\limits_{-1}^{2}\Big((2x-(3-x)+1)+(3x+2(3-x)-10\Big)dx = \int\limits_{-1}^{2}(4x-6)\,dx =$$

$$= \frac{4x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} - 6x\Big|_{-1}^{2} = 8-2-12-6 = -12.$$

Циркуляция по заданному контуру L будет равна $Ц_L\left(\vec{F}\right) = 16{,}5 - 12 = 4{,}5 > 0.$

5. Найти ротор для векторного поля $\vec{F} = (2xy - z)\vec{i} + (yx+2)\vec{j} + (x^2 - 3xz)\vec{k}$.

Решение.

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2xy - z) & (yx+2) & (x^2 - 3xz) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial(x^2-3xz)}{\partial y} - \frac{\partial(yx+2)}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial(x^2-3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy-z)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(yx+2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy-z)}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}\,(0-0) - \vec{j}\,(2x-3z+1) + \vec{k}\,(y-2x) = (-2x+3z-1)\vec{j} + (y-2x)\vec{k}.$$

6. Вычислить циркуляцию поля

$\vec{F} = \left(y^3 - 8yz - z\right)\vec{i} + \left(yz - x^3 + 2x\right)\vec{j} + \left(yx^3 - 2z^3\right)\vec{k}$ вдоль контура L, полученного пересечением параболоида $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = 1$ и ориентированного положительно по отношению к оси OZ (рис. 3.4).

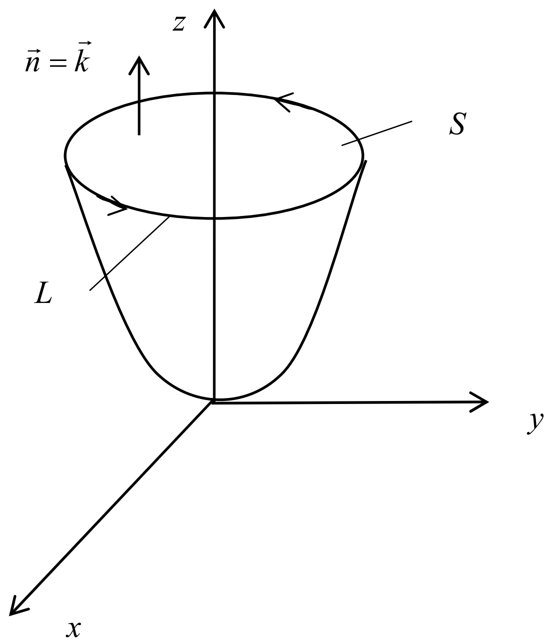

Рис. 3.4

Решение. Контур L – окружность радиусом, равным 1, с центром в точке (0, 0, 1). Ротор данного поля

$$rot\vec{F} = \left(x^3 - y\right)\vec{i} - \left(3yx^2 + 8y + 1\right)\vec{j} + \left(2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z\right)\vec{k}$$
$$\left(rot\vec{F}, \vec{n}\right) = 2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z.$$

Тогда циркуляция вычисляется по формуле Стокса:

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = +\iint_{D_{xy}}\left(rot\vec{F}, \vec{n}\right)\Big|_{z=1}dxdy = \iint_{D_{xy}}\left(10 - 3x^2 - 3y^2\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(10 - 3\rho^2\right)\rho\ d\rho = \frac{17\pi}{2}.$$

Аудиторные задания

1. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$

1.1. $\vec{F} = (y + x + z)\vec{i} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(y^3 + x^3 + z^3\right)\vec{k}$.

(Отв. $1 + 2y + 3z^2$)

1.2. $\vec{F} = \left(x^2yz - 5y^2z + 6xz^2\right)\vec{i} + \left(2y^2xz - 4yz^2 + 3xz\right)\vec{j} + \left(z^2xy - 7zy^3 + z^3\right)\vec{k}$.

(Отв. $8xyz + 5z^2 - 7y^3$)

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S.

2.1. $\vec{F} = z^2\vec{i} + (xy - 1)\vec{j} - (z - y)\vec{k}$,

где $S: \begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{cases}$.

(Отв. -3)

2.2. $\vec{F} = xy^2\vec{i} + y(z - x)\vec{j} + \left(x^2 - zy^2\right)\vec{k}$,

где $S: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

(Отв. -64π)

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутой линии L.

3.1. $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$,

L – контур треугольника ABC, где $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

(Отв. 2)

3.2 $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$, где L – линия, состоящая из части винтовой линии $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=\dfrac{2t}{\pi}$ от точки $B(2;0;4)$ и прямолинейного отрезка BA.

(Отв. $8+4\pi$)

4. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$.

4.1. $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. (Отв. 0)

4.2. $\vec{F}=xyz\vec{i}+(2x+3y-z)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$.

(Отв. $\vec{i}+(xy+2x)\vec{j}+(2-xz)\vec{k}$)

5. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

5.1. $\vec{F}=\left(z^3+2y^3+3y\right)\vec{i}+\left(y^3-2x^3-xz^2\right)\vec{j}+\left(z^2-5xy^2\right)\vec{k}$

$L:\ \left\{x^2+y^2+z^2=1,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$

(Отв. $-2{,}5\pi$)

5.2. $\vec{F}=\left(3z^2-y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-2y^2z^2\right)\vec{j}+\left(2xyz-x^2y^2\right)\vec{k}$

$L:\ \left\{x^2+y^2=4,\quad 2x+z=4\right\}.$

(Отв. 120π)

Домашнее задание

1. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$:

1.1. $\vec{F}=\left(2x^2y-3xz^3+5x^3yz\right)\vec{i}+\left(4y^3x+xyz+8z^2\right)\vec{j}+\left(6z^3xy^2-7z^2x+9zy\right)\vec{k}$.

(Отв. $4xy-3z^3+15x^2yz+12xy^2-13xz+18xy^2z^2+9y$)

1.2. $\vec{F}=\left(3y^2-2xy+x^2\right)\vec{i}+\left(xy-5y^2\right)\vec{j}$.

(Отв. $3x-12y$)

1.3. $\vec{F}=x^2\vec{i}-yx\vec{j}+xyz\vec{k}$.

(Отв. $x+xy$)

1.4. $\vec{F}=\left(x^2y+y^2x-xy\right)\vec{i}+\left(y^3-4xy+3y^2\right)\vec{j}$.

(Отв. $4y^2-4x+5y+2xy$)

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S.

2.1. $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$,

где $S: \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0 \\ y = 1, \;\; y \geq 0. \end{cases}$ (Отв. $\frac{\pi}{2}$)

2.2. $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$,

где $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$ (Отв. $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$)

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{k}$ вдоль линии L: $\left\{ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \;\; x^2 + y^2 = 2x \right\}$.

(Отв. $-\frac{6\pi + 16}{3}$)

4. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$:

4.1. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$. (Отв. 0)

4.2. $\vec{F} = y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

(Отв. $\left(x^2 - 2xz\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2xy\right)\vec{j} + \left(z^2 - 2yz\right)\vec{k}$)

5. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \left(y^3 - yx^2\right)\vec{i} + \left(y^2 - x^2 + x\right)\vec{j}$ по контуру L: $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$.

(Отв. $\frac{\pi}{2}$)

Занятие № 4

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ. ОПЕРАТОРЫ ГАМИЛЬТОНА, ЛАПЛАСА

Теоретические сведения

Векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, заданное в области V**,** называется **потенциальным**, если в области V существует такая скалярная функция u, градиент которой совпадает с $\vec{F}$

$$\vec{F} = grad\, u\,. \tag{4.1}$$

Функция u в таком случае называется **потенциальной функцией** или **потенциалом** векторного поля.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{F}$ в заданной области V было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области

$$rot\vec{F} = 0\,. \tag{4.2}$$

В потенциальном векторном поле $\vec{F}$:

1) $$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y,z)\Big|_{\substack{y=y_0\\ z=z_0}} dx + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x,y,z)\Big|_{z=z_0} dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz + C\,. \tag{4.3}$$

2) $$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \oint\limits_{L}\left(\vec{F}, dn\right) = 0\,. \tag{4.4}$$

3) Для любых двух точек A и B в области V значение криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}, dn\right)$ не зависит от вида контура интегрирования AB, соединяющего точки A и B и расположенного в области V, а зависит только от расположения этих точек в области.

4) Если $u(x,y,z)$ – потенциал векторного поля $\vec{F}$, то для любого контура $A \subset V$

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, dn\right) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0)\,. \tag{4.5}$$

Основные характеристики векторного анализа (градиент, дивергенция и ротор) и операции над ними удобно представлять с помощью оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{4.6}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\nabla u = grad\,u\,. \tag{4.7}$$

$$(\nabla, \vec{F}) = div\vec{F}\,. \tag{4.8}$$

$$[\nabla, \vec{F}] = rot\vec{F}\,. \tag{4.9}$$

С помощью оператора ∇ можно показать, что

$$div\,rot\,\vec{F} = 0 \text{ и } rot\,grad\,u = 0\,.$$

Введем **оператор Лапласа**

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{4.10}$$

Нетрудно убедиться, что $div\,grad\,u = \Delta u$

Уравнение $\Delta u = 0$ называется **уравнением Лапласа**, а функции, удовлетворяющие этому уравнению – гармоническими функциями.

Операции $grad\,div\,\vec{F}$ и $rot\,rot\,\vec{F}$ связаны между собой соотношением

$$rot\,rot\,\vec{F} = grad\,div\,\vec{F} - \Delta\vec{F}\,, \tag{4.11}$$

где $\Delta\vec{F} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$.

Примеры

1. Проверить, является ли поле $\vec{F}=\left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\vec{i}+\left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\vec{j}+\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)\vec{k}$ потенциальным, найти его потенциал и вычислить криволинейный интеграл вдоль контура *AB*, где $A(1;2;2)$, $B(1;3;1)$.

Решение. Для данного поля ротор

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right) & \left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right) & \left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right) \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, поле является потенциальным при $z\neq 0$.

Найдем потенциал заданного поля $\vec{F}$ по формуле (4.4):

$$u(x,y,z)=\int_0^x\left(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\z=1}}dx+\int_0^y\left(\frac{2x^3y}{z}+3y^3\right)\Bigg|_{z=1}dy+\int_1^z\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)dz+C=$$

$$=-2\int_0^x x^3dx+\int_0^y(2x^3y+3y^3)dy+\int_1^z\left(z^3-\frac{x^3y^2}{z^2}\right)dz+C=-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{4}z^4+\frac{x^3y^2}{z}+C_1,$$

где $C_1=C-\frac{1}{4}$. В качестве начальной выбрана точка (0,0,1).

Криволинейный интеграл (по формуле 4.6)

$$\int_{AB}\left(\vec{F},dn\right)=\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{4}z^4+\frac{x^3y^2}{z}+C_1\right)\Bigg|_{\substack{A(1,3,1)\\B(1,2,2)}}=52.$$

2. С помощью оператора Гамильтона ∇ доказать, что $div[\vec{F},\vec{в}]=(\vec{в},rot\,\vec{F})-(\vec{F},rot\,\vec{в})$.

Решение. Имеем,

$$div\left[\vec{F},\vec{в}\right]=\left(\nabla,\left[\vec{F},\vec{в}\right]\right)=\left(\nabla,\left[\vec{F},\vec{в}\right]\right)+\left(\nabla,\left[\vec{F},\vec{в}\right]\right).$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляют собой смешанное произведение трех векторов: ∇, $\vec{F}$ и $\vec{в}$.

Воспользовавшись свойством смешанного произведения векторов, получим:

$$\left(\nabla,\left[\vec{F},\vec{в}\right]\right)=-\left(\nabla,\left[\vec{в},\vec{F}\right]\right)=\left(\vec{в},\left[\nabla,\vec{F}\right]\right)=\left(в,rot\vec{F}\right);$$

с другой стороны

$$\left(\nabla, \left[\vec{F}, \vec{в}\right]\right) = -\left(\vec{F}, \left[\nabla, \vec{в}\right]\right) = -\left(\vec{F}, rot\,\vec{в}\right).$$

Таким образом,

$$div\left[\vec{F}, \vec{в}\right] = \left(\vec{в}, rot\,\vec{F}\right) - \left(\vec{F}, rot\,\vec{в}\right).$$

Аудиторные задания

1. Для заданного векторного поля $\vec{F}$

   а) проверить потенциальность поля;

   б) найти потенциал поля;

   в) вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}, dn\right)$.

1.1. $\vec{F} = \left(x^2 - 2yz\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2xz\right)\vec{j} + \left(z^2 - 2xy\right)\vec{k}$, $A(1,1,1)$, $B(-1,2,-2)$.

(Отв. а) поле потенциальное;

б) $\dfrac{\left(x^3 + y^3 + z^3\right)}{3} - 2xyz + c$;

в) $-\dfrac{22}{3}$).

1.2. $\vec{F} = 2x\left(y^2 - 2x^2\right)\vec{i} + 2y\left(x^2 - 2y^2\right)\vec{j}$, $A(-1, 1)$, $B(2,3)$.

(Отв. а) поле потенциальное;

б) $x^2y^2 - x^4 - y^4 + c$;

в) -60.)

2. Вычислить $grad\,div\,\vec{F}$ и $rot\,rot\,\vec{F}$ в точке M(2, 1, -2), если

$$\vec{F} = \left(x^2yz^2 + 2y\right)\vec{i} + \left(xy^2z^2 - 2x^2\right)\vec{j} + \left(3xyz^2 - 2x^2\right)\vec{k}.$$

(Отв. $4\vec{i} + 8\vec{j} - 20\vec{k}$)

Домашнее задание

1. Для заданного векторного поля $\vec{F}$:

   а) проверить потенциальность поля;

   б) найти потенциал поля;

в) вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\left(\vec{F},\, dn\right)$.

$$\vec{F}=\left(2xz+\frac{1}{y}\right)\vec{i}-\left(\frac{x+z}{y^2}\right)\vec{j}+\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\vec{k},\;\; A(-1,3,-2),\quad B(1,2,3).$$

(Отв. а) поле потенциальное;

б) $x^2z+\dfrac{(x+z)}{y}+c$;

в) 8.)

2. Вычислить ∇u в точке M, если

2.1. $u=3x^2z^2-\left(x+y-2z^2\right)^2+2z^2$, $M(2,1,-1)$.

(Отв. 6.)

2.2. $u=\sin^2(2x-3y+z)-2x^2+y^2+z^2$, $M(-1,-1,-1)$.

(Отв. 28.)

ТЕСТЫ

1. Если функция $U = f(x,y,z)$ задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$и через эту точку проведено произвольное направление l, то производная $\partial U(M_0)/\partial l$ по направлению l, вычисляется по формуле:

1. $\dfrac{dU}{\partial l} = \dfrac{\partial l}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial l}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial l}{\partial z}\cos\gamma;$

$где\quad \vec{S}_0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} - направляющий\ вектор\ l;$

2. $\dfrac{dU}{\partial l} = \cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz;$

3. $\dfrac{dU}{\partial l} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$

2. Градиентом функции U=f(x,y,z) в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ называется

1. $gradU = \dfrac{dU}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy + \dfrac{\partial U}{\partial z}dz;$

2. $gradU = \dfrac{dU}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k};$

3. $gradU = \dfrac{dU}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$

3. Градиент функции $U = f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ характеризует

1. направление и величину максимального роста этой функции в точке M_0;
2. направление и величину минимального роста этой функции в точке M_0;
3. направление и величину постоянного значения $f(x,y,z)=c$.

4. Если в области *(P)* определена функция $f(x,y)$ и область *(P)* разбить сетью кривых произвольно на *n* областей (P_1), (P_2) … (Pn), площадь которых P_1, P_2, …, Pn, в каждой из областей (Pi) выбрать по произволу точку $Mi(Vi\ ,\ Ui)$, в которой зна-

чение функции равно $f(Mi) = f\,(Vi\ \ Ui)$, то интегральной суммой и двойным интегралом $\iint f(x,y)dxdy$ называются соответствующие выражения:

1. $\sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i, \quad \lim_{\Delta P_i \to 0} f(U_i P_i)\cdot \Delta P_i;$
2. $\lim_{\Delta P_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i;$
3. $\sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i, \quad \lim_{\Delta P_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i;$
4. $\sum_{i=1}^{n} f(U_i,V_i)\Delta P_i, \quad \lim_{\Delta P_i \to 0} \iint_P f(U_i,V_i)\Delta P_i.$

5. Двойной интеграл $\iint_P f(x,y)dxdy$, где(P) – прямоугольник $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$, вычисляется по формуле:

1. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_c^d f(x,y)dx;$
2. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b f(x,y)dx \int_c^d dy;$
3. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$

6. Двойной интеграл $\iint_P f(x,y)dxdy$, где *(P)* – произвольная область, ограниченная сверху графиком $y = \varphi_2(\alpha)$, снизу – графиком $y = \varphi_1(\alpha)$, с боков *x=a и x=b,* вычисляется по формуле:

1. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy;$
2. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy;$
3. $\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx;$

7. Если замена переменных производится по формулам *x = x(U,V) и y = y(U,V)*, то якобиан *I* и двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$ вычисляется:

1 $.I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial U} \\ \frac{\partial y}{\partial V} & \frac{\partial x}{\partial V} \end{vmatrix}$

2. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial U} \\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix}$

3. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial U} \\ \frac{\partial y}{\partial V} & \frac{\partial x}{\partial U} \end{vmatrix}$

a. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(x(U,V),y(U,V))dUdV$

b. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(x(U,V),y(U,V))|I|dxdy$

c. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(x(U,V),y(U,V))|I|dUdV$

8. Двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$ в полярной системе координат $\begin{cases} x = \rho\, cos\,\theta \\ y = \rho\, sin\,\theta \end{cases}$ вычисляется по формуле:

1. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(\rho\, cos\,\theta, \rho\, sin\,\theta)\rho d\theta d\rho$

2. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(\rho\, cos\,\theta, \rho\, sin\,\theta) d\theta d\rho$

3. $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \iint\limits_{P'} f(\rho\, cos\,\theta, \rho\, sin\,\theta)\rho^2 d\theta d\rho$

9. Если в области *(V)* и *(Δ)* преобразуются однозначно друг в друга с помощью формул

$\begin{cases} x = x(U,V,W); \\ y = y(U,V,W); \\ z = z(U,V,W); \end{cases}$ и якобиан $I(U,V,W) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial x}{\partial W} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial W} \\ \frac{\partial z}{\partial U} & \frac{\partial z}{\partial V} & \frac{\partial z}{\partial W} \end{vmatrix}$, то формула

тройных интегралов имеет вид:

1. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(x(U,V,W),y(U,V,W),z(U,V,W))dUdVDdW$;

2. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(x(U,V,W),y(U,V,W),z(U,V,W))\left|I\right|dxdyDdz$;

3. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(x(U,V,W),y(U,V,W),z(U,V,W))\left|I\right|dUdVDdW$.

10.Если кривая *(L)* заданна параметрически, т. е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), t \in [a,b]$, то криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L f(x,y)dl$ вычисляется по формуле:

1. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))dt$;

2. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{1+(\psi')^2}\,dt$;

3. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}\,dt.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Е.И. Гурский. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 400 с.

2. Гусак, А.А. Задачи и упражнения по высшей математике / А.А.Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 229 с.

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 ч. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – 575 с.