УДК 517.39

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕКУРРЕНТНО ВЫЧИСЛИМЫХ ИНТЕГРАЛОВ КОМБИНАТОРНЫМИ СУММАМИ

Студентка гр. 104210 Чепаченко Ю.И.
Канд. техн. наук, доцент Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

Важное место среди интегральных представлений функций занимают рекуррентно вычислимые функции, широко представленные в справочниках по интегральному исчислению. Одна из указанного множества функций представлена в виде интегрального рекуррентного соотношения второго порядка

$$I_n = \frac{2X^{n/2}}{n} + bI_{n-2}, \tag{1}$$

где

$$I_n = \int \frac{X^{n/2}\,dx}{x},\ I_{n-2} = \int \frac{X^{(n-2)/2}\,dx}{x},\ X = ax+b,\ a,b \in R,\ n = 0,1,2,\dots . \tag{2}$$

Чтобы решение соотношения (1) было однозначным, вычислим вначале I_0 и I_1, используя первую из формул (2)

$$I_0 = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,\ I_1 = \int \frac{X^{1/2}\,dx}{x} = 2X^{1/2} + b\int \frac{dx}{xX^{1/2}},$$

где

$$I_{-1} = \int \frac{dx}{xX^{1/2}} = \begin{cases} \dfrac{2}{b^{1/2}} Arth\left(\dfrac{X}{b}\right)^{1/2} & для\ b > 0, \\ \dfrac{2}{(-b)^{1/2}} arctg\left(\dfrac{X}{-b}\right)^{1/2} & для\ b < 0. \end{cases}$$

Далее, полагая $n = 2,3,\dots$, из соотношения (1) последовательно находим I_2, I_3, I_4, … Продолжая так далее, по индукции получаем

$$I_{2k} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{b^{\nu-1} X^{k-(\nu-1)}}{k-(\nu-1)} + b^k I_0,\ I_0 = \ln|x|, \tag{3}$$

$$I_{2k-1} = 2\sum_{\nu=1}^{k} \frac{b^{\nu-1} X^{2(k-\nu)+1}}{2(k-\nu)+1} + b^k I_{-1},\ I_{-1} = \int \frac{dx}{xX^{1/2}}. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой в том, что первообразные функции, представленные комбинаторными суммами (3) и (4), являются решениями интегрального рекуррентного соотношения (1).