УДК 165 + 510
DOI 10.25205/2541-7517-2017-15-4-19-29

Н. В. Михайлова

Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65, Минск, 220013, Беларусь

michailova_mshrc@mail.ru

КОНЦЕПЦИЯ ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ С КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОГО ПРАГМАТИЗМА

Основным источником концепции обоснования современной математики с точки зрения методологического прагматизма является сам процесс развития математических теорий. Рассматривается методологический прагматизм выбора направлений обоснования, реализующий проблемно-ориентированный подход, который опирается на многообразие когнитивных практик обоснования.

Ключевые слова: концепция обоснования, проблемно-ориентированный подход, современная математика, методологический прагматизм.

Согласно философской трактовке, понятие «концепция» – это системное описание определенного предмета исследования, включающее в себя четкую формулировку проблемы, способствующую ее пониманию и выявлению основной идеи. Разные системные способы обоснования математики действительно существуют, и с ними еще связано прояснение обосновательной ситуации в таких сложных математических теориях, как обоснование, например, алгебр обобщенных функций. Но остается открытым философский вопрос: насколько практически реализуема проблемная концепция обоснования математики, удовлетворяющая всем аспектам системности? Философская сущность концепции заключается в рассмотрении предмета исследования как открытой системы, допускающей расширение процедуры анализа оппозиций в соответствующих гносеологических предпосылках. Сила современной математики проявляется во взаимодействии аксиоматических, конструктивных и вычислительных методов, но иногда упускается из виду естественный процесс внутреннего вызревания сложных математических теорий, что является общей характеристикой систем. Наиболее естественной является концепция обоснования математики, согласующаяся с математической практикой решения задач: во-первых, благодаря тому, что она будет совпадать с мнением математического сообщества, а во-вторых, будет выявлять практические достоинства новых философско-методологических направлений обоснования математики. Даже выбор аксиом формализованных теорий определяется исключительно математиками с точки зрения перспектив решения, стоящих перед ними проблемно-ориентированных задач.

Но, поскольку общая методология программ обоснования математики, выдвинутых еще в начале XX в., с современной точки зрения признана философски неудовлетворительной, следует обратить критическое внимание на идею задачно-ориентированного подхода к обоснованию, в котором основным источником является процесс развития самой математики. В Новосибирской философско-математической школе, возглавляемой акад. Ю. Л. Ершовым и проф. В. В. Целищевым, такое направление философских исследований назвали «проблемно-ориентированное развитие математики», в котором по существу «предполагается развернутая постановка проблемной (задачной) ситуации в качестве определяющего обстоятельства в трактовке соотношения различных концепций философии математики (непротиворечивость, полнота, самоотносимость, интуиция, значение математических утверждений, строгость, алгоритм, конечное и бесконечное, существование, истина)» [Проблемно-ориентированный подход..., 2001. С. 5]. Даже несмотря на то, что предложенный подход представляет собой первый критический этап нового направления в философии современной математики, в ее конструктивной критике уже по сути есть практически реализуемая положительная программа, поскольку в математике, прежде всего, идет речь о решении задач, а хорошо сформулированная проблемная задача предопределяет результат, который не содержится в формулировке задачи. Образно говоря, «абстрактные высоты» математики хорошо обоснованы при надежных «обеспеченных тылах». Поэтому в философских исследованиях по обоснованию математики имеет смысл возвращаться к практическим задачам, которые собственно напоминают о цели этого исследования, например, осмыслении и понимании новых математических объектов, которые не вполне согласуются с пониманием природы.

Проблемно-ориентированное обоснование по сути отражает взгляд на проблему обоснования работающего математика, которое отличается от классической философии математики, поскольку исследование обоснования в терминах задачи многоаспектно в том смысле, что задача может быть сформулирована в уже известных терминах, а может возникнуть проблемная ситуация, для которой нет еще подходящих математических понятий. С точки зрения гносеологического видения развития математики, целью предпринятого философского исследования обоснования математики является концептуальное осмысление возникающих новых математических проблем как проблемно-ориентированного комплекса. Математика представляет собой систему понятий, теорем и формул, объединенных в единое целое выполнением общей функции, не сводимой к функциям ее элементов, гносеологическая специфика которой состоит в том, что элементы системы, сформированные в рамках определенной математической теории, оказываются затем пригодными и для других целей. Хотя специальные исследования проблемного подхода к строению математического знания пока все еще немногочисленны, следует отметить особую методологическую установку направленности системного мышления на целостное воспроизведение исследуемого объекта. Для математики методологическая суть проблемно-ориентированного обоснования означает, что никакая часть математики не обладает особыми преимуществами, так как каждое направление обоснования основано на поисках именно тех задач, которые демонстрируют особую надежность своих решений, свободных от возможных противоречий.

Заметим, что уже при становлении математических теорий стало проявляться внутренне присущее ему специфическое противоречие между способностью получать конкретные практически важные результаты и философскими трудностями объяснения или обоснования его новых понятий и применяемых методов. Отметим также, что математический анализ практически опирается на теорию действительных чисел, изучение которых привело математику к рассмотрению бесконечных множеств. «Априорность свойств вещественных чисел, т. е. тот факт, что они рассматриваются в качестве исходных для построения их теории, наводит на мысль считать их аксиомами, которые определяют само множество вещественных чисел. Однако этот подход не является удовлетворительным, поскольку понятие натурального числа неявно присутствует в законах логики, на которые мы опираемся» [Русаков, Чубариков, 2006. С. 39]. Идеал обоснования математики можно интерпретировать как специальную методологическую деятельность по выявлению гносеологических установок, которые опираются на понимание относительности противоположных подходов в реализации надежности математических теорий и на выработку таких методологических средств проблемно-ориентированного подхода, которые, по возможности, исключают появление полярных противопоставлений в становлении математики. Говоря об обосновании современной математики, следует отметить, что обоснование носит системный характер, поскольку включение в систему обоснования нового методологического подхода придает устойчивость элементам системы, а при этом актуализируется методологический прагматизм выбора направлений обоснования, реализующий проблемно-ориентированный подход, который опирается на многообразие когнитивных практик как методологической деятельности в сфере получения и применения математического знания.

Философская сущность нового подхода к проблеме обоснования математики адекватно отражается в термине «концептуальный прагматизм», но при методологическом анализе конкретной области математики будем активно пользоваться термином «методологический прагматизм», отражающим прагматический характер выбора между различными направлениями обоснования математики в системной методологии. Методологический прагматизм математики задает в совокупности проблемное поле современных исследований по обоснованию математики, а поскольку проблема обоснования современной математики до сих пор не решена, то попытаемся сузить эту проблему к задаче обоснования математического анализа, сосредоточившись на проблемно-ориентированном обосновании. Поэтому в дальнейшем будем в основном рассматривать только проблемные задачи математического анализа, а с точки зрения эпистемологической рефлексии еще и проблемные задачи современного функционального анализа. Теории современного математического анализа включают в себя проблемы и задачи вещественного, комплексного и функционального анализа, сложность которых реально отражается в многочисленных содержательных контрпримерах в математическом анализе, используемых в проблемном обучении математике. Математическое знание является целостной системой в том смысле, что эта система описывает мыслительную деятельность системного мышления по обоснованию математических теорий, исходя из методологической структуры системного подхода, включая методологический прагматизм гносеологических установок на природу математического знания.

Для проблемно-ориентированной задачи из функционального анализа укажем на известную ограниченность стандартной теории распределений применительно к нелинейным задачам, что послужило практической причиной использования системной методологии и применения методологического прагматизма к обоснованию теории новых обобщенных функций. Когда Шварцем было показано, что ввести ассоциативное и коммутативное умножение в пространстве распределений невозможно, то в этом направлении усилия многих математиков были направлены на выделение таких классов пар распределений, для которых можно достаточно корректно определить их произведение. Методологический прагматизм в задаче обоснования умножения обобщенных функций основан на интуитивном введении вместо распределений новых математических объектов, которые, обладая свойствами распределений, допускают еще и формально корректную операцию умножения, при которой распределения естественно вкладываются в классы новых объектов, с платонистской верой в их существование. Для таких конструктивно введенных операций умножения используются, например, классы «новых обобщенных функций», построенные французским математиком Жаном-Франсуа Коломбо [Colombeau, 1985]. На основе анализа когнитивных практик при решении дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, в философско-методологическом контексте происходящих изменений в обосновании математического анализа, характеризующихся стремлением к синтезу, выявилась необходимость введения операции произведения обобщенных функций. В частности, произведение функции, разрывной в точке, как обобщенной функции, и дельта-функции уже не принадлежит классическому пространству обобщенных функций, что приводит к целому ряду неудобств при исследовании задач дифференциальных уравнений с новыми обобщенными функциями, содержащими произведение обобщенной и разрывной функций, но наиболее существенным оказывается то, что решением дифференциального уравнения в новой интерпретации является не разрывная классическая функция, а обобщенная функция Коломбо.

Проблемно-ориентированный подход обоснования математики, даже на примере абстрактных объектов математического анализа, фиксирует также, каков должен быть содержательный уровень математических теорий и как концепция обоснования математики характеризуется системной целостностью. Системность обосновательных процедур означает, что они представляют связное, неразрывное целое, в котором целостность концепции обоснования математики вытекает из философского единства и качественного многообразия современной математики и еще того, что обе эти важные характеристики есть проявление ее самоорганизации. В современном математическом анализе широко используется синтез разных подходов к пониманию новых проблемно-ориентированных задач. Конкретный математический пример проблемно-ориентированного синтеза очень разных направлений и разделов математики, таких как теория чисел, математический анализ и дифференциальные уравнения, демонстрирует алгебра обобщенных функций Коломбо, в которой практически вводится произведение любых двух элементов из классического пространства обобщенных функций, хотя в общем случае это произведение является уже обобщенной функцией Коломбо и не принадлежит классическому пространству распределений. Даже говоря о гносеологических предпосылках целостности обоснования, заметим, что нельзя отвлекаться от философской ограниченности исследовательских возможностей, когда проблемно-ориентированный синтез направлений обоснования приобретает значение системной целостности, поскольку целое – это отношение, которое не может быть законченным, а будучи реализованным, оно открывается для изменения во взаимодействии сторон.

Ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему достоверных положений обоснования, не учитывая характер их взаимодействия, т. е. в них, по существу, не выдерживался принцип «логического консенсуса», одинаково приемлемый и для формалиста, и для интуициониста. Методологический прагматизм в обосновании современной математики проявляется не только в признании необходимости разработки новых концептуальных подходов к обоснованию, но и во «вторичной концептуализации» работающих направлений обоснования, например, выявлении сильных сторон направлений формализма и интуиционизма. Исходя из когнитивных практик современной науки, Ю. М. Батурин считает, что «научный интерес у ученого может возникнуть более чем к одному направлению. Смена научных направлений определяется большим интересом к последующему по сравнению к предыдущим. Однако возможно и регулярное возвращение к осваиваемым ранее направлениям» [2015. С. 70]. Надо сосредоточиться на том, как интерпретировать эти направления в целостной системе обоснования математического знания с прагматической целью сохранения наиболее перспективных философско-теоретических конструкций для проблемно-ориентированного обоснования, критически рассматривая их как первичные идеи обоснования новых теорий математического анализа.

Основная идея методологического прагматизма обоснования математики находит свое выражение в критике идеи абсолютного обоснования и прагматической аргументации, состоящей в том, что используемые направления обоснования считаются продуктивными, если они соответствуют эпистемологически оправданному и обоснованному критерию. Однако с точки зрения проблемно-ориентированного обоснования математики проблема состоит еще в том, что никто из профессиональных математиков изначально не придумывает в голове формальные доказательства, а также неясно, что такое «содержательное утверждение», которое допускает различные философско-математические интерпретации, еще и расширяющиеся по ходу практического исследования. Более того, по сути, сколько-нибудь содержательная часть современной математики не является полностью формализованной, хотя для той ее части, которая формализована, ее непротиворечивость нельзя окончательно доказать в методологически ограничительных рамках самой формализованной системы. Заметим, что в реальности есть много объектов, которые в философском контексте методологического прагматизма мы отождествляем с задачами. Однако при узкодисциплинарном подходе к отдельным областям современной математики эффекты системной методологии при решении задач могут быть вообще не обнаружены, поскольку они методологически выявляются лишь при проблемно-ориентированном подходе к работающим направлениям обоснования различных математических теорий, опираясь на методологический прагматизм, в котором категориальные смыслы рассматриваются как развивающиеся целостности.

С точки зрения математического знания проблемно-ориентированное обоснование математики включает в себя несколько аспектов: во-первых, доведение математических теорий до принятого современного уровня строгости; во-вторых, полноценная аргументация существования новых математических объектов; в-третьих, учет саморазвития математических теорий при решении конкретных задач и избавления их от возможных противоречий. Заметим, что проблемная ситуация обычно создается путем формулирования теоретических утверждений в виде задач, для решения которых необходим методологический прагматизм при анализе и трансформации имеющихся знаний. В истории становления математики надежными представлялись математические теории, которые соответствовали различным уровням теоретической строгости, формирующимся под влиянием критической познавательной установки, направленной на практическое решение математических задач. Но, в общефилософском плане обоснование математики необходимо еще и для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств. Следует заметить, что многообразная математическая практика не обусловлена философскими программами обоснования. В. В. Целищев и А. В. Хлебалин четко отмечают: «Философская программа есть некоторого рода крайность, призванная в определенных случаях выявить более выпукло то, что содержится неявно в соответствующей практике» [2014. С. 8]. Философско-методологическая суть проблемы обоснования состоит в том, что математическое знание требует еще внешнего обоснования, но в силу необходимости математики, например, в естественно-научных приложениях она не может быть обоснована ничем внешним. Парадоксальность математической необходимости состоит еще в том, что для ее аргументации, вообще говоря, не требуется обращения к внешнему опыту. Поэтому задача абсолютного обоснования математики теряет методологический смысл, хотя это вовсе не предполагает отказа от самой идеи обоснования.

Философская сущность используемого проблемно-ориентированного подхода в концепции обоснования современной математики, предполагающего общее акцентированное внимание на проблемной задачной ситуации, отражает позицию работающих математиков и может быть методологически прояснена следующим образом. В действительности математикам приходится исследовать теоретические и практические задачи, сформулированные в рамках одной и той же системы, но одна и та же практическая задача заставляет иногда строить разные формальные системы. Востребованность методологического прагматизма проявляется здесь в том, что в одной из формальных реконструкций конкретной практической задачи можно доказать, что нужный ответ получить нельзя, а в другой формальной реконструкции этой же практической задачи искомый ответ получить уже можно. Так, например, философский анализ обоснования математики может потребовать различных точек зрения по поводу таких фундаментальных понятий математики, как число и множество. Спецификой проблемно-ориентированного подхода является то, что сам процесс исследования обоснования современной математики – сложная система, стремящаяся также соединить в системной целостности различные направления в обосновании в системном объекте. Сложность заключается в том, что в современной философии математики в ее непротиворечивых формальных системах, содержащих арифметику, есть утверждения, истинность которых нельзя ни подтвердить, ни опровергнуть. Это отразилось на генезисе понимания истины и существования в различных направлениях обоснования математики. Заметим, что ценность чистого доказательства существования состоит в том, что, именно благодаря этому доказательству, математические построения объединяются основной когнитивной идеей, вследствие чего методологический прагматизм «экономии мысли» выявляет еще и смысл доказательства существования.

В общем контексте проблемно-ориентированного подхода к обоснованию математики наиболее трудный этап состоит в выявлении тех направлений обоснования, которые соответствуют современному этапу развития математики и могут участвовать в процессе обоснования. В основе любой конструктивной критики должна быть заложена некоторая, пусть даже гипотетическая, но положительная программа. С точки зрения методологического прагматизма ситуация с обоснованием математики сейчас такова, что даже если идеи, которые предлагались для обоснования, не проходят, то они сейчас как-то практически модифицируются, поскольку новых парадоксов в математике пока не появилось. Мечта философов о научности отчасти построена на стихийной вере в возможность обоснования математического знания. Поэтому проблемно-ориентированное обоснование рассматривается как особый принцип деятельности, но каноны математической деятельности не дают философским сомнениям в этом подходе перерасти в сомнения о необходимости философской деятельности в области математики. Напомним, что предыдущие программы обоснования математики – логицизм, формализм, интуиционизм – так и не достигли желаемой цели, но это не означает, что проблема обоснования уже ушла из современной математики.

Список литературы

Батурин Ю. М. Когнитивные практики современной науки // Социология науки и технологий. 2015. Т. 6, № 3. С. 66–70.

Проблемно-ориентированный подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм / Под ред. В. В. Целищева. Новосибирск: Наука, 2001. 154 с.

Русаков А. А., Чубариков В. Н. О двух подходах к обоснованию вещественных чисел // Математика в высшем образовании. 2006. № 4. С. 37–44.

Целищев В. В., Хлебалин А. В. Интуиция, формальная онтология и семантика знаков в формализме Гильберта // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Философия. 2014. Т. 12, вып. 3. С. 5–11.

Colombeau J. F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: Elsevier Science Publ. B.V., 1985. 281 p.

Материал поступил в редколлегию 06.09.2017

N. V. Michailova

Belarusian National Technical University
65 Independence Ave, 220013, Minsk, Belarus

michailova_mshrc@mail.ru

JUSTIFYING CONTEMPORARY MATHEMATICS FROM THE CRITICAL ANGLE OF METHODOLOGICAL PRAGMATISM

From the position of methodological pragmatism, the main source of the justification conception for contemporary mathematics is the process of the development of mathematical theories. The paper considers methodological pragmatism of choosing the directions of justification. It uses the problem-oriented approach based on a variety of cognitive justification practices.

Keywords: conception of justification, problem-oriented approach, contemporary mathematics, m methodological pragmatism.

References

Baturin Ju. M. Kognitivnye praktiki sovremennoi nauki [Cognitive practicians of modern science]. *Sociology of Science and Technologies*, 2015, vol. 6, no. 3, p. 66–70. (In Russ.)

Colombeau J. F. *Elementary introduction to new generalized functions*. Amsterdam, Elsevier Science Publ. B.V., 1985, 281 p.

Problemno-orientirovannyi podhod k nauke: Filosofiya matematiki kak konceptualnyi pragmatism [*Problem-Oriented Approach to Science:*

Mathematics Philosophy as Conceptual Pragmatism]. V. V. Tselishchev (ed.). Novosibirsk, Nauka, 2001, 154 p. (In Russ.)

Rusakov A. A., Chubarikov V. N. O dvuh podhodah k obosnovaniyu veschestvennyh chisel [About two approaches to justification of real numbers]. *Mathematics in the Higher Education*, 2006, no. 4, p. 37–44. (In Russ.)

Tselischev V. V., Khlebalin A. V. Intuitsiya, formalnaya ontologiya i semantika znakov v formalizme Gilberta [Intuition, formal ontology and signs semantics in Gilbert's formalism]. *Vestnik of Novosibirsk State University. Series*: *Philosophy*, 2014, vol. 12, no. 3, p. 5–11. (In Russ.)