УДК 517.39

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРВООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ КАК РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Студент гр. 104210 Шевцов А.Ю.
Канд. техн. наук, доцент Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

Множество первообразных функций

$$I_n = \int th^n ax\,dx,\ n = 0,1,2,\dots,\ a \in R, \tag{1}$$

образует рекуррентную функциональную последовательность I_n и методом интегрирования по частям представляется интегральным рекуррентным соотношением второго порядка

$$I_n = -\frac{th^{n-1}ax}{a(n-1)} + I_{n-2}. \tag{2}$$

Решение соотношения (2) получаем методом математической индукции. Чтобы это решение было однозначным, определим вначале первые два члена последовательности I_n непосредственно из выражения (1)

$$I_0 = \int th^0 ax\,dx = x,\ I_1 = \int thax\,dx = \frac{1}{a}chax.$$

Далее, полагая $n = 2,3,4,\dots$, из соотношения (2) последовательно получаем

$$I_2 = -\frac{thax}{1\cdot a} + x,$$

$$I_3 = -\frac{th^2ax}{2\cdot a} + \frac{1}{a}\ln|chax|,\dots.$$

Продолжая так далее по индукции, рекуррентную последовательность первообразных функций I_n представим в виде комбинаторных сумм

$$I_{2k} = x - \frac{1}{a}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{th^{2(k-\nu)+1}ax}{2(k-\nu)+1},\ I_0 = x, \tag{3}$$

$$I_{2k+1} = \frac{1}{a}\left(\ln|chax| - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{th^{2(k-\nu+1)}ax}{2(k-\nu+1)}\right),\ I_1 = \frac{1}{a}\ln|chax|. \tag{4}$$

Такое представление последовательностей первообразных функций служит цели снижения сложности вычислительных алгоритмов при проведении научных исследований, инженерных и экономических расчетов.