ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРОГОСТЬ В ОПРЕДЕЛЕНИЯХ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

Обозная А.
Научный руководитель – Михайлова Н.В., к.ф.н., доцент

Математика со времен Античности и до настоящего времени представляет собой идеальный образец научного знания благодаря особой теоретической строгости в доказательствах своих утверждений и способах построения своих теорий. Тотальная информатизация современной науки способствовала появлению компьютерных способов доказательства математических утверждений и теорем, что потребовало критического пересмотра понятия математической строгости систем аксиом, определений и доказательств. Математическая теория является строгой, если ее понятия, объекты и доказательства не содержат в себе неявных предпосылок.

В истории математики переосмысление и переоценка сложившихся уровней ее теоретической строгости происходили периодически по мере становления и развития ее теорий. Научные теории неизбежно содержат в себе неявное знание в виде интуитивно ясных, но неформализованных объектов. Неявное знание об абстрактных математических объектах является частью содержания многих неопределяемых математических понятий, например, понятий числа или множества. Теоретическая строгость математической аргументации и доказательств «узаконивает» интуитивные положения в процессе формализации теории.

Следование теоретической строгости имеет первостепенное значение в определениях математических понятий. Показательным примером, иллюстрирующим значимость теоретической строгости в становлении математики, является история эволюции понятия математической кривой, или линии. Древнегреческий математик Евклид в своем трактате «Начала» дал одно из первых определений понятия «линия»: длина, не имеющая ширины. При этом, понятия «ширина» и «длина» Евклид не определил, и потому такое определение не является ни теоретически строгим, ни корректным, так как дается через неопределяемые понятия. В XVII веке математиком Декартом было дано относительно строгое общее определение линии на плоскости: линия – это множество точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению $f(x,y)=0$, где f – некоторая функция двух переменных. Со временем выяснилось, что под определение Декарта попадают объекты, которые никак нельзя считать линиями, и значит оно все же не является максимально строгим, полным и окончательным. Например, общее уравнение линии второго порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ при определенных значениях коэффициентов может определять точку, две прямые и, так называемые, мнимые линии. Например, уравнению $x^2 + 4y^2 - 4x - 32y + 68 = 0$ соответствуют координаты только одной точки M (–2; 4), а $2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 25 = 0$ – ни одной точки Декартовой плоскости, так как это мнимый эллипс. Вместе с тем, определение Декарта осталось востребованным в геометрии при исследовании различных классов математических кривых.

В конце XIX века математиком Жорданом было предложено общее параметрическое определение плоской линии: линия – это множество точек плоскости, координаты которых являются непрерывными функциями параметра *t,* или $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$. Такое определение представляет линию как траекторию движущейся точки, что хорошо согласуется с интуитивно-естественным восприятием линии. Оно получило широкое применение в математическом анализе, дифференциальной геометрии и математической физике. При этом каждая математическая кривая по Жордану являлась одновременно кривой и по Декарту. Впоследствии и у такого вполне естественного подхода к определению линии обнаружился серьёзный недостаток. Оказалось, что непрерывными образами отрезка являются квадрат, сфера, шар и другие многомерные фигуры, но никак не линии. Этот факт был установлен в 1890 году математиком Пеано, построившим контрпример линии Жордана, так называемую «кривую Пеано», которая полностью заполняет собой квадрат.

Позже наиболее строгое определение линии в терминах математического языка теории множеств было дано немецким математиком Кантором: плоская линия – это континуум, не имеющий внутренних точек. И хотя графиком «кривой Пеано» является квадрат, но по строгому определению Кантора эта кривая не является линией. Квадрат представляет собой континуум, но любая его точка, не лежащая на стороне, является его внутренней точкой, что противоречит определению Кантора. Являясь наиболее полным и строгим для ограниченных плоских линий, определение Кантора оказалось мало пригодным для конкретных применений, и в практических задачах и приложениях до сих пор удобнее пользоваться определениями, данными Декартом и Жорданом. Определения математической кривой, или линии по Декарту, по Жордану и по Кантору, с точки зрения, математики являются правильными, но соответствуют различным уровням теоретической строгости. Каждое из них имеет свою значимость в различных разделах математики и ее приложениях.

Пример нестрого доказательства – попытка доказать равенство двух множеств с помощью диаграмм (кругов) Эйлера. Вопрос: точки, лежащие на границе кругов, принадлежат множествам? Интуитивный ответ: да, принадлежат. Альтернативный: нет, не принадлежат. Правильный: и принадлежат, и не принадлежат. Предположим, что точки границы принадлежат множеству и рассмотрим разность множеств $A\backslash B$ на кругах Эйлера. Этой разности не принадлежат точки границы, что противоречит сделанному предположению. Аналогично, сделав начальное предположение, что точки границы не принадлежат множеству и рассмотрев ту же разность, снова получаем противоречие предположению: точки границы принадлежат разности $A\backslash B$. Этот результат означает, что диаграммы не могут служить строгим доказательством, а только лишь иллюстрацией отношений (в данном случае, равенства) множеств. Строгое доказательство нужно проводить по определению равенства двух множеств.

Современная математика – это знание об абстрактных структурах, обладающее собственным математическим языком и правилами доказательств, которые должны быть надёжными и непротиворечивыми. Надёжность математической теории означает соответствие предъявляемому уровню теоретической строгости. Надёжность теории выступает гарантом того, что в ней в дальнейшем не появятся опровергающие ее контрпримеры. С появлением компьютерных способов доказательств понятие теоретической строгости стало претерпевать изменения, на практике все чаще стали встречаться нестрогие доказательства, но при этом сохраняющие статус надёжных.

Литература

1. Михайлова, Н.В. Философско-методологические основания постгёделевской математики: монография / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2009. – 198 с.

УДК 51:53 + 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЗНАНИЯМИ ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

Савчик А.О., Кишкурно М.В.
Научный руководитель – Чепелев Н.И., к.ф.-м.н., доцент

Целью данной работы является исследование закономерностей между баллами, полученными на ЦТ по физике и по математике. Для этого из множества студентов выберем 25, которые сдавали физику и математику.