МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра ЮНЕСКО
«Энергосбережение и возобновляемые источники энергии»

В. Г. Баштовой
А. Г. Рекс

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Механика жидкости и газа»
для студентов специальности
1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии
и энергетический менеджмент»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области энергетики и энергетического оборудования

Минск
БНТУ
2022

УДК 532 (075.8)
ББК 22.253.3я7
Б33

Рецензенты:
кафедра «Энергосбережение, гидравлика и теплотехника УО БГТУ
(зав. кафедрой, канд. техн. наук, доцент *А. С. Дмитриченко*);
ведущий научный сотрудник Института тепло- и массообмена
им. А. В. Лыкова НАН Беларуси,
канд. физ.-мат. наук, доцент *Ю. В. Жукова*

Баштовой, В. Г.

Б33 Физические свойства и статика жидкостей и газов : учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» / В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс. – Минск : БНТУ, 2022. – 55 с.

ISBN 978-985-583-807-5.

Методическое пособие предназначено для изучения дисциплин «Механика жидкостей и газов» и «Гидрогазодинамика». Материалы включают в себя описание таких основных свойств жидкостей газов, как сплошность, текучесть, плотность, вязкость, поверхностное натяжение, и основных положений статики этих сред.

Методическое пособие составлено в соответствии с учебным планом специальностей и программой дисциплины и может быть рекомендовано для студентов энергетических специальностей.

УДК 532 (075.8)
ББК 22.253.3я7

ISBN 978-985-583-807-5

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1.1. Общие фундаментальные свойства жидкостей и газов

Общими фундаментальными свойствами жидкостей и газов являются сплошность и текучесть. То есть, все среды, обладающие этими свойствами относятся к разряду жидкостей и газов и, соответственно, являются объектами изучения механики жидкостей и газов.

1.1.1. Сплошность

Одной из фундаментальных гипотез, принимаемых при описании движения жидкостей и газов, является гипотеза их сплошности.

Проблема заключается в том, как определить характеристики жидкостей и газов и их потоков в данной точке пространства, тогда как известно, что жидкости и газы состоят из дискретных элементов – молекул, а те, в свою очередь, состоят из атомов, а атомы из электронов и ядер, между которыми, очевидно, нет никакого вещества и, соответственно, в местах, расположенных между молекулами, а тем более между атомами, бессмысленно говорить о наличии в них жидкости или газа.

В связи с этим гипотеза сплошности предполагает, что характеристики жидкости, газа и их потоков в данной точке соответствуют этим величинам для физически бесконечного малого объема среды, находящегося в этой точке, который в дальнейшем будем называть частицей жидкости или газа.

Таким образом, гипотеза сплошности предполагает, что под точкой в пространстве понимается физически бесконечно малый объем (частица) жидкости или газа, имеющий размеры намного меньшие, чем масштабы рассматриваемых явлений, чтобы его можно было считать точкой, но обладающий всеми макроскопическими физическими свойствами и термодинамическими параметрами этих сред. Поскольку физические свойства жидкостей и газов определяются совокупными свойствами и взаимодействием составляющих их молекул, находящихся в тепловом хаотическом движении, постольку, чтобы обладать макроскопическими физическими свойствами среды, рассматриваемая частица должна содержать достаточно большое число молекул. В связи с этим размеры частицы должны быть много больше, чем расстояния между молекулами.

Таким образом, под точкой в жидкости или газе будет пониматься малый объем среды (частица), размеры которого много меньше размеров рассматриваемых явлений, но много больше межмолекулярных расстояний, а характеристики жидкости, газа и их потоков в данной точке соответствуют этим величинам для частицы, находящейся в этой точке.

При принятии гипотезы сплошности считается, что масса вещества и все его свойства непрерывно распределены по всему его объему, а жидкость или газ непрерывным (сплошным) образом заполняют предоставленное им пространство.

Поскольку все получаемые далее результаты будут относиться к жидкостям и газам как сплошным средам, то реальные объекты, к которым они будут применяться, должны удовлетворять этому свойству. Это особенно относится к разреженным газам, которые при определенной степени разреженности, то есть при значительном увеличении межмолекулярных расстояний, могут перестать соответствовать принятому понятию сплошной среды.

1.1.2. Текучесть

Вторым фундаментальным свойством жидкостей и газов является *текучесть*.

Этим свойством жидкости и газы принципиально отличаются от твердых тел и, соответственно механика жидкостей и газов отличается от механики твердого тела.

Это свойство подразумевает легкую подвижность или легкую деформируемость жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил, в отличие от твердых тел.

Поэтому, *текучестью* называется способность жидкостей и *газов испытывать конечные деформации при сколь угодно малых* касательных напряжениях.

Напряжением $\vec{\sigma}$ силы $\mathrm{d}\vec{F}$, действующей на элементарную площадку $\mathrm{d}S$, называется отношение этой силы к величине площади $\vec{\sigma} = \mathrm{d}\vec{F} / \mathrm{d}S$. Соответственно, единицей измерения напряжения силы является Паскаль, Па = Н/м^2.

Действующую силу можно разложить на две составляющие – параллельную dF_τ и перпендикулярную dF_n площадке (рис. 1.1). Соответственно, отношения этих составляющих к величине площади будут представлять собой касательные $\vec{\sigma}_\tau = d\vec{F}_\tau / dS$ и нормальные напряжения $\sigma_n = dF_n / dS$.

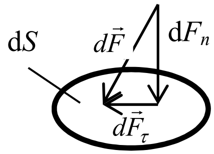


Рис. 1.1. Силы, действующие на поверхность

Под действием приложенных напряжений тело испытывает деформации (рис. 1.2).

Под действием нормальных напряжений происходит деформация растяжения-сжатия и изменяются линейные размеры тела и его объем (рис. 1.2, *а*). Под действием касательных напряжений происходит деформация сдвига, сопровождающаяся движением слоев тела вдоль относительно друг друга (рис. 1.2, *б*). Именно такая деформация соответствует течению жидкостей и газов.

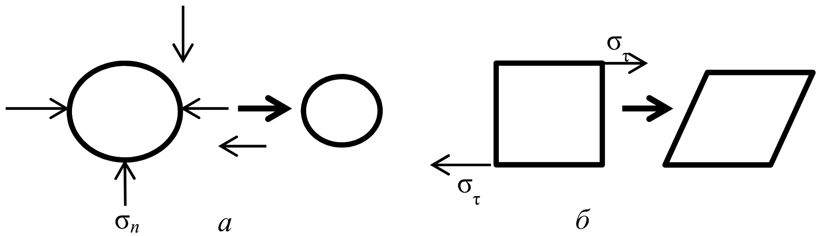


Рис. 1.2. Деформации тел под действием разных напряжений:
а – нормальных; *б* – касательных

В отличие от твердых тел, величина деформации в которых в соответствии, например, с законом Гука пропорциональна приложенным напряжениям и стремится к нулю с их уменьшением, жидкости под действием даже малых касательных напряжений приходят в движение (текут) и соответственно могут испытывать конечные (большие) деформации сдвига.

В этом и состоит суть их свойства текучести.

1.2. Индивидуальные физические свойства жидкостей и газов

Обладая общими свойствами сплошностью и текучестью, жидкости и газы отличаются друг от друга наличием других индивидуальных физических свойств, из которых рассмотрим вязкость, плотность и поверхностное натяжение.

1.2.1. Вязкость

Как показывает опыт, у разных жидкостей свойство текучести проявляется по-разному. А именно, в одних и тех же условиях скорость течения разных жидкостей имеет разную величину. Достаточно сравнить течение, например, меда и воды по наклонной плоскости под действием силы тяжести. При этом мы говорим, что мед является более вязкой жидкостью по сравнению с водой.

Все это свидетельствует о том, что внутри жидкостей и газов существуют некоторые силы, которые затрудняют их течение, то есть перемещение слоев жидкости вдоль относительно друг друга. Такого рода силы, возникающие между слоями жидкости и газа при их продольном движении с разными скоростями, носят название силы внутреннего трения или силы вязкого трения.

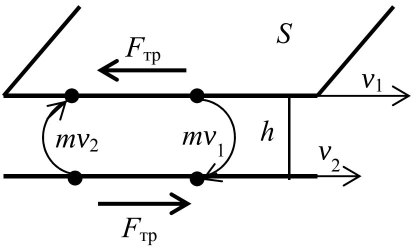


Рис. 1.3. Механизм действия сил вязкого трения

Рассмотрим физический механизм возникновения силы вязкого трения на примере движения с разными скоростями двух плоскопараллельных слоев газа (рис. 1.3).

В газе этот механизм можно представить наиболее ясно, поскольку молекулы в нем находятся в хаотическом и только поступательном движении. Пусть один из слоев является более быстрым и имеет скорость v_1, а второй медленный слой движется с меньшей скоростью v_2. Поскольку находящиеся в этих слоях сами молекулы газа имеют хаотические значения скорости, v_1 и v_2 представляют собой средние значения скоростей молекул в этих слоях.

В силу своего хаотического движения молекулы газа имеют возможность переходить из слоя в слой со своим значением скорости, если считать, что слои газа находятся достаточно близко друг к другу и, перемещаясь между ними, молекулы не испытывают столкновений между собой. Если молекула из медленного слоя попадает в быстрый слой, то она уменьшает среднюю скорость молекул этого слоя, а молекула из быстрого слоя, попадая в медленный слой, увеличивает среднюю скорость его молекул. В результате такого постоянного обмена молекулами между слоями скорость быстрого слоя стремится уменьшиться, а медленного – увеличиться. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока скорости слоев не станут равными.

Тот факт, что в процессе обмена молекулами скорости слоев газа изменяются, можно трактовать как действие на эти слои силы $F_{тр}$, замедляющей быстрый слой и ускоряющей медленный. В соответствии с третьим законом Ньютона силы, действующие на слои, равны по величине и противоположны по направлению.

Эти силы действуют по касательной к движущимся слоям и носят название *силы вязкого трения*.

Другими словами, при перемещении молекул, имеющих массу m, между слоями они переносят из слоя в слой свой средний импульс mv_1 и mv_2. В результате этого, импульс каждого из слоев изменяется, а, как известно, изменение импульса тела в единицу времени определяет силу, действующую на тело. Таким образом, можно говорить, что силы вязкого трения обусловлены переносом импульса молекулами между слоями газа. Поскольку импульсы молекул разные $mv_1 \neq mv_2$, то между слоями газа, движущимися с разными скоростями, возникает результирующий поток импульса, направленный от быстрого слоя к медленному.

В жидкостях суть механизма возникновения силы вязкого трения остается такой же, только перенос импульса молекулами носит более сложный характер, чем в газах.

Как уже было сказано, в результате действия сил вязкого трения скорости движущихся слоев жидкости стремятся выровняться. При равенстве скоростей слоев результирующий поток импульса между ними становится равным нулю.

В вязкой жидкости имеет место так называемый эффект прилипания ее к твердой поверхности, в результате чего скорость вязкой жидкости на твердой поверхности равна нулю относительно этой поверхности. Поэтому, например, при течении жидкости в круглой трубе скорость жидкости на стенке трубы равна нулю и увеличивается по мере удаления от стенки, принимая максимальное значение на оси трубы. Отсутствие внешнего воздействия на поток силы вязкого трения приведет к тому, что скорости всех слоев жидкости выровняются и станут равными скорости на стенке, которая равна нулю. То есть поток жидкости в трубе остановится. Имевшаяся у потока кинетическая энергия станет равной нулю и полностью перейдет в тепловую энергию, что приведет к повышению температуры жидкости. Таким образом, результатом действия сил вязкого трения в жидкости, как и сил трения между твердыми телами, является переход механической энергии в тепловую. Этот процесс называется диссипацией энергии. Естественно, что для постоянного поддержания течения жидкости в каналах с твердыми стенками требуется некоторое внешнее воздействие, компенсирующее эту диссипацию энергии. Такое воздействие в трубопроводных системах обеспечивается, например, насосами. Нелишне отметить, что таким образом вся энергия, чаще всего электрическая, потребляемая для работы насосов, в конечном итоге превращается в тепловую и рассеивается в окружающей среде.

Следующим естественным шагом является установление количественных соотношений для вычисления сил вязкого трения. Для этого используем так называемый феноменологический подход, основанный на установлении этих соотношений, исходя из общих физических представлений о происходящих процессах и на первом шаге предполагающий получение этих соотношений в наиболее простом математическом выражении. Будем иметь в виду, что наиболее простая математическая зависимость, отражающая тот факт, что с увеличением одной величины вторая тоже увеличивается, является прямая пропорциональность, а если вторая величина уменьшается, то наиболее просто этот факт описывается обратно пропорциональной зависимостью.

Исходя из представленного на рис. 1.3 механизма действия сил вязкого трения естественно предположить, что величина силы вязкого трения $F_{тр}$ будет зависеть от разности скоростей слоев $\Delta v = v_1 - v_2$, от площади слоев S и от расстояния между ними h. Если представить эту зависимость в виде простой дроби, то, исходя из физических представлений, можно констатировать, что с увеличением разности скоростей Δv и площади слоев S сила вязкого трения будет больше и эти величины должны стоять в числителе рассматриваемой дроби, а с увеличением расстояния между слоями h, когда взаимное влияние слоев снижается, сила трения будет меньше и эта величина должна стоять в знаменателе этой дроби. Сказанное выше запишется следующим образом:

$$F_{\text{тр}} \sim \frac{\Delta v \cdot S}{h}.$$

Если ввести такую величину, как напряжение силы вязкого трения $\sigma = F_{\text{тр}} / S$, которое, как и сила, является касательным к рассматриваемым слоям, то для него получится:

$$\sigma = \frac{F_{\text{тр}}}{S} \sim \frac{\Delta v}{h}.$$

Для замены знака пропорциональности на знак равенства надо в полученное выражения ввести некоторый коэффициент пропорциональности η и записать его следующим образом:

$$\sigma = \eta \frac{\Delta v}{h}, \qquad F_{\text{тр}} = \eta \frac{\Delta v \cdot S}{h}. \tag{1.1}$$

Введенный таким образом коэффициент η характеризует вязкие свойства конкретных жидкостей и газов, называется *динамическим коэффициентом вязкости* и, исходя из формул (1.1), имеет единицу измерения Па·с и размерность $[\eta]$ = кг/(м·с).

Полученное выражение (1.1), означает, что *касательное напряжение силы вязкого трения между плоскопаралельными движущимися слоями жидкости пропорционально величине, численно равной разности скоростей слоев, приходящейся на единицу расстояния между ними, а коэффициент пропорциональности является постоянной величиной, характеризующей свойства жидкости или газа.*

Данное утверждение носит название *закона вязкого трения Ньютона.*

Как показывает опыт, закону вязкого трения Ньютона подчиняется подавляющее большинство обычных жидкостей, которые в силу этого относятся к классу «ньютоновских жидкостей».

Для того, чтобы определять напряжение силы вязкого трения в данной точке потока жидкости, то есть локально, необходимо рассмотреть слои жидкости, находящиеся на бесконечно малом расстоянии dn друг от друга, когда разность их скоростей тоже будет бесконечной малой величиной dv.

Тогда выражение закона вязкого трения Ньютона (1.1) запишется в виде

$$\sigma = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \tag{1.2}$$

и его можно сформулировать следующим образом: *касательное напряжение силы вязкого трения между движущимися слоями жидкости пропорционально производной от скорости движения слоев по направлению, нормальному к плоскости их соприкосновения.*

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости η вязкие свойства жидкостей и газов характеризуются *кинематическим коэффициентом вязкости* ν, который равен отношению динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости ρ: $\nu = \eta / \rho$. В соответствии с определением, кинематический коэффициент вязкости имеет размерность и единицу измерения м^2/с.

Коэффициенты вязкости жидкостей и газов зависят от температуры. Причем, с ростом температуры коэффициенты вязкости жидкостей уменьшаются, а газов – увеличиваются (таблица 1.1).

Таблица 1.1

Зависимость коэффициентов вязкости воды и воздуха от температуры

t, °C	Вода		Воздух	
	$\eta\cdot10^6$, Па·с	$\nu\cdot10^6$, м^2/с	$\eta\cdot10^6$, Па·с	$\nu\cdot10^6$, м^2/с
0	1788	1,789	17,2	13,28
10	1306	1,306	17,6	14,16
20	1004	1,006	18,1	15,06
30	801,5	0,805	18,6	16,00
40	653,3	0,659	19,1	16,96
50	549,4	0,556	19,6	17,95
60	469,9	0,478	20,1	18,97

1.2.2. Плотность и основные уравнения состояния

Одной из физических характеристик жидкостей и газов является их плотность.

Плотностью ρ однородного вещества называется отношение массы этого вещества m к объему V, занимаемому этой массой: $\rho = m / V$.

Для неоднородного вещества с неравномерно распределенной его массой по объему плотность определяется в каждой точке занимаемого им объема. В силу этого плотность является локальной характеристикой.

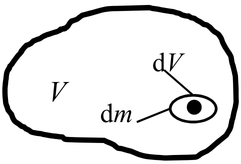


Рис. 1.4

Плотность вещества в данной точке (рис. 1.4) определяется отношением массы dm бесконечно малого объема dV, окружающего эту точку, к этому объему:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \qquad (1.3)$$

В общем случае в каждой точке объема значение плотности может быть разным, то есть плотность может быть функцией координат точки: $\rho = \rho(x, y, z)$.

Знание распределения плотности по объему вещества является важным, поскольку позволяет вычислить массу M любого конечного объема V этого вещества следующим образом:

$$M = \int_V \mathrm{d}m = \int_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}V.$$

При этом средняя плотность тела $\rho_{ср}$ определяется как отношение его массы M к занимаемому им объему V:

$$\rho_{ср} = \frac{M}{V} = \frac{1}{V}\int_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}V.$$

Плотность жидкостей и газов ρ зависит от давления p и температуры T, которые, таким образом, в совокупности являются локальными термодинамическими параметрами жидкостей и газов.

В классической термодинамике термодинамическими параметрами состояния газа являются объем V, давление р и температура T. Поскольку механика жидкости и газа стремится описывать происходящие в них процессы в каждой точке занимаемого ими объема, то есть локально, то такая характеристика как объем V в целом является неприемлемой для этих целей. Поэтому вместо объема для локального описания термодинамического состояния жидкостей и газов используется плотность, которая связана с объемом обратно пропорциональной зависимостью (1.3). То есть при увеличении объема (расширении) жидкости или газа плотность их уменьшается и наоборот.

Уравнение, связывающее между собой плотность, давление и температуру: $f(\rho, p, T) = 0$ называется уравнением состояния жидкости или газа.

Для газов самым распространенным уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа Клапейрона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} R_0 T, \tag{1.4}$$

в котором μ – молярная масса газа, R_0 – универсальная газовая постоянная.

Разделив это выражение на V и определив R_0 / μ как R – газовую постоянную, уравнение Клапейрона-Менделеева (1.4) можно записать в виде

$$p = R\rho T, \tag{1.5}$$

в котором оно и будет использоваться в дальнейшем.

Наряду с уравнением Клапейрона-Менделеева часто используемым является уравнение состояния при адиабатном процессе, $pV^k = \text{const}$. Разделив это уравнение на m^k, получим уравнение адиабаты в следующем виде:

$$p = \text{const}\ \rho^k, \tag{1.6}$$

пригодном для использования в задачах механики газов.

Для жидкостей такого универсального уравнения состояния как уравнение Клапейрона-Менделеева для газов не существует.

В связи с этим для них используются приближенные уравнения состояния, наиболее распространенными из которых являются линейные зависимости плотности от температуры и давления.

Для их получения используется известный математический прием разложения функций в ряд Тейлора в некоторой точке и их линеаризации при малом приращении аргумента:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x_0} \cdot (\Delta x)^3 + \\ + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}\right)_{x_0} \cdot (\Delta x)^4 + \ldots$$

При малом приращении аргумента Δx можно пренебречь всеми членами более высокого порядка по Δx, чем первый, и приближенно записать:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} \cdot \Delta x.$$

Именно такому разложению обязаны хорошо известные соотношения $\sin x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$ и т. п. при малых значениях x.

Зависимость плотности жидкости от температуры.

Применим этот подход для установления простейшей зависимости плотности жидкости от температуры $\rho = \rho(T)$.

Пусть при некоторой температуре T_0 плотность жидкости имеет значение $\rho_0 = \rho(T_0)$. Тогда при изменении температуры на величину ΔT для значения плотности при температуре $T = T_0 + \Delta T$, используя разложение в ряд Тейлора, можно записать:

$$\rho(T) = \rho(T_0+\Delta T) = \rho(T_0) + \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}\right)_{T_0} \Delta T = \rho_0\left[1 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}\right)_{T_0} \Delta T\right]. \quad (1.7)$$

Для практического использования этой формулы вводится следующая величина $\beta_T = -\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{d\rho}{dT}\right)_{T_0}$, которая называется коэффициентом теплового расширения жидкости.

Поскольку с ростом температуры у большинства жидкостей плотность уменьшается и производная $d\rho/dT$ меньше нуля, для положительного значения коэффициента β_T он определяется через эту производную со знаком минус.

Согласно определению, размерность и единица измерения коэффициента теплового расширения β_T есть K^{-1}, и он является одной из физических характеристик жидкости.

С учетом этого приближенную, но максимально простую формулу для зависимости плотности жидкости от температуры можно записать в следующем виде:

$$\rho(T) = \rho_0\left[1 - \beta_T\left(T - T_0\right)\right]. \tag{1.8}$$

Знак минус перед β_T в этой формуле означает, что с ростом температуры при положительном значении этого коэффициента плотность жидкости уменьшается.

Эта же формула в принятом приближении может быть использована и для описания зависимости объема жидкости V от температуры, только перед β_T необходимо поставить знак плюс, что будет означать, что с ростом температуры объем жидкости увеличивается:

$$V(T) = V_0\left[1 + \beta_T\left(T - T_0\right)\right]. \tag{1.9}$$

Для использования этих формул необходимо знание коэффициента теплового расширения жидкости, значения которого для разных жидкостей при разных значениях температуры находятся в справочниках по теплофизическим свойствам веществ, а, например, для воды приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Коэффициент теплового расширения воды

Температура, °С	β_T, К$^{-1}$
5–10	$0{,}53\cdot10^{-4}$
10–20	$1{,}50\cdot10^{-4}$
20–40	$3{,}02\cdot10^{-4}$
40–60	$4{,}58\cdot10^{-4}$
60–80	$5{,}87\cdot10^{-4}$

Как уже было сказано, коэффициент теплового расширения жидкостей есть величина положительная. То есть при понижении температуры плотность их увеличивается, а объем уменьшается.

Однако из этого правила есть одно уникальное исключение, связанное с поведением воды при температуре, близкой к ее замерзанию. А именно, в диапазоне температур от 4-х до 0 °С при понижении температуры вода расширяется, плотность ее уменьшается, а объем увеличивается. Причем при температуре 0 °С вода, превращаясь в лед, скачком уменьшает свою плотность и соответственно увеличивает объем примерно на 8 % с 999,8 кг/м^3 до 916,2 кг/м^3 (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Температурная зависимость плотности воды и льда

	Температура, °С	Плотность, кг/м^3
Вода	20	998,2
	4	1000
	2	999,9
	0,01	999,8
Лед	0	916,2
	–5	917,5
	–100	925,7

Таким образом, максимальное значение плотности вода имеет при температуре 4 °С, и оно равно 1000 кг/м^3.

Поскольку плотность льда меньше плотности воды он плавает на поверхности воды. Тогда становится понятным, зачем природа наделила воду таким уникальным свойством. То обстоятельство, что лед плавает на поверхности воды и не опускается на дно, позволяет находящимся под ним слоям воды иметь положительную температуру и затрудняет промерзание природных водоемов до дна. Тем самым это способствует сохранению жизни в них даже при низких внешних температурах.

Зависимость плотности жидкости от давления.

По аналогии с формулой (1.6) можно получить и приближенную линейную зависимость плотности жидкости от давления $\rho = \rho\,(p)$, заменив температуру T на давление p:

$$\rho(p) = \rho(p_0 + \Delta p) = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} \right)_{p_0} (p - p_0) \right], \qquad (1.10)$$

где ρ_0 – есть значение плотности при давлении p_0: $\rho_0 = \rho\,(p_0)$.

Для практического использования в этой формуле вводят коэффициент сжимаемости среды $\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} \right)_{p_0} = \beta_p$.

Таким образом, коэффициент сжимаемости становится еще одной характеристикой среды. В соответствии с определением, размерность и единица измерения коэффициента сжимаемости есть Па^{-1}.

Тогда формула (1.10) окончательно принимает вид:

$$\rho(p) = \rho_0 \left[1 + \beta_p (p - p_0) \right]. \qquad (1.11)$$

Знак плюс перед вторым слагаемым в скобках показывает, что с ростом давления плотность жидкостей увеличивается, а, соответственно, объем уменьшается, то есть жидкость сжимается.

Сжимаемостью будем называть способность жидкостей и газов изменять плотность при изменении давления. Количественно сжимаемость характеризуется отношением изменения плотность к величине соответствующего изменения давления $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p$. Чем больше эта величина, то есть, чем больше изменение плотности при том же изменении давления, тем лучше сжимаема среда. Сжимаемость газов много больше, чем жидкостей. Обратная величина характеризует скорость звука $v_{зв}$ в жидкостях и газах:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}. \tag{1.12}$$

Таким образом, чем лучше сжимаемость среды, тем скорость звука в ней меньше, и наоборот. Соответственно, скорость звука в жидкостях намного больше, чем в газах. Так, например, скорость звука в воздухе при нормальных условиях равна 331 м/с, а в воде – 1403 м/с.

Для скорости звука в газах из уравнения (1.12) можно получить простое аналитическое выражение, считая процесс распространения звука адиабатным, что лучше всего соответствует действительности, и используя уравнения Клапейрона-Менделеева (1.5) и адиабаты (1.6):

$$v_{зв} = \sqrt{kRT}. \tag{1.13}$$

Среду, для которой сжимаемостью можно пренебречь ввиду ее малости, будем называть несжимаемой. Условием несжимаемости среды будет являться: $\rho = \mathrm{const}$. Чаще всего это условие применимо к реальным жидкостям.

С учетом (1.11) можно установить связь между коэффициентом сжимаемости и скоростью звука

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\right)_{p_0} = \frac{1}{\rho_0 v_{зв}^2}.$$

1.2.3. Поверхностное натяжение

Жидкости в силу своего агрегатного состояния, которое, в отличие от газов, позволяет им сохранять свой объем, обладают способностью иметь четкую границу с окружающим их газом. Такую границу раздела между жидкостью и газом будем называть свободной поверхностью жидкости. Благодаря своему промежуточному положению между жидкостью и газом, свободная поверхность жидкости обладает особыми специфическими свойствами.

Часто явления, имеющие место на свободной поверхности, называют капиллярными явлениями. Они играют значительную роль в природе и технике. Ими обусловливается транспорт жидкостей в теле растений, почве и других пористых телах. Они определяют процессы тепло- и массопереноса в таких телах при их сушке и обезвоживании. Они играют определяющую роль при формировании капель жидкостей в разнообразных распылительных системах тепло- и массообменных устройств, в частности, в системах подачи топлива в камеры сгорания. Их использование дало возможность создания новых теплообменных устройств – капиллярно-пористых тепловых труб с очень высокими коэффициентами теплопередачи.

Специфические свойства свободной поверхности жидкости связаны с особым характером межмолекулярного взаимодействия на границах раздела жидкостей с газами. Для того, чтобы представить это яснее, рассмотрим слой жидкости с границей раздела, отделяющей жидкость от ее собственного пара (см. рис. 1.5). Любая молекула А, находящаяся в глубине жидкости, окружена со всех сторон такими же молекулами. Поэтому результирующая сила, действующая на нее со стороны этих молекул, будет равна нулю. Совсем по другому обстоит дело с молекулой В, находящейся на свободной поверхности, которая, с одной стороны, окружена молекулами жидкости, а с другой – молекулами пара. Концентрация молекул жидкости значительно больше, чем пара. Соответственно, на эту молекулу будет действовать результирующая сила $F_р$, направленная вглубь жидкости, поскольку притягивающее действие молекул жидкости сильнее, чем молекул пара.

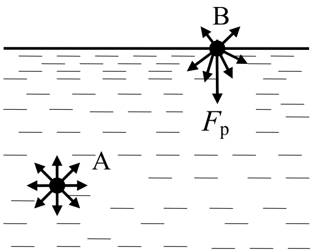


Рис. 1.5

Из этого следует, что для того, чтобы перевести молекулу из глубины объема жидкости на поверхность, требуется совершить некоторую работу против этой силы, то есть сообщить молекуле дополнительную энергию.

Таким образом, молекулы на поверхности жидкости обладают избыточной энергией по сравнению с внутренними молекулами. Другими словами, свободная поверхность жидкости, как совокупность таких молекул, обладает некоторой собственной энергией.

При изменении площади свободной поверхности на dS ее энергия изменяется на некоторую величину dU_S, поскольку изменяется число молекул на ней. Так как число таких молекул пропорционально площади поверхности, то можно заключить, что изменение поверхностной энергии пропорционально изменению площади свободной поверхности:

$$dU_S = \sigma dS. \tag{1.14}$$

Коэффициент пропорциональности в этом выражении σ называется *коэффициентом поверхностного натяжения* и имеет размерность Дж/м^2 = Н/м.

Физический смысл коэффициента поверхностного натяжения заключается в том, что он численно равен работе, которую нужно совершить для увеличения свободной поверхности жидкости на единицу при постоянной температуре.

Практически каждый человек в своей жизни когда-нибудь совершал работу по увеличению свободной поверхности жидкости. И происходило это в процессе надувания, так называемых «мыльных пузырей», оболочка которых представляет собой не что иное, как тонкую пленку жидкости со свободной поверхностью. После прекращения совершения этой работы «мыльный пузырь» самопроизвольно схлопывается, уменьшая свою поверхность, и при этом сам способен совершать работу.

Коэффициент поверхностного натяжения является одной из характеристик жидкости, и его значения находятся в справочниках по свойствам жидкостей.

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры и уменьшается с ее ростом. Для воды его значения приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Коэффициент поверхностного натяжения воды
при различных температурах

t, °C	0	30	60	90
σ, Н/м	0,0756	0,0712	0,0662	0,0608

Наличие у жидкости поверхностной энергии приводит к тому, что наиболее естественной формой для свободного объема жидкости является шар со сферической поверхностью.

Это является следствием общего принципа минимума энергии, которому удовлетворяют все природные процессы и который заключается в том, что всякая система стремится к такому состоянию равновеия, при котором ее свободная энергия минимальна. Поскольку поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности, это означает, что в равновесии площадь свободной поверхности жидкости стремится к минимальному значению. Однако известно, что тело заданного объема имеет наименьшую поверхность в том случае, когда оно принимает форму шара. Именно поэтому свободные капли жидкости в невесомости имеют сферическую форму.

В дальнейшем, объем жидкости, полностью окруженный свободной поверхностью, будем называть каплей, а объем газа, полностью окруженный свободной поверхностью жидкости – пузырем.

Таким образом, свободная поверхность жидкости всегда стремится иметь искривленную форму.

С учетом того, что на поверхностные молекулы действуют силы, направленные вглубь жидкости, давление внутри жидкости $p_{ж}$ становится больше, чем в окружающем ее газе $p_{г}$, и изменяется скачком при переходе через свободную поверхность. Это изменение давления называется капиллярным скачком давления $\Delta p_{к} = p_{ж} - p_{г}$ и зависит от кривизны поверхности в точке перехода через нее.

Капиллярный скачок давления в общем случае пропорционален средней кривизне поверхности, а коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поверхностного натяжения, что описывается *формулой Лапласа*:

$$\Delta p_{к} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{1.15}$$

где R_1 и $1/R_2$ – главные радиусы кривизны поверхности.

Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу кривизны и, соответственно, измеряемая в м$^{-1}$. А радиус кривизны кривой определяется как радиус окружности, дуга которой совпадает с дугой кривой в данной точке. В силу того, что при пересечении искривленной поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к ней в данной точке, в зависимости от выбора направления в плоскости сечения получаются различные плоские кривые, а таких плоскостей сечения может быть бесконечное множество, радиусов кривизны поверхности в данной точке тоже имеется бесконечное множество. Из этого бесконечного множества наибольший R_1 и наименьший R_2 радиусы кривизны поверхности называются главными. Главные радиусы кривизны лежат во взаимно перпендикулярных сечениях. Средняя кривизна поверхности определяется величиной, обратной главным радиусам кривизны $(1/R_1 + 1/R_2)$.

Для выпуклой поверхности жидкости радиусы кривизны считаются положительными, для вогнутой – отрицательными. Соответственно, капиллярный скачок на выпуклой поверхности является величиной положительной, а на вогнутой – отрицательной, то есть давление в жидкости под выпуклой поверхностью больше, чем давление газа над ней, а под вогнутой – меньше.

Для сферической капли жидкости (рис. 1.6, *а*) главные радиусы кривизны равны друг другу и равны радиусу сферы ($R_1 = R_2 = R$), поэтому давление внутри нее на величину $\Delta p_К = 2\sigma/R$ больше наружного.

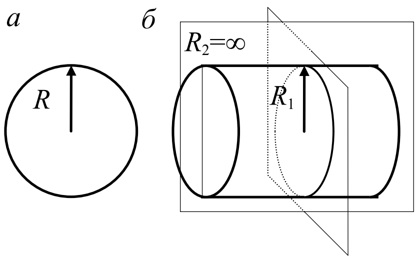


Рис. 1.6. Жидкость в виде:
а – сферической капли;
б – цилиндрического столба

Для цилиндрического столба жидкости (рис. 1.6, *б*) наименьший радиус кривизны равен радиусу цилиндра $R_1 = R$, а наибольший – бесконечности ($R_2 = \infty$), поэтому для него $\Delta p_К = \sigma/R$.

Тот факт, что свободная поверхность жидкости стремится к уменьшению своих размеров, то есть сопротивляется растяжению, можно трактовать как то, что на свободной поверхности жидкости действуют силы, стремящиеся сократить ее площадь. Эти силы направлены по касательной к свободной поверхности и носят название *сил поверхностного натяжения*.

Смачивание и несмачивание жидкостью твердых поверхностей.

Более сложная ситуация возникает при контакте между собой сред в виде трех агрегатных состояний: газообразной, жидкой и твердой. В этом случае явления на свободной поверхности жидкости в месте контакта определяются также и взаимодействием молекул жидкости с молекулами твердого тела (рис. 1.7). Если сила притяжения между молекулами жидкости и твердого тела $F_{жт}$ больше, чем у молекул жидкости $F_{жж}$ между собой: $F_{жт} > F_{жж}$, то жидкость натекает на твердое тело и поверхность жидкости в месте контакта становится вогнутой, (левая часть рис. 1.7). В этом случае говорят, что жидкость смачивает твердое тело. Если же взаимодействие между молекулами жидкости и твердого тела слабее, чем молекул жидкости между собой $F_{жт} < F_{жж}$, то жидкость оттекает от твердой поверхности и поверхность ее приобретает выпуклую форму, (правая часть рис. 1.7). В этом случае жидкость не смачивает твердое тело.

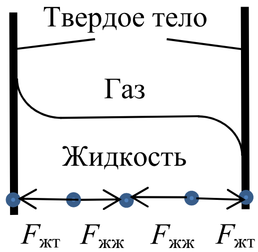


Рис. 1.7

Капля жидкости на плоскости.

От условий смачивания твердой поверхности зависит форма капли жидкости, лежащей на ней, рис. 1.8.

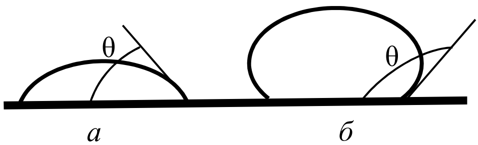


Рис. 1.8

Если капля смачивает твердую поверхность, то в месте контакта с ней угол θ между касательной к поверхности капли и плоскостью твердой поверхности внутри жидкости, острый (рис. 1.8, *а*) и капля стремится растекаться по поверхности. Угол θ называется краевым углом смачивания. В случае несмачивания краевой угол тупой и капля стремится принять шарообразную форму (рис. 1.8, *б*).

Поднятие (опускание) жидкости в капилляре.

Хорошо известно, что если в жидкость опустить капилляр, то уровень жидкости в капилляре будет отличаться от уровня жидкости в сосуде, в котором она находится (рис. 1.9).

Капилляром будем называть цилиндрическую трубку с достаточно малым поперечным размером, таким, чтобы на всем его протяжении явно проявлялось искривление свободной поверхности жидкости, вызванное поверхностным натяжением.

Если жидкость смачивает стенки капилляра, то свободная поверхность жидкости имеет вогнутую форму и жидкость втягивается в капилляр, (рис. 1.9, *а*). Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то поверхность жидкости в капилляре выпуклая и жидкость выталкивается из капилляра (рис. 1.9, *б*). При отсутствии других сил действие поверхностного натяжения приведет к тому, что в случае смачивания жидкость полностью заполнит капилляр, а в случае несмачивания – полностью вытеснится из капилляра.

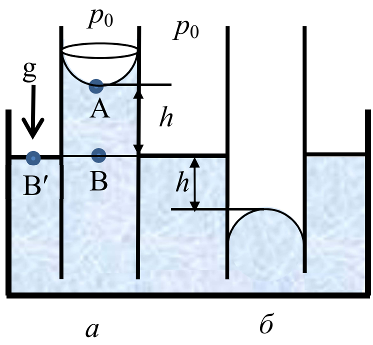


Рис. 1.9

При действии силы тяжести она препятствует проникновению жидкости в вертикально опущенный в нее капилляр. Это приводит к тому, что в случае смачивания в капилляре устанавливается определенный уровень жидкости выше, чем в сосуде.

Вычислим высоту поднятия жидкости h в круглом капилляре радиуса R в соответствии с рис. 1.9, *а*, когда жидкость смачивает стенки капилляра.

Вследствие вогнутости свободной поверхности жидкости, форма которой в рассматриваемом случае близка к сферической, и в соответствии с формулой Лапласа (1.14) давление p_A в жидкости в точке A, находящейся непосредственно под поверхностью, будет на величину капиллярного скачка давления $\Delta p_к = 2\sigma/R$ меньше, чем давление p_0 газа над поверхностью жидкости: $p_A = p_0 - 2\sigma/R$. Рассмотрим в жидкости точку B, расположенную в той же горизонтальной плоскости, что и поверхность жидкости в сосуде вне капилляра. Эта точка находится на глубине h от точки A и, как известно, давление p_B в ней будет на величину ρgh больше: $p_B = p_A + \rho gh = p_0 - 2\sigma/R + \rho gh$. С другой стороны точка B внутри капилляра, как было принято, находится в той же горизонтальной плоскости, что и точка B′ на плоской поверхности жидкости вне капилляра, давление $p_{B'}$ равно давлению газа p_0: $p_{B'} = p_0$. Поскольку точки B и B′ находятся в одной горизонтальной плоскости, то, как известно, давление в них одинаково $p_B = p_{B'} = p_0$. Имея в виду полученное выше выражение для p_B, в итоге получаем: $p_0 - 2\sigma/R + \rho g h = p_0$. Или $\rho g h = 2\sigma/R$. Это соотношение показывает, что равновесное положение жидкости в капилляре устанавливается, когда капиллярный скачок давления на ее поверхности $2\sigma/R$ уравновешивается гидростатическим давлением в поле силы тяжести $\rho g h$. Окончательно для высоты поднятия жидкости в круглом капилляре получаем:

$$h = \frac{2\sigma}{R}. \tag{1.16}$$

Этой же формулой определяется и уровень, на который жидкость опускается в случае несмачивания стенок капилляра (рис. 1.9, *б*).

Капиллярно-пористые материалы.

В природе большое распространение имеют твердые материалы, в структуре которых существует большое количество мелких пустот (пор), размеры которых много меньше размеров тела и которые по сути представляют собой капилляры. При наличии выхода этих капилляров в окружающую среду в них из внешней среды может поступать жидкость. Примерами таких материалов являются древесина и многие другие растительные материалы, текстильные, строительные, сыпучие и порошковые материалы, почва, кожа и т. п.

Если вещество капиллярно-пористого материала смачивается жидкостью, то она обладает способностью проникать в капилляры, а материал, как говорится, обладает способностью впитывать жидкость.

В противном случае – материал препятствует проникновению жидкости в него. На основе таких материалов, в частности, создаются водонепроницаемые ткани, которые способны пропускать воздух, но не влагу.

Подобного рода материалы широкого используются в технических системах и бытовой практике.

Капиллярный распад жидких струй.

Классическим примером объема жидкости с цилиндрической свободной поверхностью является вытекающая из круглого отверстия струя.

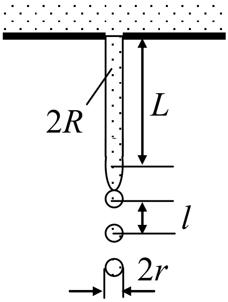


Рис. 1.10

Наблюдая за движением струи, нетрудно заметить, что на некотором расстоянии от отверстия, которое называется длина нераспавшейся части струи L, она перестает быть сплошным цилиндром и распадается на отдельные капли. Это явление называется капиллярным распадом жидких струй и связано с описанным выше свойством объемов жидкости со свободной поверхностью стремиться к шарообразной форме. Образование капель связано с развивающимися на поверхности струи возмущениями поверхности, приводящими к формированию из цилиндрических участков струи определенной длины объемов шаробразной формы, как имеющих меньшую энергию. При этом радиус образующихся капель r примерно в два раза больше радиуса струи R: $r = 1{,}89R$. Существование нераспавшегося участка струи связано с тем, что процесс образования капель требует конечного времени τ, за которое струя успевает пройти некоторое расстояние без распада. Характерное время образования капель определяется соотношением $\tau \sim (\rho R^3/\sigma)^{1/2}$. Если скорость истечения жидкости из отверстия равна v, то длина нераспавшейся части струи определяется соотношением $L = v\,\tau \sim v\,(\rho R^3/\sigma)^{1/2}$.

Рис. 1.11

Капиллярный распад жидких струй лежит в основе технологии получения распыленных потоков жидкости при их истечении через форсунки.

Эти технологии широко используются для распыла жидкого топлива перед его сжиганием, для нанесения лакокрасочных покрытий, создания аэрозолей и т. п. (рис. 1.11).

2. СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

2.1. Основные положения статики жидкостей и газов. Классификация сил, действующих в жидкостях и газах

Как и механика вообще, механика жидкостей и газов включает в себя три больших раздела: статика, кинематика и динамика, из которых далее будет рассмотрен только первый раздел.

Статика изучает условия механического равновесия жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил и их моментов, то есть изучает процессы в неподвижных или движущихся как целое жидкостях и газах.

При этом основными задачами статики являются:

1) определение условий, при которых возможно механическое равновесие в жидкостях и газах;

2) определение распределения давления в покоящихся или движущихся как целое жидкостях и газах;

3) определение сил давления, действующих на тела, погруженные в жидкости и газы;

4) определение формы свободной поверхности равновесных объемов жидкости под действием приложенных к ним сил.

Силы, действующие в жидкостях и газах делятся на два класса: силы *массовые* и силы *поверхностные*.

К массовым или объемным силам относятся силы, которые действуют на каждую частицу объема жидкости или газа и их результирующая определяется суммой сил, действующих на каждую такую частицу.

Для локальной характеристики массовых сил в каждой точке объема среды вводится понятие «напряжение массовой силы» $\vec{f}(x, y, z)$, которое определяется как отношение массовой силы $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{м}}$, действующей на частицу жидкости с массой dm, к массе этой частицы: $\vec{f} = \mathrm{d}\vec{F}_{\text{м}} / \mathrm{d}m$. Согласно определению, размерность напряжения массовой силы есть м/с^2 и совпадает с размерностью ускорения.

Имея в виду, что dm = ρdV и зная распределение напряжения массовой силы по объему среды, можно вычислить полную массовую силу $\vec{F}_{\text{м}}$, действующую на любой объем жидкости или газа:

$\vec{F}_{\text{м}} = \int\limits_V \vec{f}(x, y, z)\mathrm{d}m = \int\limits_V \rho(x, y, z)\vec{f}(x, y, z)\mathrm{d}V.$ Таким образом, величина массовой силы пропорциональна объему среды или кубу его линейных размеров l: $F_{\text{м}} \sim V \sim l^3$.

Наиболее распространенными массовыми силами являются сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ и сила инерции $\vec{F}_{\text{и}}$. Учитывая, что эти силы, действующие на тело с массой m, равны $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$, $\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}$ (где $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести, $\vec{a}$ – ускорение, с которым движется тело), напряжения этих сил равны, соответственно, $\vec{f}_{\text{т}} = \vec{g}$, $\vec{f}_{\text{и}} = -\vec{a}$.

К поверхностным силам относятся силы, которые действуют только на границах рассматриваемых объемов жидкости или газа.

Для локальной характеристики поверхностной силы в каждой точке поверхности объема вводится понятие «напряжение поверхностной силы» $\vec{\sigma}(x, y, z)$, которое определяется как отношение поверхностной силы $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{пов}}$, действующей на элемент поверхности $\mathrm{d}S$, к площади этого элемента: $\vec{\sigma} = \mathrm{d}\vec{F}_{\text{пов}} / \mathrm{d}S$. Согласно определению, размерность напряжения поверхностной силы есть Н/м^2, а единица ее измерения носит название Паскаль, Па.

Зная распределение напряжения поверхностной силы по поверхности объема среды, можно вычислить полную поверхностную силу $\vec{F}_{\text{пов}}$, действующую на поверхности любого объема жидкости или газа: $\vec{F}_{\text{пов}} = \int\limits_S \vec{\sigma}(x, y, z)\mathrm{d}S.$ Таким образом, величина поверхностной силы пропорциональна площади поверхности объема среды или квадрату его линейных размеров l: $F_{\text{пов}} \sim S \sim l^2$.

Наиболее распространенными поверхностными силами являются сила давления $F_{\text{д}}$, сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила поверхностного натяжения.

Поскольку силы давления всегда действуют по нормали к поверхности, для их определения достаточно задания их модуля. Поэтому напряжение силы давления p является скалярной величиной и называется просто давлением, $p = \mathrm{d}F_{\text{д}}/\mathrm{d}S$.

Напряжение сил вязкого трения определяется законом вязкого трения Ньютона (1.2).

2.2. Равновесие жидкостей и газов в отсутствии массовых сил. Закон Паскаля

Если жидкость или газ находятся в равновесии, это означает, что результирующая всех сил, действующих на каждую частицу среды, равна нулю и, соответственно, равны нулю ее проекции на каждую из осей координат.

В связи с этим введем в некоторой точке объема среды декартову систему координат (x, y, z) и рассмотрим условия равновесия жидкой частицы, находящейся в этой точке. Для простоты рассмотрения, выберем форму частицы в виде тетраэдра, три грани которого расположены в координатных плоскостях, а четвертая – замыкающая – под наклоном к ним (рис. 2.1). Нормалями к первым трем граням будут являться оси координат, а единичный вектор внешней нормали к замыкающей грани обозначим $\vec{n}$. Площади граней dS_x, dS_y, dS_z, dS_n будем отмечать нижним индексом, соответствующим обозначению нормали к ним. На каждую из граней в перпендикулярном к ней направлении будет действовать давление среды p_x, p_y, p_z, p_n, величину которого для каждой грани также будем отмечать нижним индексом, соответствующим обозначению нормали к ней.

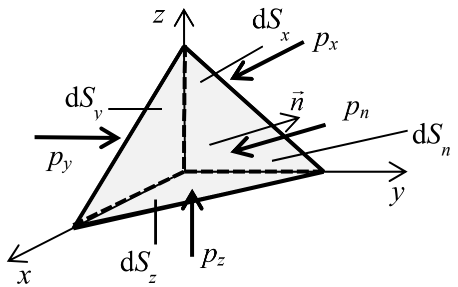


Рис. 2.1

Сила давления, действующая на площадку dS_n, направлена противоположно направлению внешней нормали к ней и будет определяться следующим образом.

Как известно, единичный вектор имеет своими проекциями на оси координат косинусы углов, которые он составляет с соответствующими осями: $\vec{n} = [\cos(n\hat{x}), \cos(n\hat{y}), \cos(n\hat{z})]$.

Рассматриваемая частица будет находиться в равновесии, если геометрическая сумма проекций сил давления, действующих на нее, на каждую из осей координат будет равна нулю.

Например, на ось z ненулевую проекцию будут иметь только сила давления, действующая на грань $\mathrm{d}S_z$, равную $p_z\mathrm{d}S_z$, а также сила давления $\mathrm{d}\vec{F}_n$, проекция которой равна: $-p_n\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S_n$. Для покоящееся частицы сумма этих проекций должна быть равна нулю: $p_z\mathrm{d}S_z - p_n\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S_n = 0$ или $p_z\mathrm{d}S_z = p_n\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S_n$. Аналогичным образом можно получить соответствующие условия равновесия в проекции и на другие оси координат, что в итоге выльется в следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
p_x\mathrm{d}S_x &= p_n\cos(n\hat{x})\mathrm{d}S_n,\\
p_y\mathrm{d}S_y &= p_n\cos(n\hat{y})\mathrm{d}S_n,\\
p_z\mathrm{d}S_z &= p_n\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S_n.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Каждая из граней $\mathrm{d}S_x$, $\mathrm{d}S_y$, $\mathrm{d}S_z$ есть не что иное, как проекция наклонной грани на плоскость, в которой они лежат. Согласно правилам проецирования площадь проекции будет равна площади исходной фигуры, умноженной на косинус угла между нормалями к ней и к плоскости проекции. Поэтому:

$$
\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}S_n\cos(n\hat{x}); \quad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}S_n\cos(n\hat{y}); \quad \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}S_n\cos(n\hat{z}).
$$

С учетом этого, из условий равновесия (2.1) получаем: $p_x = p_y = p_z = p_n = p$ – и, соответственно, закон Паскаля, который гласит, что *давление в покоящихся жидкости или газе в данной точке не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.*

Другими словами, давление в жидкости или газе действует по всем направлениям одинаково.

2.3. Равновесие жидкостей и газов в присутствии массовых сил. Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей и газов

Определим условия равновесия жидкости или газа, при действии на них массовых сил.

Для этого в некоторой точке среды расположим декартову систему координат и выделим элементарную частицу в форме параллелепипеда, одна из вершин которого находится в начале координат, грани лежат в координатных плоскостях, а длины ребер равны, соответственно, dx, dy, dz (рис. 2.2).

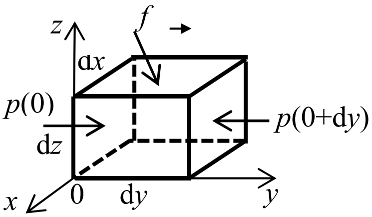


Рис. 2.2

На каждую из граней частицы перпендикулярно им действует давление среды p, значение которого соответствует местоположению грани, а на объем частицы действует массовая сила с напряжением $\vec{f}$.

Частица будет находиться в равновесии и покоиться, если результирующая всех сил, действующих на нее, будет равна нулю. Это также означает, что должна быть равна нулю каждая из проекций этой результирующей силы на оси координат.

Рассмотрим, например, проекции на ось y всех сил, действующих на частицу, имея в виду, что давление всегда действует по нормали к поверхности. Таковыми будут: 1) сила давления, действующая на левую грань частицы в положительном направлении оси y и равная произведению среднего давления $p(y = 0)$ в месте нахождения этой грани при $y = 0$ на площадь этой грани dxdz: $p(y = 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$; 2) сила давления, действующая на правую грань частицы в противоположном оси y направлении и равная также произведению среднего давления $p(y = 0 + \mathrm{d}y)$ в месте нахождения этой грани при $y = 0 + \mathrm{d}y$ на площадь этой грани dxdz: $-p(y = 0 + \mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$; 3) проекция на ось y массовой силы, равная произведению y-проекции напряжения массовой силы f_y на массу частицы $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$: $\rho f_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Силы давления, действующие на другие грани частицы, проекции на ось y иметь не будут.

Таким образом, условие равенства нулю y-проекции результирующей силы будет выглядеть следующим образом:

$$p(y = 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - p(y = 0 + \mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \rho f_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Величину $p(y = 0 + \mathrm{d}y)$ можно представить путем разложения в ряд Тейлора с точностью до линейных членов как

$$p(y = 0 + \mathrm{d}y) = p(y = 0) + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

В рассматриваемой ситуации надо брать частную производную ($\partial p/\partial y$) поскольку давление кроме y зависит также от других переменных x и z.

Подставив это разложение в полученное условие равновесия, последнее можно переписать в виде:

$$p(y=0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - p(y=0)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \rho f_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

которое после соотвествующих сокращений станет следующим:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y.$$

Нетрудно понять, что если аналогичным образом рассмотреть условия равновесия в проекции на другие оси x и z, то получим такие же соотношения с простой заменой y на x и z.

Таким образом, общие условия равновесия в жидкости или газе будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho f_x; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho f_y; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho f_z. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Этими условиями определяется, как должно изменяться давление в жидкости или газе, если на них действуют массовые силы.

С точки зрения математики соотношения (2.2) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, из решения которой находится распределение давления $p(x, y, z)$ при заданном распределении действующих массовых сил в правой части этих уравнений.

Эту систему уравнений можно записать более коротко в векторном виде. Для этого надо первое уравнение умножить на единичный вектор $\vec{i}$ оси x, второе – на единичный вектор $\vec{j}$ оси y, третье – на единичный вектор $\vec{k}$ оси z и сложить их, имея в виду, что $\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial x}\vec{k} = \mathrm{grad}p$, а $f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} = \vec{f}$.

$$\mathrm{grad}p = \rho\vec{f}. \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.2), (2.3) являются основным математическим инструментом для определения распределения давления в жидкостях и газах, находящихся под действием внешних массовых сил.

В дальнейшем будем называть их «дифференциальные уравнения гидростатики».

2.3.1. Условия возможности механического равновесия в однородной несжимаемой жидкости

Как оказывается, не при любых массовых силах жидкости и газы могут находиться в равновесии. Выясним, каким требованиям должны удовлетворять массовые силы, чтобы под их действием жидкости и газы могли покоиться.

Поскольку в покоящейся жидкости должны выполняться дифференциальные уравнения гидростатики (2.3), вопрос об условиях возможности равновесия в жидкости сводится к вопросу об условиях справедливости уравнений (2.3).

Прежде всего рассмотрим ситуацию, когда жидкость однородна и несжимаема, то есть ее плотность постоянна, $\rho = \mathrm{const}$.

Возьмем операцию ротор (rot) от уравнения (2.3), имея в виду, что ротор от градиента любой функции тождественно равен нулю, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}p) = 0$. Тогда левая часть уравнения (2.3) обращается в нуль, а при условии $\rho = \mathrm{const}$ на ρ можно сократить и получить, что дифференциальные уравнения гидростатики могут выполняться только, если напряжение массовых сил удовлетворяет условию $\mathrm{rot}\vec{f} = 0$.

Из математики известно, что если ротор какого-либо вектора равен нулю, то всегда можно ввести некую скалярную функцию ψ, через которую этот вектор определяется как ее градиент $\vec{f} = \mathrm{grad}\psi$.

В этом случае функция ψ называется потенциалом вектора, а вектор называется потенциальным.

Таким образом, приходим к выводу, что равновесие однородной несжимаемой жидкости возможно только под действием потенциальной массовой силы.

Отметим, что сила тяжести является потенциальной и, если ось z направлена вдоль нее, то потенциал силы тяжести $\psi_т$ имеет вид: $\psi_т = \psi_{т0} + \rho g z$.

2.3.2. Условие возможности механического равновесия в тяжелой неизотермической жидкости. Естественная конвекция

Рассмотрим на предмет возможности равновесия жидкости более сложную ситуацию, когда распределение плотности по ее объему неоднородно. В частности, это может быть следствием неоднородного распределения температуры в жидкости, от которой зависит ее плотность, $\rho = \rho[T(x, y, z)]$.

Опять возьмем операцию ротор rot от уравнения (2.3) и распишем ротор от правой части этого уравнения согласно правилам математического анализа, приравняв его нулю:

$$\mathrm{rot}(\rho\vec{g}) = \rho(\mathrm{rot}\vec{g}) + [\mathrm{grad}\rho \times \vec{g}] = 0.$$

Приняв во внимание, что $\vec{g}$ есть постоянный вектор и $\mathrm{rot}\vec{g} = 0$, опять получим, что дифференциальные уравнения гидростатики могут выполняться только, если выполняется условие

$$[\mathrm{grad}\rho \times \vec{g}] = 0, \tag{2.4}$$

которое одновременно является и условием возможности механического равновесия в жидкости.

Как известно, векторное произведение двух ненулевых векторов обращается в нуль, если эти вектора коллинеарны.

Таким образом, приходим к выводу, что механическое равновесие в жидкости или газе с неоднородным распределением плотно-

сти в поле силы тяжести возможно только, если градиент плотности коллинеарен вектору силы тяжести.

Если это условие не выполняется, то механическое равновесие жидкости или газа невозможно и они обязательно должны придти в движение, что действительно наблюдается на практике.

Такого рода движение жидкостей или газов, возникающее в них в поле силы тяжести при неоднородном распределении их плотности, называется естественной или свободной конвекцией.

Естественная конвекция играет важную роль как в природных процессах, так и в технических системах, обеспечивая, в частности, один из механизмов переноса тепла, в том числе и в жилых помещениях.

Физический механизм естественной конвекции связан с известным механизмом действия силы Архимеда, когда объемы жидкости или газа с меньшей плотностью всплывают в область среды с большей плотностью, из которой в свою очередь более плотные объемы опускаются вниз (тонут).

Если неоднородность плотности среды обусловлена ее зависимостью от неоднородности температуры $\rho = \rho[T(x, y, z)]$, то $\mathrm{grad}\rho = (\mathrm{d}\rho / \mathrm{d}T)\mathrm{grad}T$, и условие (2.4) превращается в условие, которому должен удовлетворять градиент температуры

$$[\mathrm{grad}T \times \vec{g}] = 0, \qquad (2.5)$$

и из которого следует, что *механическое равновесие в жидкости или газе с неоднородным распределением температуры в поле силы тяжести возможно только, если градиент температуры коллинеарен вектору силы тяжести* $\mathrm{grad}\,T \parallel \vec{g} = 0$ (рис. 2.3).

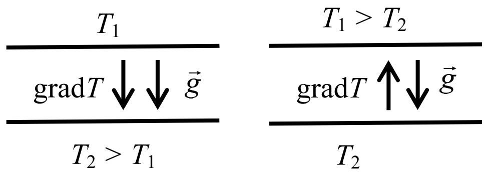


Рис. 2.3

Или другими словами, это равновесие возможно только при равномерном нагреве среды снизу или сверху (рис. 2.3). При нагреве сбоку в жидкости или газе обязательно возникнет естественная конвекция, которая в этом случае будет называться тепловой естественной конвекцией.

Как показывает опыт, несмотря на возможность механического равновесия в определенных выше случаях, оно не всегда является устойчивым. Так, например, при нагреве снизу у обычных жидкостей плотность нижних слоев с более высокой температурой оказывается меньше плотности верхних и частицы среды с большей температурой и меньшей плотностью стремятся всплывать под действием силы Архимеда, а частицы верхних более холодных слоев стремятся тонуть. В результате, при определенном значении перепада температур, который называется критическим, даже при равномерном нагреве снизу существующее в жидкости или газе равновесие становится неустойчивым и в них возникает замкнутое естественноконвективное течение (рис. 2.4).

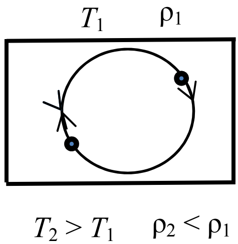


Рис. 2.4

Соответственно, такая ситуация является невозможной при нагреве жидкости или газа сверху, где будут находиться слои с меньшей плотностью. Поэтому *при равномерном нагреве сверху механическое равновесие жидкости или газа будет устойчивым, а естественная конвекция невозможна*.

В связи с этим, можно еще раз обратить внимание на уникальное свойство воды в температурном диапазоне от 0 °С до 4 °С, когда коэффициент теплового расширения меняет знак и становится отрицательным, а большему значению температуры соответствует бóльшее значение плотности (см. п. 1.2.2). В этих условиях сделанные выше выводы относительно устойчивости равновесия меняются на прямо противоположные, и равновесие жидкости при нагреве снизу становится устойчивым. Поэтому в природных водоемах при понижении внешней температуры поверхности водоема до 0 °С и сохранении температуры внутри него до 4 °С, то есть при нагреве водоема снизу, естественная конвекци прекращается, холодные верхние слои воды не опускаются на дно и полное промерзание водоема затрудняется. Результатом этого является поддержание жизни в этих водоемах.

2.4. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости

Пусть несжимаемая жидкость (ρ = const) находится в поле силы тяжести, в направлении которой расположим ось z (рис. 2.5). Тогда напряжение силы тяжести будет иметь проекции $\vec{f} = \vec{g} = [0, 0, g]$, а дифференциальные уравнения гидростатики (2.3) примут вид:

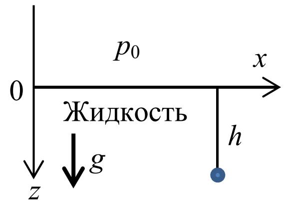


Рис. 2.5

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

Из первых двух уравнений следует, что в рассматриваемом случае давление не зависит от координат x и y, то есть не изменяется в горизонтальной плоскости.

Общим решением третьего из этих уравнений $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$ является $p = \rho g z + C,$ в котором произвольная постоянная C должна определяться из дополнительных граничных условий. Разместим начало отсчета $z = 0$ координаты z на свободной поверхности жидкости, давление газа над которой будем считать известным и равным p_0. Тогда требуемое граничное условие будет выглядеть следующим образом: $p = p_0$ при $z = 0$. В этом случае для произвольной постоянной C получается значение $C = p_0$, и частное решение дифференциальных уравнений гидростатики, удовлетворяющее принятому граничному условию, примет вид

$$p = p_0 + \rho g z \tag{2.6}$$

и будет описывать распределение давления в жидкости в рассматриваемой ситуации.

Часто вместо координаты z вводят понятие глубина в жидкости h, как расстояние от поверхности до рассматриваемой точки, и записывают выражение (2.6) в виде:

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{2.7}$$

Согласно (2.7), *давление в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести линейно увеличивается с глубиной*.

Полезно отметить, что в воде с $\rho = 10^3$ кг/м^3 при $g \approx 10$ м/с^2 и $h = 10$ м величина $\rho g h$ принимает значение 10^5 Па ≈ 1 атм. То есть на каждые десять метров глубины в воде давление увеличивается примерно на одну атмосферу.

Назовем поверхностью уровня поверхность, на которой давление в жидкости имеет постоянную величину, $p = \text{const}$. Из (2.6) нетрудно видеть, что уравнение такой поверхности в рассматриваемом случае имеет вид $z = \text{const}$ и описывает горизонтальную плоскость.

Таким образом, *поверхности уровня или изобарические поверхности в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести представляют собой горизонтальные плоскости*.

С другой стороны, в любых точках жидкости, лежащих в одной горизонтальной плоскости, давление будет одинаково.

Поскольку свободная поверхность жидкости представляет собой поверхность с постоянным давлением газа над ней, *свободная поверхность жидкости в поле силы тяжести имеет форму горизонтальной плоскости*.

Сообщающиеся сосуды.

Назовем сообщающимися сосуды, между которыми возможно свободное перетекание жидкости (рис. 2.6). Если все сосуды открыты в среду с одинаковым давлением газа, то в соответствии с вышесказанным, поверхности жидкости в них будут находиться в одной горизонтальной плоскости независимо от формы сосуда.

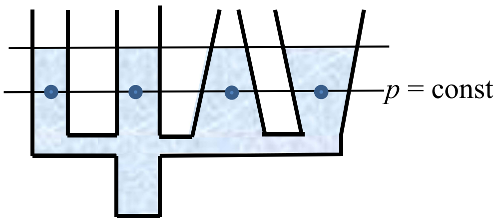


Рис. 2.6

Кроме того, в этих сосудах в точках, лежащих в одной горизонтальной плоскости, давление будет одинаково.

Жидкостный манометр.

Описанные выше свойства сообщающихся сосудов дают возможность использовать их в качестве прибора для измерения давления – жидкостного манометра, основным элементом которого чаще всего является U-образная трубка, заполненная жидкостью (рис. 2.7). Если концы трубки соединены со средами с разными давлениями p_1 и p_2,

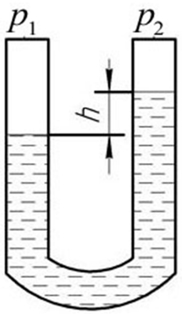


Рис. 2.7

то под действием разности давлений в трубке установится разность уровней жидкости h. Поскольку давление в горизонтальной плоскости, проходящей через нижний уровень жидкости, в обеих частях трубки одинаково, а в верхнем уровне с одной стороны трубки оно равно p_1, с другой $p_2 + \rho g h$, то $p_1 = p_2 + \rho g h$ или $p_1 - p_2 = \rho g h$.

Таким образом, измеряя h, можно легко определить, например, избыточное или вакуумметрическое давление, если один из концов трубки соединен с атмосферой.

2.5. Распределение давления в тяжелом сжимаемом газе

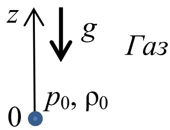


Рис. 2.8

При таком выборе направления оси z (рис. 2.8) напряжение силы тяжести будет иметь отрицательную проекцию на нее $\vec{f} = \vec{g} = [0, 0, -g]$ и тогда:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \mathrm{g};$$

$$p / p_0 = \rho / \rho_0 \quad \text{или} \quad \rho = (\rho_0 / p_0) p;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \; p;$$

$$\frac{\partial p}{\partial p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, \mathrm{d}z.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение дифференциальных уравнений гидростатики в виде:

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, z + C. \qquad (2.8)$$

Значение произвольной постоянной C определяется из граничного условия, определяющего положение начала отсчета координаты z. Естественно расположить его в той точке, в которой известны исходные значения давления p_0 и плотности ρ_0. Например, для атмосферного воздуха такой точкой отсчета чаще всего выбирается уровень моря на поверхности Земли. Таким образом принимается, что $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ при $z = 0$. Тогда $C = \ln p_0$ и частное решение дифференциальных уравнений гидростатики, удовлетворяющее принятому граничному условию, принимает вид

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\mathrm{g}\,z \quad \text{или} \quad z = \frac{p_0}{\rho_0 \mathrm{g}}\ln\frac{p_0}{p} \tag{2.9}$$

и дает следующее распределение давления в газе:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z}. \tag{2.10}$$

С учетом уравнения Клапейрона-Менделеева (1.5) $p_0 = R\rho_0 T$ формулу (2.10) также можно записать в виде:

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT}z}. \tag{2.11}$$

Это выражение носит название барометрической формулы и из нее следует, что *давление в изотермическом газе в поле силы тяжести уменьшается с высотой по экспоненциальному закону.*

Альтиметр.

Применительно к атмосфере Земли барометрическая формула свзывает между собой высоту точки над уровнем моря и давление в этой точке. Поскольку измерение давления в любой точке может быть осуществлено достаточно просто с использованием манометра, метод определения высоты по измеряемому давлению нашел широкое применение.

Прибор для определения высоты над уровнем моря, действие которого основано на использовании барометрической формулы, носит название барометрический альтиметр и широко используется в авиации, альпинистами, парашютистами и т. п.

Естественно, что в реальных альтиметрах делаются поправки и на понижение температуры воздуха с высотой, и на изменение состава воздуха с высотой.

2.6. Распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости в равномерно вращающемся сосуде

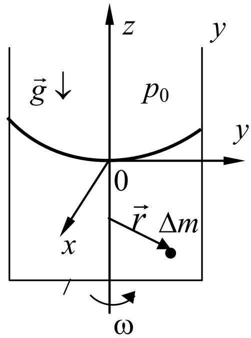


Рис. 2.9

Пусть несжимаемая жидкость заполняет круговой цилиндрический сосуд, равномерно вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω. При этом жидкость в сосуде будет вращаться как целое (рис. 2.9). Жидкость находится в поле силы тяжести $\vec{g}$ и кроме того на каждую частицу жидкости с массой Δm будет действовать сила инерции $\Delta\vec{F}_{\text{и}} = \Delta m\omega^2\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы от оси вращения имеет проекции x, y, соответствующие коррдинатам частицы. Ось z направим вертикально вверх. Напряжение сил инерции $\vec{f}_{\text{и}}$ в данном случае равно $\vec{f}_{\text{и}} = \Delta\vec{F}_{\text{и}} / \Delta m = \omega^2\vec{r} = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0]$. Напряжение суммарной силы $\vec{f}$, действующей на частицу, имеет проекции на все оси координат, определяемые следующим образом:

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{т}} + \vec{f}_{\text{и}} = \vec{g} + \omega^2\vec{r} = [\omega^2 x, \omega^2 y, -g].$$

Тогда дифференциальные уравнения гидростатики (2.2) примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x; \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y; \qquad (2.12) \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 - \rho g z + C, \; -$$

а произвольная постоянная C может быть определена выбором начала отсчета координаты z. Поместим начало координат на свободную поверхность жидкости, давление газа над которой постоянно и равно p_0. Тогда граничное условие для поставленной задачи имеет вид: $p = p_0$ при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. При этом условии постоянная C становится равной $C = p_0$. В итоге решение дифференциальных уравнений гидростатики, даст следующее распределение давления в жидкости:

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \rho g z \qquad (2.13)$$

или

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z,$$

где r – расстояние до рассматриваемой точки от оси вращения.

Как видно из этих выражений, *давление в равномерно вращающейся несжимаемой жидкости в поле силы тяжести линейно увеличивается с глубиной и квадратично увеличивается с расстоянием от оси вращения.*

Определим форму свободной поверхности жидкости, как поверхности постоянного давления $p = p_0$. При этом условии из (2.13) следует:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z = 0$$

или

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2.$$

Данное выражение дает уравнение свободной поверхности и описывает параболоид вращения.

Таким образом, свободная поверхность равномерно вращающейся несжимаемой жидкости в поле силы тяжести представляет собой параболоид вращения.

2.7. Сила давления на тела, погруженные в жидкость

2.7.1. Сила давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в жидкость

Если в жидкости находится некая криволинейная поверхность S, то в общем случае действующее на нее давление в разных ее точках будет разным как по величине, так и по направлению (рис. 2.10).

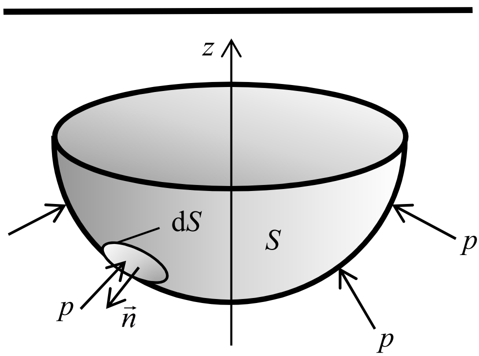


Рис. 2.10

Чтобы вычислить результирующую силу давления, действующую на эту поверхность, выделим на ней в некоторой точке (x, y, z) малый элемент поверхности с площадью dS, единичный вектор внешней нормали к которому в этой точке есть $\vec{n}$. Считая давление в пределах этого малого элемента постоянным, величину элементарной силы давления dF, действующей на этот элемент поверхности, можно определить как произведение давления в этой точке на площадь этого элемента: dF = p(x, y, z)dS. Поскольку действующее на площадку dS давление направлено к ней, то эта сила будет иметь направление, противоположное вектору внешней нормали $\vec{n}$. Поэтому вектор силы давления $\mathrm{d}\vec{F}$, действующей на площадку dS, будет определяться следующим образом: $\mathrm{d}\vec{F} = -p(x, y, z)\vec{n}\mathrm{d}S$.

Результирующая сила давления $\vec{F}$, действующая на всю поверхность S, будет равна сумме всех элементарных сил давления, действующих на все элементарные площадки, покрывающие поверхность, то есть интегралу:

$$\vec{F} = \iint\limits_S \mathrm{d}\vec{F} = -\iint\limits_S p(x,y,z)\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}S. \qquad (2.14)$$

Как известно, единичный вектор имеет направляющие косинусы, совпадающие с его проекциями на оси координат, то есть косинусы углов, которые он составляет с соответствующими осями: $\vec{n} = [\cos(n\hat{x}), \cos(n\hat{y}), \cos(n\hat{z})]$.

С учетом этого, для проекций на оси координат силы давления можно записать:

$$\begin{aligned} F_x &= -\iint\limits_S p(x,y,z)\cos(n\hat{x})\mathrm{d}S; \\ F_y &= -\iint\limits_S p(x,y,z)\cos(n\hat{y})\mathrm{d}S; \\ F_z &= -\iint\limits_S p(x,y,z)\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

2.7.2. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на криволинейную поверхность, погруженную в тяжелую несжимаемую жидкость

Особое значение имеет вычисление сил давления, действующих на тела в жидкости в поле силы тяжести. Сила тяжести задает определенное выделенное направление в пространстве, которое называется вертикальным, тем самым определяя понятия «верх» и «низ». Соответственно, следует ожидать появление особенностей в поведении тел в жидкости именно в этом направлении.

Рассмотрим вертикальную составляющую силы давления, действующую на произвольную поверхность S, погруженную в несжимаемую жидкость с плотностью $\rho_ж$, находящуюся в поле силы тяжести (рис. 2.11). Ось z направим вертикально вниз, а начало отсчета $z = 0$ разместим на горизонтальной свободной поверхности жидкости, в плоскости которой будут расположены горизонтальные оси x и y, и давление газа над которой равно p_0.

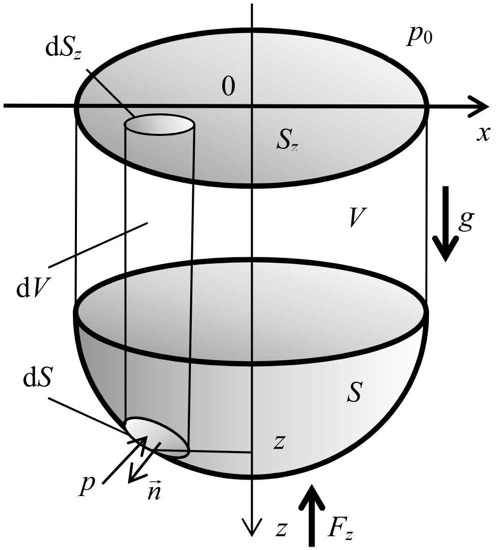


Рис. 2.11

Спроецируем поверхность S на свободную поверхность жидкости и получим ее проекцию с площадью S_z (рис. 2.11). Выберем на поверхности S элемент dS с с единичным вектором внешней нормали к нему $\vec{n}$ и также спроецируем его на свободную поверхность жидкости, получив на ней его проекцию с площадью dS_z. Согласно правилам проецирования площадь проекции будет равна площади исходной фигуры, умноженной на косинус угла между нормалями к ней и к плоскости проекции $\iint\limits_S \mathrm{d}S_z$, то есть $\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}S\cos(n\hat{z})$.

Распределение давления в жидкости в рассматриваемом случае дается выражением (2.6): $p = p_0 + \rho_ж gz$. Чем глубже находится элемент поверхности, тем больше действующее на него давление жидкости.

Выражение для вертикальной составляющей F_z, действующей на рассматриваемую поверхность силы давления из (2.13), имеет вид:

$$F_z = -\iint\limits_S p(x,y,z)\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S = -\iint\limits_S (p_0 + \rho_ж gz)\cos(n\hat{z})\mathrm{d}S = \\ = -\iint\limits_S (p_0 + \rho_ж gz)\mathrm{d}S_z. \tag{2.16}$$

Вычислим этот интеграл от каждого из слагаемых в подынтегральном выражении (2.14) по отдельности:

1) С учетом того, что интеграл $\iint\limits_S \mathrm{d}S_z$ представляет собой не что иное, как сумму площадей всех элементов $\mathrm{d}S_z$, покрывающих поверхность S_z: $\iint\limits_S \mathrm{d}S_z = S_z$, получаем:

$$\iint\limits_S p_0 \mathrm{d}S_z = p_0 \iint\limits_S \mathrm{d}S_z = p_0 S_z.$$

Это выражение имеет смысл силы давления p_0 на поверхность S_z.

2) Во втором интеграле $\iint\limits_S \rho_ж gz\mathrm{d}S_z = \rho_ж g \iint\limits_S z\mathrm{d}S_z = \rho_ж g \iint\limits_S z\mathrm{d}S_z$ обратим внимание на то, что $z\mathrm{d}S_z$ есть объем $\mathrm{d}V$ цилиндра с площадью основания $\mathrm{d}S_z$ и высотой z: $z\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}V$, а $\iint\limits_S \mathrm{d}V$ есть сумма всех элементарных объемов $\mathrm{d}V$, расположенных внутри изображенного на рис. 2.11 цилиндра с объемом V: $\iint\limits_S \mathrm{d}V = V$. Тогда:

$$\iint\limits_S \rho_ж gz\mathrm{d}S_z = \rho_ж g \iint\limits_S z\mathrm{d}S_z = \rho_ж g \iint\limits_S z\mathrm{d}S_z = \rho g \iint\limits_S \mathrm{d}V = \rho_ж gV.$$

Произведение $\rho_ж gV$ является весом жидкости в объеме V.

Окончательно для силы F_z получаем выражение:

$$F_z = -(p_0 S_z + \rho_ж gV). \qquad (2.17)$$

Физический смысл полученного выражения заключается в том, что *на поверхность, погруженную в несжимаемую жидкость в поле силы тяжести, действует в вертикальном направлении сила F_z, равная сумме: (1) силы давления газа над поверхностью жидкости на проекцию рассматриваемой поверхности на горизонтальную плоскость ($p_0 S_z$) и (2) весу жидкости $\rho_ж gV$ в объеме цилиндра с вертикальными образующими, ограниченного снизу рассматриваемой поверхностью, а сверху свободной поверхностью жидкости.*

2.7.3. Вертикальная составляющая силы давления, действующая на тело, погруженное в тяжелую несжимаемую жидкость. Закон Архимеда

Особенностью любого тела является то, что оно имеет замкнутую поверхность, ограничивающую его. Поэтому силы давления, действующие на него, могут иметь вертикальные составляющие, направленные в разных частях поверхности как вертикально вверх, так и вертикально вниз.

В связи с этим рассмотрим полностью погруженное в жидкость тело с объемом V (рис. 2.12).

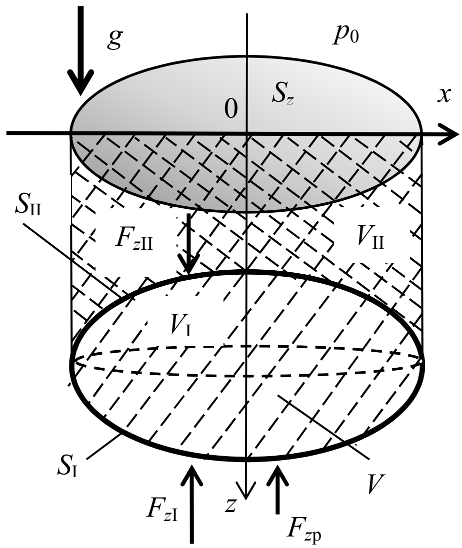


Рис. 2.12

В соответствии с результатами п. 2.6.2 на нижнюю часть поверхности этого тела S_{I} вертикально вверх действует сила давления $F_{z\mathrm{I}}$, равная $F_{z\mathrm{I}} = -(p_0S_z + \rho_{ж}gV_{\mathrm{I}})$, где V_{I} – объем жидкости над поверхностью S_{I}. На верхнюю часть поверхности S_2 вертикально вниз действует сила давления $F_{z\mathrm{II}}$, равная $F_{z\mathrm{II}} = (p_0S_z + \rho_{ж}gV_{\mathrm{II}})$, где V_{II} – объем жидкости над поверхностью S_{II}.

Результирующая этих сил равна:

$$F_{zр} = F_{zI} + F_{zII} = -\rho_ж g(V_I - V_{II}) = -\rho_ж g V,$$

где V – объем тела.

Знак минус в этом выражении показывает, что эта сила имеет отрицательную проекцию на ось z, то есть направлена вертикально вверх.

Обозначим эту силу $F_А$ и окончательно запишем

$$F_А = \rho_ж g V. \qquad (2.18)$$

Выражение (2.18) представляет собой математическую запись закона Архимеда, который состоит из нескольких пунктов и формулируется следующим образом: *на тело, погруженное в несжимаемую жидкость в поле силы тяжести действует сила F_A (которая носит название силы Архимеда) (1), направленная вертикально вверх (поэтому часто назы-ваемая выталкивающей силой) (2), равная по величине весу жидкости в объеме тела (3), имеющая точку приложения в центре тяжести жидкости в объеме тела (которая называется центром давления) (4).*

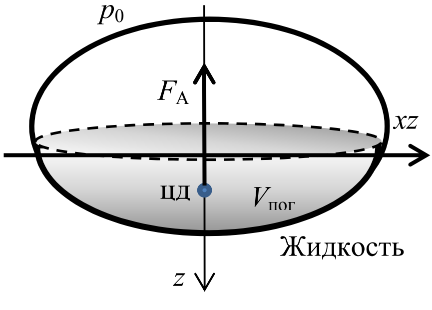


Рис. 2.13

Если тело не полностью погружено в жидкость (рис. 2.13), то, в соответствии с изложенным выше рассмотрением величина силы Архимеда, определяется объемом $V_{пог}$ только погруженной в жидкость части тела и центр давления (цд) будет находиться в центре тяжести жидкости именно в этом объеме:

$$F_А = \rho_ж g V_{пог}. \qquad (2.19)$$

Еще раз подчеркнем, что сила Архимеда имеет место только в жидкости, находящейся в поле силы тяжести, когда давление в ней увеличивается с глубиной. В связи с этим давление на нижнюю часть тела всегда будет больше, чем на верхнюю. Эта разность давлений и обуславливает силу Архимеда, направленную от большего значения давления к меньшему.

Кроме того, следует обратить внимание на то, что величина силы Архимеда не зависит от ориентации тела в жидкости и определяется только величиной его объема V.

2.7.4. Горизонтальные составляющие сил, действующих на тела, погруженные в тяжелую несжимаемую жидкость

Для определения компонентов сил давления, действующих на погруженное в жидкость тело в горизонтальных направлениях, необходимо поступать следующим образом (рис. 2.14):

1) спроецировать поверхность рассматриваемого тела на плоскость, перпендикулярную оси, на которую определяется проекция силы. Для примера, представленного на рис. 2.14, при определении x-проекции силы давления F_x такой плоскостью является плоскость (yz);

2) определить координату z центра тяжести полученной плоской фигуры ($z_{цт}$) и ее площадь S_x;

3) умножить значение давления в жидкости в этом центре тяжести $p(z_{цт})$ на площадь проекции S_x.

Таким образом,

$$F_x = p(z_{цт})\, S_x = (p_0 + \rho g z_{цт}) S_x.$$

Аналогично определяется и проекция силы давления на ось y:

$$F_y = p(z_{цт})\, S_y = (p_0 + \rho g z_{цт}) S_y.$$

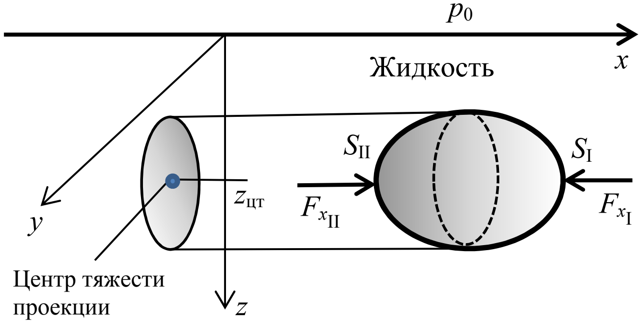


Рис. 2.14

В случае тела с замкнутой поверхностью, полностью находящейся в жидкости, следует иметь в виду, что силы давления действуют как в положительном ($F_{x\mathrm{II}}$ на рис. 2.14), так и в отрицательном направлении рассматриваемых осей ($F_{x\mathrm{I}}$ на рис. 2.14). Поскольку в горизонтальной плоскости давление в жидкости не изменяется, эти силы по величине равны $|F_{x\mathrm{I}}| = |F_{x\mathrm{II}}|$ и компенсируют друг друга.

Поэтому под действием горизонтальных составляющих сил давления тело не перемещается, но испытывает всестороннее сжатие.

2.8. Плавание тел в тяжелой несжимаемой жидкости

2.8.1. Плавание тел, полностью погруженных в жидкость, и устойчивость

Если тело со средней плотностью ρ_T погружено в жидкость, имеющую плотность $\rho_ж$, то на него действуют вертикально вниз сила тяжести $F_\mathrm{T} = \rho_\mathrm{T} gV$ и вертикально вверх сила Архимеда $F_\mathrm{A} = \rho_ж gV$. Под действием этих сил тело будет перемещаться в направлении их результирующей. Если сила тяжести больше, чем сила Архимеда, то результирующая будет направлена вниз и, как говорят, тело будет тонуть. Если больше сила Архимеда, то результирующая будет направлена вверх и тело будет всплывать.

Нетрудно видеть, что $F_\mathrm{T} > F_\mathrm{A}$, когда $\rho_\mathrm{T} > \rho_ж$, и $F_\mathrm{A} > F_\mathrm{T}$, когда $\rho_ж > \rho_т$.

Таким образом, тело, полностью погруженное в жидкость, тонет, если его средняя плотность больше плотности жидкости, и всплывает, если его средняя плотность меньше плотности жидкости.

Если сила тяжести равна силе Архимеда, то их результирующая равна нулю и тело, погруженное в жидкость, не будет перемещаться, а будет находиться в безразличном плавании в той точке, в которую помещено. Такую ситуацию называют **гидроневесомостью**. Состояние гидроневесомости активно используют, в частности, при наземной подготовке комонавтов для работы в условиях космической невесомости (рис. 2.15).

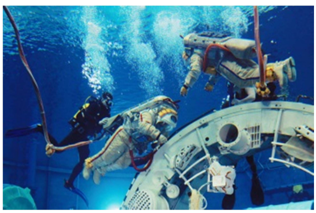


Рис. 2.15

Но даже при неподвижном центре инерции на тело могут действовать моменты сил, вращающие тело вокруг его центра инерции. В связи с этим возникает вопрос об устойчивости плавания тела в жидкости.

Устойчивым будем называть такое равновесное положение тела, когда вывод его из этого положения приводит к появлению моментов сил, возвращающих его к положению равновесия. Соответственно, неустойчивым будет положение тела, при выводе из которого возникающие моменты сил уводят его от положения равновесия.

В случае, когда центр тяжести тела находится ниже центра давления (рис. 2.16, *а*), при повороте тела, например, по часовой стрелке сила тяжести и сила Архимеда образуют пару сил, момент которой заставляет тело вращаться против часовой стрелки, возвращая его к положению равновесия (рис. 2.16, *б*).

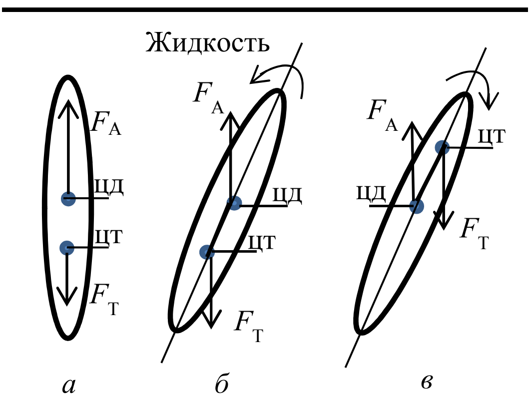


Рис. 2.16

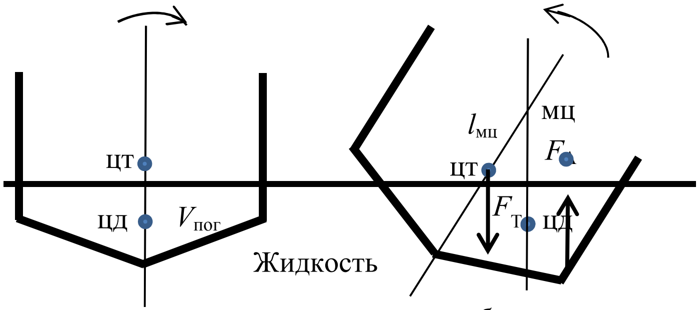
С другой стороны, если центр тяжести лежит выше центра давления (рис. 2.16, *в*), то поворот тела по часовой стрелке приводит к появлению совокупного момента сил тяжести и Архимеда, вращающего тело тоже по часовй стрелке, уводя его от положения равновесия.

Таким образом, можно констатировать, что плавание полностью погруженного в жидкость тела будет устойчивым, если его центр тяжести лежит ниже центра давления, и будет неустойчивым, если центр тяжести находится выше центра давления.

Во втором случае тело будет поворачиться до тех пор, пока цетр тяжести не окажется ниже центра давления и тело придет в состояние устойчивого плавания.

2.8.2. Особенности плавания тел, не полностью погруженных в жидкость

Для тела, не полностью погруженного в жидкость, как изображено на рис. 2.17, *а*, в соответствии с законом Архимеда величина выталкивающей силы F_A определяется объемом $V_{пог}$ только погруженной в жидкость части тела (рис. 2.17): $F_A = \rho_ж g V_{пог}$.



а *б*

Рис. 2.17

При этом условие плавания тела будет определяться равенством действующей на него силы тяжести $F_T = Mg$, где M – масса тела, и силы Архимеда: $F_A = F_T$. Из этого условия объем погруженной части тела определяется следующим соотношением: $V_{пог} = M/g$.

Основной особенностью плавания тел, не полностью погруженных в жидкость, является то, что при наклоне (крене) такого тела изменяется форма погруженной в жидкость его части (рис. 2.17, *б*). В результате происходит смещение центра давления в сторону бóльшей части погруженного объема, в то время как центр тяжести тела остается в прежней точке. Из-за этого смещения сила тяжести и сила Архимеда перестают лежать на одной прямой и образуют пару сил (рис. 2.16, *б*). Важным является то, что даже если центр тяжести тела лежит выше центра давления, эта пара сил создает восстанавливающий момент, возвращающий тело в исходное положение.

То есть тело, не полностью погруженное в жидкость, способно к устойчивому плаванию, даже если его центр тяжести лежит выше центра давления.

Именно это обстоятельство лежит в основе плавания судов.

Способность судна противостоять внешним кренящим силам и моментам, которые могут быть вызваны разными причинами (ветром, волнами и т. п.), называется *остойчивостью* судна.

Восстанавливающий момент силы тяжести и силы Архимеда, возникающий при крене судна, определяется *метацентрической высотой* $l_{мц}$ (рис. 2.17), которая является количественной мерой и критерием остойчивости судна.

Если тело является симметричным, то метацентром (мц) называется точка пересечения линии действия силы Архимеда с плоскостью симетрии тела. А расстояние между центром тяжести и метацентром называется метацентрической высотой $l_{мц}$. Чем больше метацентрическая высота, тем больше восстанавливающий момент и тем выше остойчивость судна.

При большом крене метацентр может оказаться ниже центра тяжести, метацентрическая высота станет отрицательной, восстанавливающий момент превратится в опрокидывающий и судно перевернется.

Рис. 2.18. Тримаран

Одним из способов увеличения восстанавливающего момента и тем самым повышения остойчивости судна является размещение на его бортах дополнительных поплавковых устройств и даже превращение его в тримаран (рис. 2.18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. – Л. : Машиностроение, 1976. – 504 с.
2. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – М. : Машиностроение, 1987. – 440 с.
3. Дейч, М. Е. Гидрогазодинамика / М. Е. Дейч, А. Е. Зарянкин. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
4. Кудинов, А. А. Техническая гидромеханика : учебное пособие / А. А. Кудинов. – М. : Машиностроение, 2008. – 368 с.

Учебное издание

БАШТОВОЙ Виктор Григорьевич
РЕКС Александр Георгиевич

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Механика жидкости и газа»
для студентов специальности
1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии
и энергетический менеджмент»

Редактор *А. В. Кочемарова*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 17.10.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,1. Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 100. Заказ 560.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.