Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное электронное издание

Минск 2011

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.1я7
Э 45

Авторы:
Н. А. Микулик, Т. С. Яцкевич, И. Н. Катковская, Е. А. Герасимова, Л. А. Раевская, Т. И. Чепелева

Рецензенты
А. Н. Исаченко, М. Н. Покатилова

Э 45 Курс лекций и практикум по теории функций комплексного переменного/ Н.А. Микулик [и др.]. – Минск: БНТУ, 2011. – 89 с.

В данном курсе лекций излагается теоретический материал по избранным главам теории функций комплексного переменного (ТФКП), который предусмотрен программой по математике для студентов машиностроительных специальностей втузов. В каждой из 6 лекций приведено достаточное количество задач и примеров с подробными решениями и иллюстрациями.

Также подобраны материалы для 4 практических занятий по наиболее важным темам. Все примеры снабжены ответами. В работе имеется еще и типовой расчет по теории функций комплексного переменного.

Данное пособие предназначено для студентов машиностроительных специальностей, а также оно будет полезно для преподавателей, читающих лекции и проводящих занятия по ТФКП. Избранная авторами методика изложения делает пособие вполне пригодным для самостоятельного овладения предметом.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: tchepeleva@gmail.com
http://www.bntu.by/fitr-vm1.html
Регистрационный № ЭИ БНТУ/ФИТР48-5.2011

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ № 1

§ 1. ОБЛАСТИ И ИХ ГРАНИЦЫ

Пусть имеем множество *E* точек $z = x + iy$ комплексной плоскости *Z*.

Точка z_0 называется **внутренней точкой множества** *E*, если все точки достаточно малого круга с центром в точке z_0 принадлежат *E*.

Точка z_1, принадлежащая или не принадлежащая множеству *E*, называется **граничной точкой** множества *E*, если любой круг с центром z_1 содержит точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие *E*.

Множество всех граничных точек множества *E* называется **границей множества** *E*.

Точка *z* называется **внешней точкой множества** *E*, если вместе с этой точкой множеству *E* не принадлежит и некоторый круг с центром в *z*.

Примеры

1. Множество $|z| < 1$ содержит только внутренние точки. Окружность $|z| = 1$ – граница этого множества.

2. Множество $|z| > 1$ состоит только из внутренних точек.

3. Множество $1 \le |z - i| \le 2$ содержит внутренние и граничные точки.

Областью называется множество *D* точек плоскости *Z*, обладающее следующими свойствами:

- *D* состоит из одних внутренних точек (свойство **открытости**);
- любые две точки, принадлежащие *D*, можно соединить непрерывной линией, целиком состоящей из точек *D* (свойство **связности**).

Множество точек, состоящее из области *D* и ее границы, называется **замкнутой областью** и обозначается $\overline{D}$.

Окрестностью точки z_0 на плоскости *Z* называется произвольная область, содержащая точку z_0. Под ε (окрестностью конечной точки z_0) будем понимать круг $|z - z_0| < \varepsilon$, где ε – радиус. Точка $z = \infty$ называется **бесконечно удаленной точкой.**

Примеры

1. $|z| > 1$; $|z| < 1$ – незамкнутые области.

2. $1 \le |z - i| \le 2$ не является областью (нарушено условие открытости).

3. $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$ не является областью, так как нарушено условие связности.

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – вещественные непрерывные функции переменной t, $t_1 \le t \le t_2$. Тогда уравнение $z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, является **параметрическим уравнением непрерывной кривой *L*** на комплексной плоскости.

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, причем $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$, $t_1 \le t \le t_2$, то кривая L называется **гладкой.** Замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, называется **замкнутым контуром** или просто **контуром**.

В дальнейшем будем считать, что границы рассматриваемых областей состоят из конечного числа замкнутых контуров, разрезов и точек.

Число частей, из которых состоит вся граница области D, называется **порядком связности** этой области (рис. 1).

Рис. 1

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ФКП). ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пусть на плоскости Z задано произвольное множество точек E (оно может содержать и точку $z = \infty$).

Говорят, что на множестве E **задана функция**

$$w = f(z), \qquad (1)$$

если каждой точке $z \in E$ поставлены в соответствие одна или несколько точек w. В первом случае функция называется **однозначной**, а во втором – **многозначной**.

Множество E называется **множеством определения** функции $f(z)$, а множество K всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E – **множеством изменения** функции $f(z)$.

Если E и K – области, то говорят об области задания и области значений функции $w = f(z)$. Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то $w = f(z) =$ $= f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, а

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z). \qquad (2)$$

Таким образом, задание функции (1) комплексного переменного равносильно заданию двух функций (2) двух действительных переменных.

Геометрически это можно представить в виде (рис. 2):

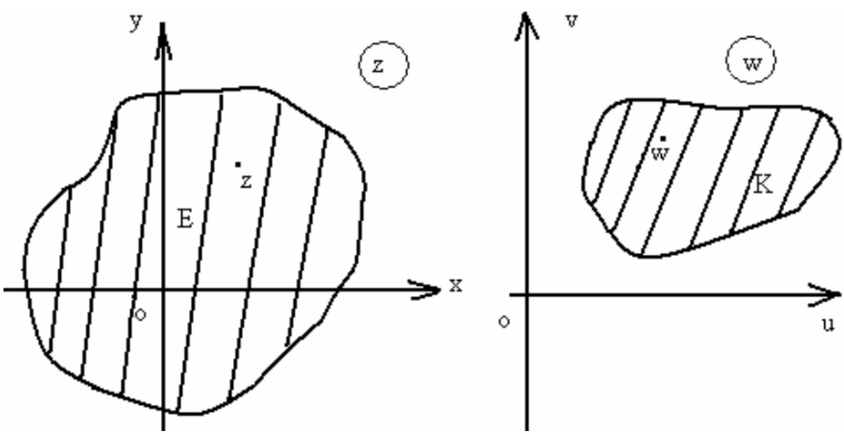

Рис. 2

Это означает, что между точками множества *E* на плоскости *xOy* и точками множества *К* на плоскости *uOv* функция $\omega = f(z)$ устанавливает соответствие. Или функция $w = f(z)$ отображает точки множества *E* в точки множества *К*.

В этом случае точки множества *К* называются **образами** соответствующих точек множества *E*.

Если каждая точка $z \in E$ при помощи функции $w = f(z)$ отображается в единственную точку $w \in K$ и, наоборот, каждая точка $w \in K$ отображается обратной функцией $z = \varphi(\omega)$ в единственную точку множества *E*, то говорят, что между множествами *E* и *К* установлено **взаимно-однозначное соответствие**.

В таком случае функции $w = f(z)$ и $z = \varphi(w)$ называются **однозначными**, а отображение **однолистным**.

Пример

Пусть $w = z^2$. Найти изображение линии $x = R\cos t$; $y = R\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ в плоскости *w*.

Решение. $z = x + iy = R\cos t + iR\sin t = \mathrm{Re}^{it}$. $w = R^2 e^{2it}$. $|w| = R^2$; $\arg w = 2t$. При $0 \le t \le \pi$ $0 \le \arg w \le 2\pi$ (рис. 3).

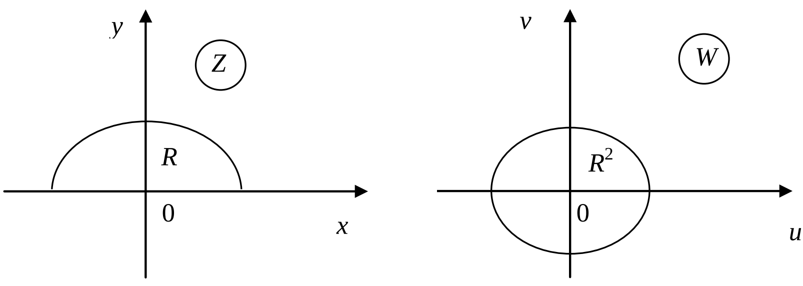

Рис. 3

Пусть функция $w = f(z)$ – однозначная, определена для любых $z \in E$, исключая, быть может, точку z_0.

Число $A \neq \infty$ называется **пределом функции** $f(z)$ в точке z_0 $\left(\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A\right)$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

$A = \infty$ называется **пределом функции** $f(z)$ при $z \to z_0 \left(\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty\right)$, если для $\forall R > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что из неравества $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z)| > R$.

Пусть $A = B + iC$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, причем $z_0 = x_0 + iy_0$.

Теорема. Если существует $\lim\limits_{z = z_0} f(z) = A = B + iC$, то существует

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C.$$

Доказательство теоремы предоставляем читателю.

Из теоремы следует, что все теоремы о конечных пределах для функций действительного переменного справедливы для ФКП.

Пусть теперь $f(z)$ определена в точке z_0 и ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в конечной точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Если $z - z_0 = \Delta z$, тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$. На основании теоремы имеем, что если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = B + iC = f(z_0)$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = B = u(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = C = v(x_0, y_0)$.

Следовательно, если $w = f(z)$ непрерывна в конечной точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Известные теоремы для непрерывности функции действительного переменного справедливы и для ФКП.

Если функция непрерывна в каждой точке множества, то она называется **непрерывной на этом множестве**. **Точками разрыва** называют точки, в которых нарушаются условия непрерывности функции.

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФКП

Под элементарными функциями ФКП аргумента $z = x + iy$ понимаются обычно следующие функции:

$f(z) = az + b,\ (a, b \in Z)$ – линейная функция;

$f(z) = z^n$ (n – целое) – степенная функция;

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ (a, b, c, d \in Z)$ – дробно-линейная функция;

$f(z) = \dfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$ – общая рациональная функция;

$f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ – функция Жуковского,

а также показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические функции и обратные тригонометрические функции.

1. Показательная функция e^z для любого комплексного числа $z = x + iy$ определяется формулой

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,. \tag{3}$$

Положив в (3) $y = 0$, видим, что для действительных $z = x$ имеем $e^z = e^x$. При $x = 0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y\,.$$

Для показательной функции справедливы соотношения:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}; \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}.$$

Докажем первую из этих формул:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}\cdot e^{iy_1}\cdot e^{iy_2}=$$

$$=e^{x_1+x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)\cdot(\cos y_2+i\sin y_2)=$$

$$=e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)\right]=$$

$$=e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right]=e^{x_1+x_2}\cdot e^{i(y_1+y_2)}=$$

$$=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и вторая формула.

Функция e^z является периодической с чисто мнимым периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi ki}=e^{x+i(y+2\pi k)}=e^x(\cos(y+2\pi k)+i\sin(y+2\pi k))=$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

Из формулы (3) видно, что модуль показательной функции e^z равен e^x, а аргумент – y, т.е.

$$\left|e^z\right|=e^x;\ \arg e^z=y; \qquad \operatorname{Arg} e^z=y+2\pi k.$$

2. Логарифмическая функция $w=\operatorname{Ln} z$ определяется как функция, обратная показательной. Число w называется **логарифмом числа** z, если $e^w=z$.

Положив $z=re^{i\varphi}$, $w=u+iv$, получим $e^{u+iv}=re^{i\varphi}$. Отсюда $e^u=r$; $v=\varphi+2\pi k$, $u=\ln r$, где $\ln r$ – натуральный логарифм положительного числа r. Следовательно,

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad (4)$$

где k – любое целое число.

Эта формула показывает, что логарифмическая функция комплексного аргумента имеет бесконечно много значений. При $k = 0$ будем иметь так называемое **главное значение логарифма**, которое обозначается символом $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Если $z = x > 0$, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z| = \ln x$.

Из формулы (4) следует, что

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\, z^n = n\ \mathrm{Ln}\, z;$$

$$\mathrm{Ln}\, z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ \mathrm{Ln}\, z.$$

3. Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$
$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad (5)$$

Для действительных $z = x$ эти определения дают тригонометрические функции действительного аргумента:

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}(\cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x) = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x.$$

Функции (5) сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного аргумента. Так, например, из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$, функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π, функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ – период π. Все известные тригонометрические тождества остаются в силе и для тригонометрических функций (5).

В отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше единицы.

4. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим.

Число w называется **арксинусом числа** z (обозначение $w = \operatorname{Arcsin} z$), если $z = \sin w$:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

или

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно e^{iw}, найдем:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}\ ,$$

откуда

$$iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

и

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i\ \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Многозначность этой функции определяется двузначностью корня и бесконечнозначностью логарифма.

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arccos} z = -i\ \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = -i \operatorname{Ln}\left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\ \operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz};$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\ \operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}.$$

5. Гиперболические функции

$$\mathrm{shz} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{chz} = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$
$$\mathrm{thz} = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \mathrm{cthz} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{6}$$

Функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$; $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi. Опираясь на формулы (5) и (6), легко получить следующие формулы, выражающие гиперболические функции через тригонометрические:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz;$$
$$\operatorname{ch} z = \cos iz;$$
$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz;$$
$$\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

6. Общая степенная функция

$$w = z_1^{z_2} = e^{\operatorname{Ln} z_1^{z_2}} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}.$$

ЛЕКЦИЯ № 2

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ФКП. УСЛОВИЯ КОШИ – РИМАНА

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности конечной точки z. Выберем в этой окрестности точку $z+\Delta z$, тогда Δw будет приращением функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z+\Delta z$: $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Если существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

при $\Delta z \to 0$, то

1) функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z;

2) этот предел называется **производной функции** $f(z)$ в точке z и обозначается

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{7}$$

Из определения $\Delta w = f'(z)\Delta z + \gamma\,\Delta z$, где $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Следовательно, при $\Delta z \to 0$ $\Delta w \to 0$, т.е. из дифференцируемости функции в некоторой точке следует непрерывность функции в этой точке.

Обратное утверждение, как и для функции действительной переменной, в общем случае неверно.

Выразим приращение функции Δw, функции $f(z)$ через приращение функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тогда $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = [u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] = [u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)] = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)$, где $\Delta u(x, y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)$, $\Delta v(x, y) = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)$.

Следовательно, формулу (7) можно переписать так:

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{8}$$

Выясним теперь при каких условиях ФКП будет дифференцируемой в данной точке. Здесь имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы:
1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y);
2) в точке (x, y) выполнялись **условия Коши–Римана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9}$$

При этом для производной $f'(z)$ справедлива формула

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует и конечен при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z любым образом (т.е. этот предел не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю).

Пусть сначала точка $z + \Delta z$ приближается к z по прямой, параллельной действительной оси, т.е. пусть $\Delta z = \Delta x \to 0$. В этом случае формула (8) дает следуещее:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

(т.к $f'(z)$ существует по условию, то из (10) следует существование $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$).

Если же точка $z+\Delta z$ приближается к z по прямой, параллельной мнимой оси, то $\Delta z = i\Delta y \to 0$ и формула (8) дает следующее:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (11)$$

Но предел (7) не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, а потому (10) и (11) должны быть равны. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

отсюда и следуют равенства (9), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть теперь выполняются равенства (9) и $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y). Это означает, что

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha|\Delta z|,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Delta y + \beta|\Delta z|,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha = 0;\quad \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta = 0$ или $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha = 0;\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\beta = 0.$

Используя (8), Δw можно представить в виде $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) =$ $= \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\alpha + i\beta)|\Delta z| = |$ используя условия Коши–Римана, все частные производные по y заменим частными производными по $x| = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \eta|\Delta z| =$

$=\Big|$ здесь $\quad \eta = \alpha + i\beta \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0 \ \Big| = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\Delta x + i\Delta y\right) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(i\Delta x - \Delta y) + \eta\,|\Delta z| = \Big|$

здесь $\quad i\Delta z = i\Delta x - \Delta y \ \Big| = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta z + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta z + \eta|\Delta z|$. Следовательно,

$\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} + \eta$. А это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, что и требовалось доказать.

Для функций комплексного переменного сохраняются все правила дифференцирования функции действительного переменного:

1) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$;

2) $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;

3) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$;

4) $f[g(z)]' = f'[g(z)]g'(z)$.

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в области**, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Пример 1

1. Рассмотрим функцию $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u(x,y) = e^x\cos y$; $v(x,y) = e^x\sin y$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$; $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$, откуда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$, откуда $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Видим, что условия Коши–Римана выполняются, следовательно, функция дифференцируема, причем

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

2. Рассмотрим функцию $\bar{z} = x - iy$; $z \neq 0$; $u = x$; $v = -y$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$. Условия Коши–Римана не выполняются, функция не дифференцируема.

Пример 2

Установить, является ли функция $f(z) = \frac{1}{z}$ дифференцируемой ($z \neq 0$).

Решение. Преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i ,$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Проверим выполнение условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\left(x^2 + y^2\right) - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{-\left(x^2 + y^2\right) + 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)}.$$

Следовательно, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$.

Аналогично

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\[2ex]\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Условия выполнены. Функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ является дифференцируемой ($z\neq 0$).

§ 5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФКП

Введем понятие аналитической функции.

Функция $f(z)$ однозначная и дифференцируемая в каждой точке области D называется **аналитической** (иначе, **регулярной** или **голоморфной**) в этой области.

Функция $f(z)$ называется **аналитической в конечной точке** z, если она является аналитической в некоторой окрестности точки z.

Точки плоскости z, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми точками этой функции**.

Примеры

$w=e^z$ – аналитическая во всей плоскости;

$w=\bar{z}$ – нигде не аналитична.

Убедиться в этом предоставляем читателю.

Дифференциалом $df(z)$ аналитической функции $f(z)$ в конечной точке z называется главная линейная по отношению к Δz часть приращения Δw этой функции:

$$df(z)=f'(z)dz.$$

Выясним теперь, любая ли функция двух переменных x и y может служить действительной или мнимой частью некоторой аналитической функции. Пусть дана функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

аналитическая в некоторой области D. Следовательно, везде в D выполнены условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируем эти равенства соответственно по x и по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

так как
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

то
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Видим, что функции u и v должны удовлетворять одному и тому же дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка, называемому **уравнением Лапласа:**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется **гармонической функцией.** Из изложенного следует, что **действительная** и **мнимая** части аналитической функции являются **гармоническими функциями.**

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши–Римана, называются **взаимно сопряженными**.

Пусть $u(x, y)$ – гармоническая функция. Построим аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

На основании условий Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$. Отсюда $v=\int \frac{\partial u}{\partial x}dy+\varphi(x)$.

Т.к. $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, то $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\varphi'(x)=g(x)$ и $\varphi(x)=\int g(x)dx+C$.

Пример

Построить аналитическую функцию, для которой функция $u(x,y)=x^2-y^2+2x$ является действительной частью (в том, что функция $u(x,y)$ является гармонической функцией, легко убедиться проверкой).

Решение. В силу условий Коши–Римана имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+2$. Интегрируя это равенство по y, получим $v(x,y)=\int(2x+2)dy=$ $=2xy+2y+\varphi(x)$. Из равенства $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ получаем $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=2y.$

Отсюда $\varphi'(x)=0$ и $\varphi(x)=C$, где C – произвольная постоянная.

Тогда гармоническая функция, сопряженная с данной, будет иметь вид

$$v(x,y)=2xy+2y+C.$$

Искомая аналитическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} f(z)&=u(x,y)+iv(x,y)=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y+C)=\\ &=\left(x^2+2ixy-y^2\right)+(2x+2yi)+iC=\\ &=(x+iy)^2+2(x+iy)+C_i=z^2+2z+Ci. \end{aligned}$$

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в D, а $z_0\in D$; $f'(z_0)\neq 0$. Функция $f(z)$ отображает точку z_0 плоскости Z в точку $w_0=f(z_0)$ плоскости W (рис. 4).

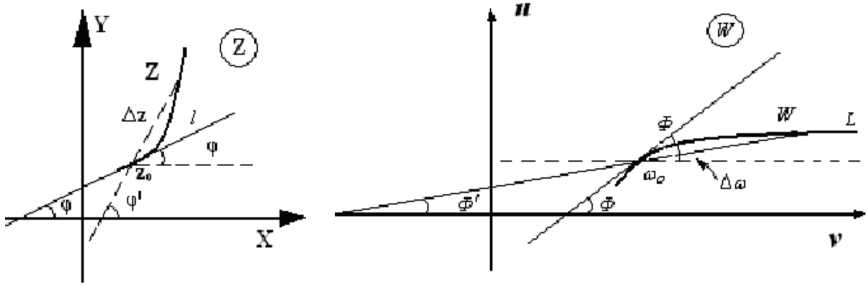

Рис. 4

Через точку z_0 проведем какую-нибудь кривую l, которая отобразится в кривую L плоскости W, проходящую через w_0. На кривой l возьмем произвольную точку $Z = z_0 + \Delta z,$ которая отобразится в точку $W = w_0 + \Delta w.$

Вводим в рассмотрение углы φ и Φ. По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}.$

Одно комплексное равенство эквивалентно двум действительным:

$$\left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k, \tag{12}$$

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\arg \Delta w - \arg \Delta z \right) = \Phi - \varphi. \tag{13}$$

Отметим, что $\left| f'(z_0) \right|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и W к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками z_0 и Z. В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 предел (12) не зависит от стремления Δz к нулю, т.е. от выбора кривой l. Следовательно, предел (12) один и тот же во всех направлениях, выходящих из точки z_0. По этой причине $\left| f'(z_0) \right|$ можно рассматривать геометрически как **коэффициент растяжения в точке** z_0 **при отображении** $w = f(z)$. При этом если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояние между точками при отображении $w = f(z)$ увеличивается и происходит собственно растяжение плоскости, если же $|f'(z_0)| < 1$, то отображение приводит к сжатию.

Из (13) имеем: $\arg f'(z_0) = \alpha = \Phi - \varphi$. Отсюда $\Phi = \varphi + \arg f'(z_0)$.

Значит, $\arg f'(z_0)$ есть **угол, на который нужно повернуть касательную к кривой** l **в точке** z_0 **для того, чтобы получить направление касательной к кривой** L **в точке** w_0**.**

В силу аналитичности $f(z)$ в точке z_0 угол поворота α один и тот же для всех кривых *l*, проходящих через z_0.

Следовательно, аналитическое отображение обладает свойством **консерватизма** (сохраняемости) углов во всех точках, где $f'(z_0) \neq 0$. И отображение $w = f(z)$ обладает свойством **постоянства растяжения**.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ с $f'(z_0) \neq 0$, обладает в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений. Такое отображение называется **конформным отображением в точке** z_0.

ЛЕКЦИЯ № 3

§ 7. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Важным понятием в теории функции комплексной переменной (КП) является понятие интеграла по комплексной переменной. Метод введения интеграла по КП аналогичен методу введения интеграла функции вещественной переменной.

Пусть в области D плоскости $z = x + iy$ задана непрерывная однозначная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и пусть L – кусочно-гладкая кривая с началом в z_0 и концом в z, лежащая в области D (рис. 5).

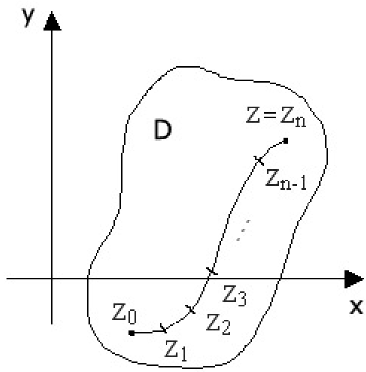

Рис. 5

Задание конца и начала ориентирует кривую L. L может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Произвольным образом разбиваем L на n «элементарных» дуг в направлении от z_0 к z точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, $z_n = z$; $z_i = x_i + iy_i$.

Обозначим

$$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$;

$|\Delta z_k|$ – длина хорды, стягивающей k-ю элементарную дугу. В произвольном месте каждой элементарной дуги (z_{k-1}, z_k) возьмем соответственно по точке $\chi_k = \xi_k + i\eta_k$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\chi_k)\cdot \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(\chi_k)(z_k - z_{k-1}). \qquad (14)$$

Если при $\max|z_k - z_{k-1}| \to 0$ существует предел сумм (14), не зависящий ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек χ_k на всех этих частичных кривых, то этот предел называется **контурным интегралом от функции *f(z)* вдоль линии *L*** (или **интегралом от функции *f*(*z*) по кривой *L***) и обозначается

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\chi_k)\Delta z_k. \qquad (15)$$

Рассмотрим вопрос о существовании интеграла (15). Представим суммы (14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(\chi_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k\right] + \qquad (16) \\ &+ i\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\cdot\Delta x_k\right]. \end{aligned}$$

Действительная и мнимая части в равенстве (16) представляют собой интегральные суммы криволинейных интегралов второго рода. Следовательно, интеграл (15) существует, если существуют два криволинейных интеграла

$$\int_L udx - vdy \quad \text{и} \quad \int_L udy + vdx. \qquad (17)$$

Но эти два интеграла (17) существуют для непрерывных на L функций u и v. А их непрерывность в нашем случае следует из непрерывности функции $f(z)$. Следовательно, если $f(z)$ непрерывна на L, то интеграл (15) существует и имеет место следующее равенство:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,\, y)dx - v(x,\, y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy\,. \qquad (18)$$

Из формулы (18) следует, что свойства интеграла (15) аналогичны свойствам криволинейных интегралов 2-го рода:

1) $\int_L [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz$;

2) $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz$;

3) $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$,

где L^- – линия, совпадающая с L, но противоположно направленная;

4) $\int_{L_1+L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$.

Вычисление контурных интегралов

Контурные интегралы можно вычислять, сводя их с помощью формулы (18) к двум действительным криволинейным интегралам. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ – параметрические уравнения линии L; $z_0=x(t_0)+iy(t_0)$; $z=x(t_1)+iy(t_1)$. Тогда $\int_L f(z)dz =$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[u(x(t),\, y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),\, y(t))\cdot y'(t)\right]\cdot dt + i\int_{t_0}^{t_1}\left[u(x(t), y(t))\cdot y'(t) + v(x(t), y(t))\times\right.$$

$$\left.\times\, x'(t)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\right]\left[x'(t) + iy'(t)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\cdot z'(t)\cdot dt.$$

Эта формула удобна для вычислений контурных интегралов.

Пример 1

Вычислить: $\int_L \bar{z}\cdot dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_0 = 0$; $z = 2 + i$.

Решение. Имеем $y = x/2$.

$$\int_L \bar{z}dz = \int_L (x - iy)(dx + idy) = \int_L xdx + ydy +$$

$$+ i\int_L xdy - ydx = \int_0^2 \left(xdx + \frac{xdx}{4} \right) + i \cdot \int_0^2 \left(x \cdot \frac{dx}{2} - \frac{x}{2}dx \right) = \frac{5}{4}\int_0^2 xdx = \frac{5}{2}.$$

Или: $x = 2t; \ y = t$.

Отсюда

$$z = 2t + it = (2 + i)t; \ dz = (2 + i)dt; \ \bar{z} = (2 - i)t \ ;$$

$$\int_L \bar{z}dz = \int_0^1 (2 - i)t \cdot (2 + i)dt = (4 + 1) \cdot \int_0^1 tdt = \frac{5}{2}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_L (1 + i - 2\bar{z})dz,$ где L – дуга параболы от точки $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $1 + i - 2\bar{z} = = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$, где $u(x, y) = 1 - 2x$, $v(x, y) = 1 + 2y$, т.к. $\int_L f(z)dz = = \int_L u\,dx - vdy + i\int_L v\,dx + udy,$ то $\int_L (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_L (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + + i\int_L (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$

Для параболы $y = x^2 \quad dy = 2xdx, \quad (0 \le x \le 1).$

Следовательно, $\int_L (1 + i - 2\bar{z}) = \int_0^1 (1 - 2x - (1 + 2x^2)2x)dx + i\int_0^1 (1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x) \times \times dx = -2 + \frac{4}{3}i.$

§ 8. ТЕОРЕМА КОШИ

Рассмотрим условие независимости от пути интегрирования L интеграла функции комплексного переменного

$$\int_L f(z)dz \ .$$

Это условие определяется теоремой Коши

Теорема Коши. Если функция *f(z)* аналитична в замкнутой односвязной области *D*, то интеграл от этой функции по контуру *L*, ограничивающему область *D*, равен нулю:

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

Доказательство

Проведем в предположении о непрерывности производной *f'(z)* в $\overline{D}$, не входящем в определение аналитической функции, что значительно упростит рассуждения (теорему можно доказать и без этого предположения).

Доказательство сводится к доказательству равенства нулю двух действительных криволинейных интегралов

$$\int_L udx - vdy \quad \text{и} \quad \int_L udy + vdx.$$

На основании условия независимости от пути интегрирования криволинейного интеграла $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от функции действительного переменного $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ имеем следующее: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Непрерывность же частных производных функции *u* и *v* сразу же вытекает из непрерывности *f(z).*Теорема Коши доказана.

Сформулируем теорему Коши для многосвязной области.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция *f*(*z*) аналитична в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$, то интеграл от этой функции по границе области *D*, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

Доказательство

Рассмотрим на примере трехсвязной области (рис. 6). Проведем два разреза γ_1 и γ_2; обозначим через Г сложный замкнутый контур, состоящий из контуров L, L_1, L_2, γ_1, γ_2 (причем у каждого разреза следует различать два берега). Область, ограниченная контуром Г, будет односвязной. В силу теоремы Коши для односвязной области будем иметь следующее: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0,$ причем контур Г обходится в таком направлении, при котором область D остается слева, т.е. в положительном направлении. При этом обходе каждый из разрезов γ_1, γ_2 будет проходиться дважды в противоположных направлениях, в силу чего интегралы по каждому из разрезов взаимно уничтожатся.

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz +$$

$$+\int\limits_{L_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\underline{\gamma_1}} f(z)\,dz + \int\limits_{\underline{\gamma_2}} f(z)\,dz = 0.$$

$$\oint\limits_{L} f(z)dz + \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz = 0.$$

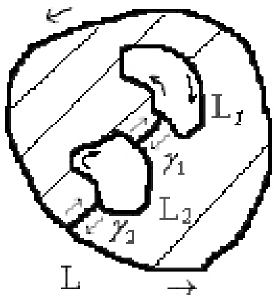

Рис. 6

Здесь внешний контур обходится против часовой, а внутренние – по часовой стрелке. Теорема доказана.

Изменив направление обхода внутренних контуров L_1 и L_2, будем иметь следующее:

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz,$$

где все контуры, как внутренние, так и внешние, обходятся против часовой стрелки (или все по часовой стрелке). Получаем другую формулировку **теоремы Коши для многосвязной области.**

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\overline{D}$, то интеграл от этой функции по внешнему контуру, ограничивающему область D, равен сумме интегралов по всем внутренним контурам, ограничивающим D, при этом все контуры, как внешний, так и внутренние, обходят либо по часовой стрелке, либо против.

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области D, то для любой дуги L, принадлежащей D, интеграл от $f(z)$ по L зависит только от начальной z_0 и конечной z точек дуги L.

В этом случае пользуются следующим обозначением:

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z) - F(z_0),$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$, т. е. $f(z) = F'(z)$.

Методы интегрирования неопределенных интегралов для функции комплексного переменного такие же, как и для функции действительной переменной. Таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова.

§ 9. ФОРМУЛА КОШИ

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ и пусть L – граница D. Тогда значения функции $f(z)$ в любой точке z области D можно вычислить, зная только значение $f(z)$ на границе L, по следующей формуле:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \tag{19}$$

где L обходится в положительном направлении.

Интеграл в правой части (19) называется **интегралом Коши для функции $f(z)$**, а сама формула (19) – **интегральной формулой Коши.**

Из нее следует, что аналитическая в замкнутой области функция полностью определяется своими значениями на границе области *D*.

Выведем формулу Коши.

Т. к. $f(\xi)$ аналитична в *D*, то $\varphi(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ аналитична в *D* всюду, за исключением точки $z\in D$. Ограничим точку *z* окружностью *C* радиуса *r*, взяв *r* настолько малым, чтобы *C* не пересекала *L* (рис. 7). Тогда в замкнутой двусвязной области *D** с границей *L* и *C* функция $\varphi(\xi)$ аналитична. По теореме Коши для многосвязной области

$$\int_L \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}. \tag{20}$$

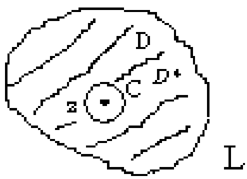

Рис. 7

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (20). Для этого сделаем замену переменной: $\xi - z = re^{it}$ (уравнение окружности *C*). Тогда

$$\begin{aligned} d\xi = ire^{it}dt;\ \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt = \\ &= i\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt - i\int_0^{2\pi} f(z)dt + i\int_0^{2\pi} f(z)dt = \\ &= i\int_0^{2\pi}\left[f(z+re^{it}) - f(z)\right]dt + 2\pi i f(z). \end{aligned} \tag{21}$$

Из непрерывности функции $f(z)$ в точке *z* следует, что для $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, что для $\forall\, r < \delta$:

$$\left| f(z+re^{it}) - f(z) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{2\pi} \left[f(z+re^{it}) - f(z) \right] dt \right| < 2\pi\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \left[f(z+re^{it}) - f(z) \right] dt = 0. \qquad (22)$$

Учитывая (22), из выражения (21) имеем следующее:

$$\int_L \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = i \int_0^{2\pi} \left[f\left(z+re^{it}\right) - f(z) \right] dt + 2\pi i f(z).$$

Левая часть этого равенства не зависит от r. Переходя к пределу при $r \to 0$ и учитывая (22), получим $\int_L \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z)$. Формула (19) доказана.

С помощью теоремы Коши можно вычислять некоторые контурные интегралы.

Пример 1

$$\int_{|z-5|=2} \frac{e^z}{z-4} dz = \int_{|z-5|=2} \frac{f(z)dz}{z-4} = f(4)\cdot 2\pi i = e^4 \cdot 2\pi i \text{ (рис. 8).}$$

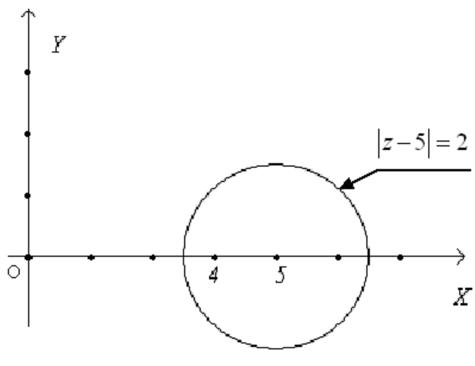

Рис. 8

Пример 2

Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}$, где C – окружность радиуса 1 с центром в точке i.

Решение. Имеем для C уравнение $\left|z-i\right|=1$ (рис. 9).

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1} = \int\limits_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \int\limits_C \frac{\frac{dz}{z+i}}{z-i} = 2\pi i\left(\frac{1}{z+i}\right)_{z=i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

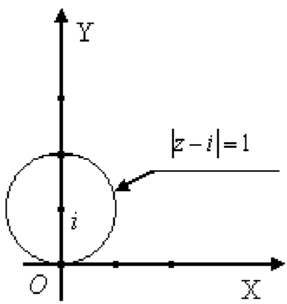

Рис. 9

Пример 3

Вычислить интеграл, пользуясь формулой Коши:

$$\oint\limits_L \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz, \quad L:\left|z-2\right|=3.$$

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = f(z_0), \text{ где } z_0 \in D,$$

где $f(z)$ – аналитическая функция в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L (обход против часовой стрелки).

Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, находится одна точка $z=0$, в которой знаменатель обращается в нуль.

$$\oint_L \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \oint_L \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.$$

Обобщая формулу Коши, можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, то в каждой точке области D она дифференцируема сколько угодно раз, причем n-я производная представляется формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}, \tag{23}$$

где L – граница области $\overline{D}$ обходится в положительном направлении.

Следовательно, из аналитичности функции $f(z)$ в некоторой точке z, т.е. из дифференцируемости $f(z)$ в окрестности этой точки следует, что $f(z)$ дифференцируема в точке z сколько угодно раз и, следовательно, все производные $f(z), f'(z), \ldots$ аналитичны в точке z.

Формула (23) также может служить для вычисления некоторых контурных интегралов.

Пример 4

Вычислить $\oint_L \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, где L – произвольный замкнутый контур с центром в точке i.

Решение.

$$\oint_L \frac{e^z dz}{(z-1)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(e^z\right)''\Big|_{z=i} = \pi i e^i = \pi i(\cos 1 + i\sin 1) = \pi(i\cos 1 - \sin 1).$$

Пример 5

Вычислить $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz.$

Решение.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{e^z}{z-3}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z-3}\right) \Big|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{e}{-2} = -\pi e i.$$

Пример 6

Вычислить $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-4)} dz.$

Решение.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-4)} dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{z+1}{z-4}}{(z-1)^3} dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{z+1}{z-4}\right)^{//} \Big|_{z=1} = \pi i \left(1 + \frac{5}{z-4}\right)^{//} \Big|_{z=1} =$$

$$= \pi i \left(-\frac{5}{(z-4)^2}\right)^{/} \Big|_{z=1} = \frac{10\pi i}{(1-4)^3} = \frac{10\pi}{-27}.$$

Пример 7

Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz$.

Решение.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \cdot (\sin z)^{/}{}_{z=0} = 2\pi i (\cos 0) = 2\pi i.$$

ЛЕКЦИЯ № 4

§ 10. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ФКП

Пусть $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$ – последовательность комплексных чисел. Сумма членов этой последовательности является рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \tag{24}$$

тогда

$S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ – n-я **частичная сумма ряда** (24).

Ряд (24) называется **сходящимся**, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, в противном случае ряд (24) называется **расходящимся.**

S называется **суммой** ряда (24).

Остатком называется ряд $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots$, т.е. $S = S_n + R_n$, отсюда, если ряд (24) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

На основании § 2 лекции № 1 можем сформулировать теоремы.

Теорема 1. Для сходимости ряда (24) необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Доказательство теоремы предоставляем читателю.

Теорема 2. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| + \ldots, \tag{25}$$

то сходится и ряд (24), называемый в этом случае **абсолютно сходящимся**.

Доказательство теоремы предоставляем читателю.

Для абсолютно сходящихся рядов сохраняются те же свойства, что и для абсолютно сходящихся рядов с действительными членами. Для исследования сходимости рядов (25) применимы уже известные нам признаки Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

Пусть теперь дана последовательность функций $\left\{ f_n\left(z\right)\right\}$, определенных в области *D*.

Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \qquad (26)$$

называется **функциональным рядом**, а $S_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ – **частичной суммой**.

Если в каждой точке $z_0 \in D$ ряд (26) обращается в сходящийся числовой ряд, то говорят, что **ряд (26) сходится в области *D*.**

Так же, как и для действительных рядов, вводится определение равномерно сходящихся рядов.

Ряд (26), сходящийся в *D*, называется **равномерно сходящимся в этой области**, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что для $\forall n \geq N$ будет $\left|R_n(z)\right| < \varepsilon$ одновременно для всех $z \in D$.

Условие равномерной сходимости ряда функции комплексного переменного в области *D* гарантирует непрерывность суммы ряда, а также возможность интегрирования и дифференцирования суммы ряда путем почленного интегрирования и дифференцирования этого ряда.

Для рядов с комплексными членами справедлив признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (27)$$

называются **степенными**.

Сформулируем теорему Абеля.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (27) сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $|z| < |z_0|$. Во всяком круге меньшего радиуса $|z| \leq q < |z_0|$ ряд (27) сходится равномерно.

Доказательство аналогично случаю степенных рядов с действительными членами.

Радиус сходимости r определяется так: в круге $|z| < r$ ряд сходится, $|z| > r$ – расходится; $|z| < r$ – круг сходимости. r можно определять по признаку Даламбера.

Ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$ с помощью замены $t = z - a$ сводятся к рядам вида (27).

§ 11. РЯД ТЕЙЛОРА ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Во всяком замкнутом круге $|z - a| \le r' < r$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots$ в силу теоремы Абеля сходится равномерно и имеет своей суммой некоторую функцию $f(z)$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots, \qquad (28)$$

причем на основании теоремы Вейерштрасса функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - a| < r$ сходимости ряда. Т.к. члены ряда (28) аналитичны во всей плоскости z, то в силу той же теоремы этот ряд можно почленно дифференцировать, причем ряд

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - a) + 3c_3(z - a)^2 + \ldots + nc_n(z - a)^{n-1} + \ldots \qquad (29)$$

тоже равномерно сходится во всяком круге $|z - a| \le r' < r$. Рассуждая аналогично относительно ряда (29), придем к выводу, что степенной ряд (28) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз; полученные таким образом ряды имеют тот же радиус r сходимости, что и ряд (28). Дифференцируя (28) почленно дальше, получим для $\forall z$, $|z - a| < r$

$$f''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(z-a) + \ldots + n(n-1)\cdot c_n(z-a)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z-a) + \ldots$$

Полагая в этих равенствах $z = a$, получим:

$$f(a) = c_0;\ f'(a) = c_1;\ f''(a) = 2c_2;\ \ldots;\ f^{(n)}(a) = n!c_n;\ \ldots .$$

Или

$$c_0 = f(a);\ c_1 = f'(a);\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!};\ \ldots;\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!};\ \ldots,$$

в силу чего ряд (28) записывается в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots . \qquad (30)$$

Степенной ряд (30) называется **рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$.**

Следовательно, сумма *f(z)* степенного ряда (28) является аналитической функцией в круге сходимости ряда, причем этот ряд является рядом Тейлора своей суммы *f(z)*.

Возникает вопрос: всякую ли аналитическую функцию в некотором круге можно разложить в этом круге в ряд Тейлора? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Всякая функция *f(z)*, аналитическая в круге $|z-a| < r$, может быть в этом круге единственным образом разложена в степенной ряд Тейлора.

Доказательство

Пусть z принадлежит кругу $|z-a| < r$. Построим круг $|z-a| \le r_1 < r$, тоже содержащий точку z (рис. 10).

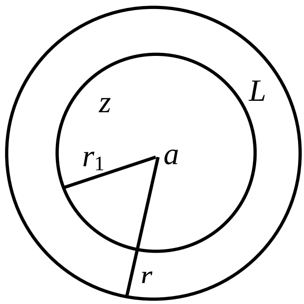

Рис. 10

Через L обозначим окружность $|z-a|=r_1$. Т.к. *f(z)* аналитична в замкнутом круге $|z-a|\le r_1$, то по формуле Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)+(a-z)}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}\cdot d\xi,$$

где L обходится в положительном направлении.

Т.к. $\xi\in L$, то $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right|=\dfrac{|z-a|}{|\xi-a|}=\dfrac{|z-a|}{r_1}<1$, в силу чего $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{\xi-a}\right)^n$ равномерно сходится по ξ на окружности *L*.

Следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n\right\}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_L\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n d\xi=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(z-a)^n,$$

т.е. получили разложение функции $f\left(z\right)$ в ряд Тейлора в круге $\left|z-a\right|<r$. Единственность этого разложения есть следствие утверждения, что любой степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы, ибо отсюда следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции *f(z)* в степенной ряд является рядом Тейлора этой функции, что и требовалось доказать.

Можно доказать, что наибольший радиус *r* круга с центром в точке $z=a$, в которой функция *f(z)* разлагается в ряд Тейлора, равен расстоянию от точки $z=a$ до ближайшей к ней особой точки, в которой эта функция не является аналитической.

Так как ряд Тейлора и формулы дифференцирования для функции КП имеют тот же вид, что и для функции действительного переменного, ряды Тейлора для функций комплексного переменного не отличаются по виду от рядов Тейлора для тех же функций действительного переменного. Ряды Тейлора для функций e^z, cos *z,* sin *z,* ln *z,* $(1+z)^m$ имеют следующий вид:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots;$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+\left(-1\right)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+\left(-1\right)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots;$$

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots;$$

$$\ln z=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{(z-1)^n}{n}+\ldots,$$

где a = 1.

§ 12. РЯД ЛОРАНА ФКП

Рядами Тейлора представляются аналитические функции в круговых областях. Однако часто приходится рассматривать функции, аналитические всюду в некоторой окрестности точки a, исключая саму точку a, т.е. аналитические в кольце вида $0 < |z-a| < R$.

Такие функции представляются двусторонними рядами, содержащими как целые положительные, так и целые отрицательные степени $z-a$ вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \tag{31}$$

Слагаемые в правой части (31) называются соответственно **правильной и главной частью ряда**.

Первый ряд справа – обычный степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|z-a| < R$. Второй ряд заменой $\frac{1}{z-a} = \xi$ преобразуется в степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$, который сходится в круге $|\xi| < r$. Отсюда $\frac{1}{|z-a|} < r$, и $|z-a| > r$. Ряд (31) сходится в кольце $r < |z-a| < R$. В этой области ряд (31) сходится абсолютно, равномерно и его сумма есть аналитическая функция:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{32}$$

Определим коэффициенты c_n ряда (32). Для этого умножим равенство (32) на $(z-a)^{-n-1}$, получим $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1}$..

Проинтегрируем полученное выражение почленно по окружности $L{:}\,|z-a| = \rho,\ r < \rho < R$. Имеем следующее равенство:

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_L (z-a)^{k-n-1} dz. \tag{33}$$

Вычислим теперь интеграл вида

$$\int_L (z-a)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{im\varphi} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i\rho^{m+1}}{m+1}\left(e^{i(m+1)2\pi} - 1\right) = 0, & m \neq -1; \\ 2\pi i, & m = -1. \end{cases}$$

Из равенства (33) имеем:

$$\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = c_n 2\pi i \,,$$

откуда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \dots . \qquad (34)$$

Ряд (32), коэффициенты которого определяются формулой (34), называется **рядом Лорана функции *f*(*z*) в окрестности точки *a***.

Заметим, что сумма $f(z)$ двустороннего ряда (32) является аналитической функцией в кольце его сходимости и этот ряд является рядом Лорана, своей суммы.

Возникает вопрос, всякую ли функцию *f(z)*, аналитическую в некотором круговом кольце, можно разложить в этом кольце в ряд Лорана? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $r < |z-a| < R$, может быть в этом кольце единственным образом разложена в ряд Лорана (теорему принимаем без доказательства).

Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z-a| < R$, в то время как главная часть ряда Лорана сходится в области $|z-a| > r$.

Пусть теперь функция $f(z)$ аналитична не только в кольце $0<|z-a|<R$, но и в точке $z=a$ (в круге $|z-a|<R$). При всех отрицательных n подынтегральная функция в (34) не имеет особых точек внутри L. Следовательно, все $c_{-n}=0$, а главная часть ряда Лорана исчезает. В этом случае $c_n=\dfrac{f^n(a)}{n!}$. Имеем ряд Тейлора. Значит, ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, когда $f(z)$ аналитична в «кольце» $0\le|z-a|\le R$.

Точки плоскости z, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми точками этой функции**.

Пример 1

Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z=0$ и $z=1$, в силу чего имеются два круговых «кольца» с центром в точке $a=0$, в которых $f(z)$ аналитична – это кольца 1) $0<|z|<1$ и 2) $|z|>1$.

1) $0<|z|<1$. Тогда разложим данную функцию на сумму простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots)=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n.$$

Главная часть полученного ряда Лорана состоит из одного члена $\dfrac{1}{z}$. Здесь мы рассматривали вторую дробь как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q=z$;

2) $|z|>1$. Дробь $\dfrac{1}{1-z}$ аналитична вне круга или для $\dfrac{1}{|z|}<1$. Тогда

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots-\frac{1}{z^{n+1}}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Следовательно, $f\left(z\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^{2}}-\cdots-\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}$. Здесь отсутствует правильная часть.

Пример 2

Разложить функцию $f\left(z\right)=\frac{1}{z^{2}-1}$ в ряд Лорана, взяв $a=0;\ \left|z\right|>1.$

Решение. $\frac{1}{z^{2}-1}=\frac{1}{z^{2}\left(1-\frac{1}{z^{2}}\right)}=\frac{1}{z^{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^{2}}}=\left(\text{т.к.}\ \left|z\right|>1,\ \text{то}\ \frac{1}{\left|z\right|}<1\right)=$

$=\frac{1}{z^{2}}\left(1+\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z^{4}}+\frac{1}{z^{6}}+\ldots+\frac{1}{z^{2n}}+\ldots\right)=\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z^{4}}+\frac{1}{z^{6}}+\frac{1}{z^{8}}+\ldots+\frac{1}{z^{2n+2}}+\ldots=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}.$

Здесь $\frac{1}{1-\frac{1}{z^{2}}}$ – сумма геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{z^{2}}$; $\left|\frac{1}{z^{2}}\right|<1$.

Пример 3

Разложить функцию $f\left(z\right)=\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-3\right)}$ в кольце $1<\left|z\right|<3.$

Решение. Всякую аналитическую функцию можно разложить в ряд Лорана:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{n}\left(z-a\right)^{n}.$$

Заданная функция имеет две особые точки $z=1,\ z=3$, следовательно, является аналитической в кольце $1<\left|z\right|<3.$

Представим $f(z)$ в виде суммы двух функций:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\left(f_1(z)-f_2(z)\right);$$

$$f_1(z)=\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3-z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\frac{z^3}{3^3}+....\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},$$

функция аналитична в круге $|z|<3$;

$$f_2(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},$$ функция аналитична в области $|z|>1$.

Тогда $f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}};\quad 1<|z|<3$.

Пример 4

Разложить функцию $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ в окрестности точки 0.

Решение. $f(z)=\frac{1}{z^2}e^z=\varphi(z)\cdot\Psi(z)$.

Функция $\varphi(z)$ уже разложена по степеням z, точка $z=0$ является для нее особой.

$$\Psi(z)=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2}e^z=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!},\quad 0<|z|<\infty.$$

ЛЕКЦИЯ № 5

§ 13. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФКП

Точки плоскости z, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми точками этой функции**.

В этом параграфе мы рассмотрим поведение аналитических функций в окрестности особых точек простейшего типа – изолированных особых точек.

Точка $z=a$ называется **изолированной особой** точкой функции $f(z)$, если существует такая окрестность точки $z=a$, в которой она является единственной особой точкой функции $f(z)$.

Если $z=a$ – изолированная особая точка $f(z)$, то существует достаточно малое кольцо $r<|z-a|<R$, в котором $f(z)$ аналитична и разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (35)$$

При этом могут представиться три случая:

I. Разложение (35) **не содержит главной части** и, следовательно, имеет следующий вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots. \qquad (36)$$

Этот ряд является степенным и его сумма есть аналитическая функция в круге $|z-a|<R$ (включая и его центр $z=a$). Во всех точках круга, кроме точки $z=a$, ряд (36) сходится к функции $f(z)$, а в точке $z=a$ (где $f(z)$ не является аналитической) – к числу c_0.

Если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ отсутствует главная часть, то точка $z=a$ называется **устранимой особой точкой функции** $f(z)$.

Если принять $f(a)=c_0$, то разложение (36) станет справедливым в круге $|z-a|<R$, включая и центр $z=a$. Следовательно, $f(z)$ станет аналитической в точке a.

Очевидно, что в достаточно малой окрестности устранимой особой точки $f(z)$ ограничена, т.е. $\lim\limits_{z\to a} f(z)=C$, где C – конечное число.

Это свойство можно использовать для определения (нахождения) устранимой особой точки функции $f(z)$.

Пример

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Показать, что $z=0$ – устранимая особая точка данной функции $f(z)$.

Решение. Имеем

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-... \ .$$

В получившемся разложении отсутствует главная часть, откуда следует высказанное утверждение.

Для $z=0$ $f(z)$ не определена; если положить $f(0)=1$, то функция станет аналитической в точке $z=0$.

II. Разложение (35) содержит в своей главной части **лишь конечное число членов** и, следовательно, имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+...+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \qquad (37)$$

где $c_{-m}\neq 0$.

Если в разложении (37) в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ главная часть содержит лишь конечное число членов ($c_{-m}\neq 0$), то точка $z=a$ называется **полюсом m-го порядка**.

Если $m=1$, то полюс называется **простым**.

Покажем, что в достаточно малой окрестности полюса функция $f(z)$ бесконечно велика. Для этого представим равенство (37) в следующем виде:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}[c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+...+c_{-1}(z-a)^{m-1}+$$

$$+c_0(z-a)^m+c_1(z-a)^{m+1}+...]=\frac{1}{(z-a)^m}g(z),$$

где $\lim\limits_{z\to a}g(z)=g(a)=c_{-m}\neq 0$. Отсюда и следует, что $f(z)\underset{z\to a}{\to}\infty$.

Из предыдущего равенства следует:

$$f(z)(z-a)^m=g(z)\Rightarrow\lim_{z\to a}\{f(z)(z-a)^m\}=c_{-m}\neq 0 \text{ и } \neq\infty. \quad (38)$$

Равенство (38) дает удобный критерий нахождения полюса порядка m.

Пример

$f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^4}$. Показать, что $z=0$ – полюс 2-го порядка этой функции.

Решение. $f(z)=\dfrac{1}{z^4}(1-(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-...))=\dfrac{1}{z^4}(\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+...)=$

$=\dfrac{1}{2!z^2}-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}-....$

Т.к. главная часть этого разложения состоит из одного члена $\dfrac{1}{2!z^2}$, то $z=0$ – полюс 2-го порядка. При этом $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\infty$, как и должно быть для полюса.

Заметим, что $\lim\limits_{z\to 0}z^2f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{2z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{2}=\dfrac{1}{2}$.

III. Разложение (35) содержит в главной части **бесконечное множество членов**.

Если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$ главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка $z=a$ называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$.

Относительно поведения функции $f(z)$ в окрестности существенно особой точки имеет место теорема Ю.В. Сохоцкого.

Теорема Ю.В. Сохоцкого. Если $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого числа A (конечного или бесконечного) существует такая последовательность $\{z_n\}$ значений аргумента, стремящаяся к a, для которой последовательность $\{f(z_n)\}$ стремится к A.

Теорему принимаем без доказательства.

Коротко будем говорить, что **в существенно особой точке функция неопределенна**.

Пример

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Показать, что $z=0$ – существенно особая точка.

Решение.

Функция e^t аналитична во всей плоскости t и представлена на этой плоскости рядом $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots$.

Положим $t=\frac{1}{z}$. Функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ аналитична при $|z|>0$, т.е. на всей плоскости *z*, исключая точку $z=0$, и представляется там рядом $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots$. Этот ряд в главной части содержит бесконечное множество членов, откуда и следует, что $z=0$

есть существенно особая точка функции $f(z)$. Покажем теперь справедливость теоремы Сохоцкого для этой функции.

Пусть $z = x \to 0$: $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Пусть $A = re^{i\varphi}$ – любое комплексное число, отличное от 0 и ∞. Из равенства $f(z) = A = e^{\frac{1}{z}}$ следует, что $z = \dfrac{1}{\operatorname{Ln} A} = \dfrac{1}{\ln r + i\varphi + 2\pi i n}$, n = 0; ±1; ±2, … Тогда $z_n = \dfrac{1}{\ln r + i\varphi + 2\pi i n}$ – последовательность точек $\{z_n\}$, стремящаяся к нулю. При этом $f(z_n) \to A$.

Вывод. Если $z = a$ есть изолированная особая точка функции $f(z)$, то в зависимости от того, является ли эта точка устранимой, полюсом или существенно особой, функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности точки $z = a$ будет соответственно ограниченной, бесконечно большой или неопределенной.

Верно и обратное: если $z = a$ есть изолированная особая точка функции $f(z)$, то она будет устранимой, полюсом или существенно особой точкой в зависимости от того, будет ли предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ конечным, бесконечным или несуществующим.

§ 14. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. СВЯЗЬ МЕЖДУ НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ

Нулем функции $f(z)$ называют любую точку a, в которой $f(a) = 0$.

Если аналитическая в своем нуле функция $f(z)$ не равна тождественно нулю, то ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$ имеет такой вид:

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \tag{39}$$

где $c_m \neq 0$ $(m \geq 1)$.

Номер m первого, отличного от нуля коэффициента этого разложения называется **порядком нуля** a. Если $m=1$, то $z=a$ – **простой нуль**.

Из $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$ следует, что если $z=a$ – нуль порядка m, то $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$, но $f^{(m)}(a) = c_m \neq 0$. Следовательно, порядок нуля a есть порядок первой, отличной от нуля производной $f^{(m)}(a)$.

Теорема. Для того, чтобы $z=a$ была нулем m-го порядка аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела такой вид:

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \tag{40}$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $z=a$ – нуль m-го порядка, следовательно, имеет место формула (39). Тогда $f(z) = (z-a)^m[c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots] = (z-a)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots$ – аналитическая в точке $z=a$ функция и $\varphi(z) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Справедлива формула (40), тогда $\varphi(z)$ разлагается в ряд и $f(z) = (z-a)^m[b_0 + b_1(z-a) + \ldots] = b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \ldots$, причем $b_0 = \varphi(a) \neq 0$. Значит, имеет место формула (39). Теорема доказана.

Часто удается выяснить характер особых точек функции, пользуясь следующей теоремой.

Теорема. Для того, чтобы $z=a$ была нулем m-го порядка аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ эта точка была полюсом m-го порядка.

Доказательство

Необходимость. Пусть $z=a$ – нуль функции $f(z)$ порядка m. Тогда $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)\Rightarrow F(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}$. Отсюда $F(z)(z-a)^m=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ и $\lim\limits_{z\to a}\left\{F(z)(z-a)^m\right\}=\dfrac{1}{\varphi(a)}\neq 0$ и $\neq\infty$. Значит, $z=a$ – полюс m-го порядка для $F(z)$.

Достаточность. Пусть $z=a$ – полюс m-го порядка для $F(z)$. Тогда

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}=\frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-m}(z-a)^n=$$

$=\dfrac{1}{(z-a)^m}g(z)$, где $g(z)$ – аналитическая в точке $z=a$ функция и $g(a)=c_{-m}\neq 0$. Значит, $\dfrac{1}{g(z)}=\varphi(z)$ – аналитическая в точке $z=a$ функция и $\varphi(a)\neq 0$. Отсюда $F(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}=\varphi(z)$, а $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$ Следовательно, $z=a$ – нуль порядка m для $f(z)$.Теорема доказана.

Пример 1

Найти все особые точки функции $f(z)$ на плоскости z для $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2(z-3)^4}$.

Решение. $f(z)$ аналитическая во всей плоскости, исключая $z=i$ и $z=-3$. Указанные точки являются нулями знаменателя порядка соответственно 2 и 4. Следовательно, $z=i$ – полюс 2-го порядка, $z=-3$ – полюс 4-го порядка для функции $f(z)$.

Пример 2

Определить порядок нуля или полюса функций в данной точке *z*. Заметим, что нуль функции порядка *m* определяется либо равенством

$f(a) = 0$; $f^{(k)}(a) = 0$, $k < m$, $f^{(m)}(a) \neq 0$, либо эквивалентным равенством $f(z) = (z-a)^m \cdot \varphi(z)$; $\varphi(a) \neq 0$.

a) $f(z) = \sin z; \quad z = \pi$.

Решение. $z = \pi$ – **простой нуль**, т.к. $\sin\pi = 0$, а $(\sin z)'\big|_{z=\pi} = \cos\pi \neq 0$.

b) $f(z) = \sec z = \dfrac{1}{\cos z}; \quad z = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Напомним связь между нулями и полюсами: если $f(z)$ имеет точку $z = a$ нулем порядка *m*, то функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет точку $z = a$ полюсом порядка *m*. И наоборот. Т.к. $z = \dfrac{\pi}{2}$ – простой нуль функции $\cos z$, то в точке $z = \dfrac{\pi}{2}$ у функции $\sec z$ – **простой полюс**.

c) $f(z) = 1 + \cos z; \quad z = \pi$.

Решение. $z = \pi$ – **нуль 2-го порядка**, т.к. $f(\pi) = 0$; $f'(\pi) = -\sin\pi = 0$; $f''(\pi) = -\cos\pi \neq 0$. Либо $1 + \cos z = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно $z = \pi$ – нуль второго порядка.

d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{1-\cos z^2} = \dfrac{\sin z}{2\sin^2\dfrac{z^2}{2}}; \quad z = 0$.

Решение. Точка $z = 0$ для $\sin z$ – простой нуль.

Для $\sin^2\dfrac{z^2}{2}$ -- $(z = 0)$ – нуль 4-го порядка, т.к. $\sin\dfrac{z^2}{2} \approx \dfrac{z^2}{2}$, а $\left(\sin\dfrac{z^2}{2}\right) \approx \dfrac{z^4}{4}$. Значит, $z = 0$ – нуль 4-го порядка, а для $\dfrac{\sin z}{1-\cos z^2}$ точка $z = 0$ – **полюс 3-го порядка**.

e) $f(z) = \sin z - z; \quad z = 0$.

Решение. $z=0$ – **нуль 3-го порядка**, т.к. $f(0)=0$; $f'(0)=0$; $f''(0)=-\sin z$; $f'(z)=\cos z-1$; $f''(0)=0$; $f'''(z)=-\cos z$; $f'''(0)\neq 0$ или $\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots$; $\sin z - z = -\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots$, т.е. первый, отличный от нуля, член в разложении в ряд Тейлора имеет степень 3, значит $z=0$ – **нуль третьего порядка**.

f) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{\sin z^4}$, $z=0$.

Решение. Известно, что $e^{z^2}-1\approx z^2$ $(e^x-1\approx x \text{ при } x\to 0)$ при $z\to 0$ или $e^{z^2}=1+\dfrac{z^2}{1!}+\dfrac{z^4}{2!}+\ldots$, а $e^{z^2}-1=\dfrac{z^2}{1!}+\dfrac{z^4}{2!}+\ldots$. Следовательно, $z=0$ – нуль 2-го порядка.

Для $\sin z^4$ $z=0$ – нуль 4-го порядка. Значит, $z=0$ – **полюс 2-го порядка** исходной функции.

Пример 3

Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z(z-3)(z+1)^4}$.

Решение. $f(z)=\dfrac{(z-1)(z+1)}{z(z-3)(z+1)^4}=\dfrac{z-1}{z(z-3)(z+1)^3}$.

Точки $\left.\begin{matrix} z=0 \\ z=3 \end{matrix}\right\}$ – простые полюсы.

Точка $z=-1$ – полюс порядка 3.

§ 15. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в окрестности $|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ бесконечно удаленной точки $z=\infty$, исключая саму эту точку. Отображение

$z=\dfrac{1}{\xi}$ переводит $|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ в $|\xi|<\varepsilon$, т. е. окрестность точки $z=\infty$ в окрестность точки $\xi=0$, при этом $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\varphi(\xi)$. Отсюда следует, что тип особой точки $z=\infty$ для $f(z)$ определяется типом особой точки $\xi=0$ для $f(\dfrac{1}{\xi})=\varphi(\xi)$.

Все вышеназванные определения соответствующим образом переносятся и на случай $z=\infty$.

ЛЕКЦИЯ № 6

§ 16. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ В КОНЕЧНОЙ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

Вычетом функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке $z=a$ (обозначение $\operatorname{Res} f(a)$) называется коэффициент c_{-1} при члене $\frac{1}{z-a}$ в разложении в ряд Лорана в окрестности точки a.

Напишем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки a:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (41)$$

и проинтегрируем этот ряд почленно по любому замкнутому контуру L, принадлежащему кольцу, в котором справедливо написанное разложение, обходя L против часовой стрелки. Используя результат § 12 (Ряд Лорана ФКП), найдём, что все интегралы в правильной части ряда будут равны нулю, все интегралы главной части тоже будут равны нулю, кроме единственного интеграла от первого члена главной части (где $n = 1$). В результате указанного интегрирования $\oint\limits_L f(z)dz = c_{-1}\cdot 2\pi i$, откуда $\operatorname{Res} f(a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$.

Из определения вычета следует, что если $z=a$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(a) = 0$, так как в этих случаях в разложении (41) отсутствует главная часть, так что все $c_{-n} = 0$. Сформулируем основную теорему о вычетах.

Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на замкнутом контуре L, ограничивающем ее всюду, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$ (лежащих внутри L), то интеграл от $f(z)$ вдоль L в положительном направлении равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ во всех точках a_k, то есть

$$\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k). \qquad (42)$$

Доказательство

Окружим точки a_k окружностями c_k настолько малыми, чтобы они лежали внутри L и не пересекали друг друга. Так как в многосвязной области, ограниченной контурами L и c_k и на самих этих контурах $f(z)$ аналитична, то в силу теоремы Коши $\oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{c_k} f(z)dz,$ где все контуры L и c_k обходятся против часовой стрелки. Поделив и умножив правую часть на $2\pi i$, получим следующее:

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_k} f(z)dz}_{\text{Res}\, f(a_k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\, f(a_k)\,,$$

что и требовалось доказать.

Формула (42) позволяет вычислять интегралы от $f(z)$ по замкнутым контурам, если известны вычеты этой функции относительно всех особых точек, находящихся внутри контура.

Вычисление вычетов функции

1. Для устранимой особой точки $z = a$ $\text{Res}\, f(a) = 0$.

2. Для вычисления вычета функции $f(z)$ в конечной существенно особой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки.

3. Для полюса получим некоторые удобные формулы.

Пусть $z = a$ – конечная точка, являющаяся полюсом порядка m функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}. \qquad (43)$$

Умножим (43) почленно на $(z-a)^m$:

$$f(z)\cdot(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \ldots$$

Дифференцируя последнее равенство (m – 1) раз по z, получим следующее:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\} = (m-1)!c_{-1} + m!c_0(z-a) + \ldots .$$

Переходя здесь к пределу при $z \to a$, найдем

$$\text{Res } f(a) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\}.$$

В частности, если $z = a$ – простой полюс (m = 1), то имеем следующую формулу:

$$\text{Res} f(a) = c_{-1} = \lim_{z\to a}\left\{(z-a) f(z)\right\}. \qquad (44)$$

Пусть функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестности точки a:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)},$$

причем $\varphi(a) \neq 0$; $g(a) = 0$; $g'(a) \neq 0$. Значит, $z = a$ – простой полюс функции $f(z)$. Применяя формулу (44), получим:

$$\text{Res } f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{\varphi(z)}{g(z)} = \varphi(a)\cdot\lim_{z\to a}\frac{1}{\dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{g'(a)}, \text{ т.е.}$$

$$\text{Res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{g'(a)}. \qquad (45)$$

Формула (45) удобна для нахождения вычетов в простых полюсах.

Примеры

В примерах 1–5 найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее особых точках плоскости z.

Пример 1

$$f(z)=\frac{2}{z-i}.$$

Решение. $z=i$ – простой полюс; это уже и есть разложение в ряд Лорана по ($z-i$), значит $\operatorname{Res} f(i)$ = 2.

Или по формуле (45): Res $f(i)$ = $\frac{2}{1}$ = 2.

Пример 2

$$f(z)=\frac{z^5}{z^2-1}.$$

Решение. z = 1 и z = –1 – простые полюсы функции $f(z)$; $f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z)=z^5$; $g(z)=z^2-1$. Тогда $\operatorname{Res} f(1)=\frac{\varphi(1)}{g'(1)}=$ $=\left(\frac{z^5}{2z}\right)\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{2}$. Res $f(-1)=\frac{\varphi(-1)}{g'(-1)}=\frac{(-1)^5}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}$.

Пример 3

$$f(z)=\frac{z^6}{(z-1)^4}.$$

Решение. z = 1 – полюс 4-го порядка. Имеем

$$\operatorname{Res} f(1)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to1}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-1)^4\cdot\frac{z^6}{(z-1)^4}\right]=\frac{1}{6}\cdot\lim_{z\to1}(6\cdot5\cdot4\cdot z^3)=20.$$

Пример 4

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}.$$

Решение. z = 0 – существенно особая точка. Имеем $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+$ $+\frac{1}{2!z^2}+\ldots$. Здесь $c_{-1}=\text{Res}\ f(0)=1$.

Пример 5

Вычислить вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}$.

Решение. $z=1$ – простой полюс, $z=-1$ – полюс 2-го порядка. Используем формулы для вычетов относительно простого полюса и полюса порядка m.

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\{(z-a)\ f(z)\}.$$

$$\text{Res}\ f(z)\ \Big|_{z=a}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{d^{m-1}\left((z-a)^m\cdot f(z)\right)}{dz^{m-1}}\ \Big|_{z=a}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}=1.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z+1)^2\frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}\right)\Big|_{z=-1}=-\frac{4}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1}=-1.$$

Пример 6

Вычислить $\oint\limits_l\dfrac{\text{ctg}\,z}{(4z-\pi)}dz$, где l – окружность |z| = 1, проходимая против часовой стрелки.

Решение. Знаменатель функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{4z-\pi}=\dfrac{\cos z}{(4z-\pi)\sin z}$ обращается в нуль в точках $z_1=\dfrac{\pi}{4};\ z_2=0;\ z_{k+2}=k\pi\ (k=\pm1,\pm 2,...)$, а поэтому для $f(z)$ эти точки являются полюсами, причём простыми, т.к. $\sin k\pi=0$, но $(\sin z')\big|_{z=k\pi}=\cos k\pi\neq 0$.

Внутрь окружности $|z|=1$ попадают только полюсы $z=\dfrac{\pi}{4};z=0.$

Тогда по основной теореме о вычетах: $\displaystyle\int_l \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}dz=$

$$=2\pi i\left(\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{Res} f(0)\right). \qquad \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\varphi(\frac{\pi}{4})}{g'(\frac{\pi}{4})}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{1}{4};$$

$$\operatorname{Res}\ f(0)=\frac{\frac{\cos z}{4z-\pi}}{(\sin' z)}\Bigg|_{z=0}=\frac{-\frac{1}{\pi}}{1}=\frac{1}{\pi}.\ \text{Имеем}\ \int_l \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right).$$

Пример 7

Вычислить $\displaystyle\oint_l \frac{dz}{z^3+1}$, где l – окружность $|z-1-i|=1$, проходимая против часовой стрелки.

Решение. Решив уравнение $z^3+1=0$ или $z=\sqrt[3]{-1}$, находим простые нули знаменателя: $(z+1)(z^2-z+1)=0$. Имеем $z_1=-1$,

$$z_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

Точки z_1, z_2, z_3 есть простые полюсы подынтегральной функции. Проверим, какие из этих точек лежат внутри круга l:

1) $|z_1-1-i|=|-2-i|=\sqrt{5}>1$ – вне круга $|z|<\mathbf{1}$;

2) $|z_2-1-i|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1-i\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3-4\sqrt{3}+4}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}<1$ – внутри круга;

3) $|z_3-1-i|=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-1-i}=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3+4\sqrt{3}+4}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}>1$ – вне круга.

Тогда $\int\limits_l \frac{dz}{z^3+2}=2\pi i\,\mathrm{Res}\, f(z_2)=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z^3+1'}\right|_{z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{3z^2}\right|_{z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=$

$$=\frac{2\pi i}{3\cdot\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}}=\frac{8\pi i}{3(2\sqrt{3}i-2)}=\frac{4\pi i}{3(\sqrt{3}i-1)}=-\frac{4\pi i}{3}\cdot\frac{(1+\sqrt{3}i)}{4}=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}-i\right).$$

Пример 8

Вычислить $\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$.

Решение. Особые точки подынтегральной функции: $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z=1$ – простой полюс.

Внутри области находятся обе особые точки.

$$\int\limits_{|z-1|=2}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=2\pi i\underbrace{(\mathrm{Res}\, f(0)+\mathrm{Res}\, f(1))}_{\substack{\text{сумма вычетов функции}\\ f(z)\text{ в точках 0 и 1}}};$$

$$\mathrm{Res}\, f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2(z-1)}\cdot z^2\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z+e^z(z-1)}{(z-1)^2}=$$

$$=-\lim_{z\to 0}\frac{2e^z-e^z\cdot z}{(z-1)^2}=-2;$$

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^2(z-1)}\cdot(z-1)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z^2} = e.$$

Следовательно, $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{e^z}{z^2(z-1)}dz = 2\pi i(-2+e).$

Пример 9

Вычислить $\oint\limits_{|z|=6}\dfrac{1}{1-\cos z}dz\cdot$

Решение. В заданную область попадает одна особая точка $z=0$ – полюс второго порядка.

$$\oint\limits_{|z|=6}\frac{1}{1-\cos z}dz = 2\pi i\cdot\operatorname{Res} f(0) = 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\cdot\left(\frac{1}{1-\cos z}\cdot z^2\right) =$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{(1-\cos z)^2} = 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{4z\cdot\sin^2\frac{z}{2}-2z^2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{4\sin^4\frac{z}{2}} =$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{2z\cdot\sin\frac{z}{2}\left(2\sin\frac{z}{2}-z\cos\frac{z}{2}\right)}{4\sin^4\frac{z}{2}} = 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\cdot\frac{2\cdot\sin\frac{z}{2}-z\cos\frac{z}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}} = \Bigg|$$

$$= \left|\text{по правилу Лопиталя}: \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| =$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{\cos\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} = 0\cdot$$

Имеем $\oint\limits_{|z|=6}\dfrac{1}{1-\cos z}dz = 0$.

Пример 10

Вычислить $\oint\limits_{|z-2|=1}\dfrac{\ln z}{(z-2)^2}dz.$

Решение.

Особая точка $z = 2$ – полюс 2-го порядка. $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\ln z}{(z-2)^2} dz =$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{\ln z}{(z-2)^2} \cdot (z-2)^2 \right) = 2\pi i \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}(\ln z) = 2\pi i \lim_{z\to 2} \frac{1}{z} = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i \ .$$

Пример 11

Вычислить интеграл с помощью вычетов: $\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2+1} dz, \ L: |z| = 3$.

Решение. Для вычисления используем формулу $\oint\limits_L f(z) dz =$ $= 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z)$, где $f(z)$ – функция, аналитическая в области *D*, ограниченной контуром *L*, всюду, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2, a_{3,\ldots,} a_n$. Для функции $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ особыми точками являются $z = i, z = -i$ в области $|z| < 3$.

Следовательно, $\oint\limits_L \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}\limits_{z=+i} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=-i} f(z) \right)$.

$$\operatorname*{Res}_{z=+i} f(z) = \lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)} \right) = \frac{e^z}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{e^i}{2i};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}\left((z+i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)} \right) = \frac{e^z}{z-i}\Big|_{z=-i} = -\frac{e^{-i}}{2i}\ .$$

$$\oint \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i} \right) = 2\pi i \sin 1\ .$$

Практические занятия

ЗАНЯТИЕ № 1

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФКП. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА

1. Выяснить, являются ли следующие функции дифференцируемыми:

а) $f(z) = \operatorname{ch} z$;

б) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$;

в) $f(z) = z \cdot e^z$;

г) $f(z) = |z| \cdot \bar{z}$;

д) $f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \bar{z}$.

2. Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими:

а) $f(z) = ze^z$;

б) $f(z) = e^{z^2}$;

в) $f(z) = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$;

г) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$;

д) $f(z) = \sin 3z - i$.

ЗАНЯТИЕ № 2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФКП. ФОРМУЛА КОШИ

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L z \operatorname{Im} z^2 dz, \quad L: |z| = 1 \ (-\pi \le arqz \le 0)$;

б) $\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z \, dz,$ L – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$;

в) $\int\limits_L z\bar{z} \, dz, \ \ L: |z| = 1$ (обход против часовой стрелки);

г) $\int\limits_L e^z\,dz,$ L – дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$;

д) $\int\limits_L \cos z dz$, L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $z_2 = \pi + i.$

2. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + z} dz, \quad L: |z - 1| = \dfrac{1}{2}$;

б) $\oint\limits_L \dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz, \quad L: |z| = 1$;

в) $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z^2 + 16}, \quad L: |z| = 5$;

г) $\oint\limits_L \dfrac{\cos(z + \pi i)}{z(e^z + 2)} dz, \quad L: |z| = 3$;

д) $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}, \quad L: |z| = 4$.

ЗАНЯТИЕ № 3

РЯДЫ ЛОРАНА

1. Разложить функции в ряд Лорана в указанных областях:

а) $f(z) = \dfrac{1}{(z - 2)(z - 3)}, \quad 2 < |z| < 3$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < \infty$;

в) $f(z) = \dfrac{2z + 3}{z^2 + 3z + 2}, \quad 1 < |z| < 2$;

г) $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 1}, \quad 1 < |z + 2| < 3.$

2. Разложить функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

б) $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$;

в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

г) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

З А Н Я Т И Е № 4

НУЛИ ФУНКЦИИ. ВЫЧЕТЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

1. Найти вычеты в особых точках для следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$;

б) $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$;

в) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

г) $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

2. С помощью вычетов вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$, $\quad L:|z|=2$;

б) $\displaystyle\oint_L \frac{z dz}{e^z+3}$, $\quad L:|z+1|=4$;

в) $\oint\limits_L \dfrac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}, \quad L:|z|=3;$

г) $\oint\limits_L \dfrac{z+1}{z^2+2z-3}dz, \quad L:|z|=4;$

д) $\oint\limits_L \dfrac{\sin \pi z}{z^2-z}dz, \quad L:|z|=\sqrt{3}$.

ОТВЕТЫ

ЗАНЯТИЕ № 1

1. а) да, б) нет, в) да, г) нет, д) нет.
2. а) да, б) да, в) нет, г) нет, д) да.

ЗАНЯТИЕ № 2

1. а) $-\dfrac{\pi}{2}$, б) $\dfrac{1}{4}\left(e^2-1\right)(1+i)$, в) 0, г) $e\cos 1-1+ie\sin 1$, д) $-(1+i\,\mathrm{sh}\,1)$.

2. а) 0, б) πi, в) 0, г) $i\dfrac{2}{3}\pi\,\mathrm{ch}\,\pi$, д) $-\dfrac{\pi i}{45}$.

ЗАНЯТИЕ № 3

1. а) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{3}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z+2)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$.

2. а) $\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}-\dfrac{z^5}{7!}+\ldots$, б) $z^3+z^2+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!z}+\ldots$,

в) $\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-\dfrac{z^6}{8!}+\ldots$, г) $\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{2!z}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z}{4!}+\ldots$.

ЗАНЯТИЕ № 4

1. а) $\operatorname{Res} f(0)=0,\ \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi},$

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=\frac{-\cdot 8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)},\quad n=0,\pm 1,\pm 2,...$$

б) $\operatorname{Res} f(0)=\frac{1}{24}$, в) $\operatorname{Res} f(0)=5,\ \operatorname{Res} f(1)=e,$ г) $\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{6},$

д) $\operatorname{Res} f(-1)=\frac{1}{27},\quad \operatorname{Res} f(2)=-\frac{1}{27}.$

2. а) $(1-2e^{-1})\pi i,$ б) $-\frac{4}{3}\ln 3\pi i,$ в) 0, г) $2\pi i,$ д) 0.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

В задаче 1 вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

В задаче 2 найти действительную и мнимую части функции $w=f(z)$.

В задаче 3 найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной (u) или мнимой (v) части и заданному значению $f(z_0)$.

В задаче 4 найти область, на которую заданная функция $w=f(z)$ отображает указанную область G. Заданную область G на плоскости Z и ее образ на плоскости W изобразить на чертежах.

В задаче 5 вычислить $\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$

В задаче 6 вычислить с помощью формулы Коши $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

В задаче 7 записать ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 и определить область сходимости полученного ряда.

В задаче 8 найти особые точки функции $f(z)$ и выяснить их характер.

В задаче 9 найти вычеты функции $f(z)$ в изолированных особых точках.

В задаче 10 вычислить с помощью вычетов $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

Вариант 1

1. $f(z) = \mathrm{Ln}\, z, \quad z_0 = 1 + \sqrt{3}\, i.$
2. $w = ze^z.$
3. $u = x^2 - y^2 + 3x + y, \quad f(0) = i.$
4. $w = i(2z+1),$ G: квадрант $\mathrm{Re}\, z \ge 0, \ \mathrm{Im}\, z \ge 0.$
5. $\int\limits_{\gamma} \mathrm{Re}\, z dz,$ γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 2 + i.$
6. $\oint\limits_{\gamma} \frac{zdz}{z^2+1}, \quad \gamma : |z+i| = 1.$
7. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0.$
8. $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^3(z+1)}.$
9. $f(z) = \frac{z}{(z-2)\sin z}.$
10. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}, \quad \gamma : |z+2i| = 1.$

Вариант 2

1. $f(z) = z^i, \quad z_0 = i.$
2. $w = \sin z.$
3. $u = x^3 - 3xy^2 + 2, \ f(0) = 2 + i.$
4. $w = e^{2z} + i, G$: полоса $-\infty < \mathrm{Re}\, z < +\infty, 0 \le \mathrm{Im}\, z \le \pi;$

5. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}dz,$ где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0 = 0,\ z_1 = 1,$ $z_2 = 1 + i.$

6. $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-i)^3}, \quad \gamma : |z| = 2.$

7. $f(z) = \sin\frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$

8. $f(z) = \frac{1}{\left(z^2 + i\right)^3}.$

9. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+3)}.$

10. $\oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{tg} z}{z+2} dz, \quad \gamma : |z + 2| = 2.$

Вариант 3

1. $f(z) = e^z, \quad z_0 = 3 + \frac{\pi}{4} i.$

2. $w = \mathrm{ch}\, z.$

3. $v = 2e^x \cos y, \quad f(0) = 2(1 + i).$

4. $w = (1 - i)(1 + z),\ G:$треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0,$ $z_2 = -i,\ z_3 = 1.$

5. $\int\limits_{\gamma} z^2 dz, \gamma$ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0 = 0$ с точкой $z_1 = 1 + i.$

6. $\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z-2i)^2}, \quad \gamma : |z - i| = 2.$

7. $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-1)^4}, \quad z_0 = 1.$

8. $f(z) = \cos\frac{1}{z+i}.$

9. $f(z)=\dfrac{z^5}{z^2-1}$.

10. $\int\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{2z}dz, \quad \gamma:|z|=1$.

Вариант 4

1. $f(z)=2^z, \quad z_0=1+i$.
2. $w=\cos z$.
3. $u=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1)=6-2i \quad (|z|>0)$.
4. $w=\dfrac{1}{z+i}$, $G:$ полуплоскость $\operatorname{Im} z\ge 0$.
5. $\int\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_0=1$ до точки $z_1=-1$, лежащая в верхней полуплоскости.
6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}, \quad \gamma:|z+1|=1{,}5$.
7. $f(z)=\sin\dfrac{1}{(z-2)}, \quad z_0=2$.
8. $f(z)=\dfrac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^2)(z^2-25)}$.
9. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$.
10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z+2)(z-1)}, \quad \gamma:|z|=3$.

Вариант 5

1. $f(z)=\operatorname{Ln} z, \quad z_0=3+4i$.
2. $w=e^{z^2}$.

3. $u = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0$.

4. $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $G:$ квадрант $\operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z \le 0.$

5. $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z\, dz, \quad \gamma -$ окружность $|z-a| = R$, пробегаемая против часовой стрелки.

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{(z+i)^2}, \quad \gamma : |z| = 1{,}5$.

7. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}, \quad z_0 = 0$.

8. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-1}$.

9. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{z^2-1}, \quad \gamma -$ эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Вариант 6

1. $f(z) = e^z, \quad z_0 = 2 - 3i.$
2. $w = \operatorname{sh} z.$
3. $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0$.
4. $w = \dfrac{1}{z+1}$, $G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z \ge 0.$
5. $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ – дуга параболы $y = x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).
6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{(z+2)^4}, \quad \gamma : |z+1| = 1{,}5$.
7. $f(z) = (z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}, \quad z_0 = 2$.

8. $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos z}$.

9. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3-z}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)}, \quad \gamma: |z-1-i|=2$.

Вариант 7

1. $f(z)=\cos z, \quad z_0=i.$

2. $w=z^2e^z$.

3. $u=x^2-y^2+2x, \quad f(i)=2i-1$.

4. $w=z^2$, $G:$ прямоугольник $0\le \operatorname{Re} z\le 1, \quad 0\le \operatorname{Im} z\le 2.$

5. $\int\limits_{\gamma} z\bar{z}dz, \quad \gamma$ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le \arg z\le \pi$.

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z+1)^2(z+2)}, \quad \gamma: |z|=1{,}5$.

7. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^5}, \quad z_0=0$.

8. $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$.

9. $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-1}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}, \quad \gamma: |z-i|=1$.

Вариант 8

1. $f(z)=\sin z, \quad z_0=1+2i.$

2. $w=z^2-|z|.$

3. $u = -2e^{x}\sin y, \quad f(0) = 2i$.

4. $w = e^{z}$, G: полоса $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \quad -\pi \le \operatorname{Im} z \le 0$.

5. $\int\limits_{\gamma} z^{2}dz, \quad \gamma -$ ломаная с вершинами в точках $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$.

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^{2} + 2z}, \quad \gamma : |z| = 1$.

7. $f(z) = \dfrac{1}{z^{2} + 1}, \quad z_0 = i$.

8. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$.

9. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z + 4)z^{2}}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} (z - 1)^{2} \dfrac{1}{z + 1} dz, \quad \gamma : |z + 1| = 0$.

Вариант 9

1. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 3 + 4i.$

2. $w = e^{z} \operatorname{Re} z.$

3. $u = x^{3} - 3xy^{2}$, $f(0) = i.$

4. $w = z^{2}, \quad G$: полуполоса $0 \le \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z \ge 0;$

5. $\int\limits_{\gamma} \left(2 - 3z + z^{2}\right)dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i.$

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{z^{2} + 9}, \quad \gamma : |z + 2i| = 2.$

7. $f(z) = \dfrac{1}{z(z - 1)^{2}}$, $z_0 = 1.$

8. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

9. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{z+1}{(z-2)^2}\,dz$, $\gamma : |z| = 3$.

Вариант 10

1. $f(z) = 2^z$, $z_0 = 1 - i$.

2. $w = z^3 + \operatorname{Im} z$.

3. $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $(x > 0)$, $f(1) = 0$.

4. $w = i(2 - z)$, G: квадрат $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$, $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$.

5. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + i$.

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\cos z dz}{(z-i)^2}$, $\gamma : |z| = 2$.

7. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+5)}$, $z_0 = 0$.

8. $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$.

9. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^4}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{(z+3)dz}{(z-1)(z+1)^2}$, $\gamma : \left|z - \dfrac{1}{2}\right| = 1$.

Вариант 11

1. $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = -i$.

2. $w = (z+i)e^z$.

3. $v = y^2 - 2y - x^2 + 1$, $f(2i) = i - 1$.

4. $w=(1+i)z+3,\quad G:$ круг $|z|\le 1.$

5. $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Re} z\, dz,\quad \gamma -$ радиус-вектор точки $z_0=2+i$.

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z(z-1)^3},\quad \gamma:|z+1|=1{,}5.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z-1)},\ z_0=i.$

8. $f(z)=\dfrac{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}.$

9. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3+4z}.$

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)^2},\quad \gamma:|z-2|=0{,}5$.

Вариант 12

1. $f(z)=\cos z,\quad z_0=5-i.$

2. $w=e^{z+i}.$

3. $v=3x^2y-y^3+3y-1,\quad f(1+i)=2+4i.$

4. $w=\dfrac{z-i}{z+i},\quad G:$ квадрант $\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0.$

5. $\int\limits_{\gamma}\bar{z}\, dz,\quad \gamma -$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i.$

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^2(z^2+4)},\quad \gamma:|z+2i|=1.$

7. $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0.$

8. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+4}.$

9. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\sin z dz}{z\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$, $\quad \gamma:|z|=2$.

Вариант 13

1. $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z, \quad z_0=2.$

2. $w=z^2+\mathrm{Re}\,z.$

3. $u=e^{1+y}\cos x, \quad f(-i)=1+3i.$

4. $w=\dfrac{1+z}{1-z}, \quad G:$ полуплоскость $\mathrm{Re}\,z\le 0.$

5. $\int\limits_{\gamma} z^2dz, \quad \gamma-$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=1+i.$

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z(z-1)}, \quad \gamma:|z-2|=1{,}5.$

7. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}, \; z_0=0.$

8. $f(z)=\dfrac{z}{\left(4+z^2\right)\sin z}.$

9. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+1}.$

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^3+4z^2}, \quad \gamma:|z|=1.$

Вариант 14

1. $f(z)=\mathrm{Arccos}\,z, \quad z_0=2i.$

2. $w=z^3\,\mathrm{Im}\,z.$

3. $v = e^{1+2y}\sin 2x, \quad f\left(-\frac{i}{2}\right) = 3.$

4. $w = (1-i)z + 2i, \quad G:$ круг $|z| \le 1.$

5. $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z\, dz, \quad \gamma$ – дуга параболы $y = x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

6. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 4z}, \quad \gamma: |z| = 1.$

7. $f(z) = z\cos\frac{1}{z}, \; z_0 = 0.$

8. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}.$

9. $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}.$

10. $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{1-z^2}\, dz, \quad \gamma: |z| = 1{,}5.$

Вариант 15

1. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 1 + i.$

2. $w = (z+i)^2.$

3. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad f(0) = 0.$

4. $w = -i(2z-1), \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z \ge 0.$

5. $\int\limits_{\gamma} \sin z dz, \quad \gamma$ – произвольный контур, соединяющий точку $z_0 = 0$

с точкой $z_1 = \frac{\pi}{2} + i.$

6. $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin 2z\, dz}{(z+1)^4}, \quad \gamma: |z| = 2.$

7. $f(z) = (z-3i)\sin\frac{1}{z-3i}, \; z_0 = 3i.$

8. $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(z^2+1\right)^2}$.

9. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)^2}$

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{(z+1)^2\cdot z}dz$, $\quad \gamma:|z|=\dfrac{1}{2}$.

Вариант 16

1. $f(z)=\operatorname{Arcsin} z, \quad z_0=2.$

2. $w=\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$.

3. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\; f(2)=\dfrac{1}{2}$.

4. $w=(1+i)z, \quad G:$ круг $|z-1|\le 1$.

5. $\int\limits_{\gamma}|z|\,dz, \quad \gamma -$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=-1$ с точкой $z_2=1$.

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z^2dz}{(z-2)^3}, \quad \gamma:|z|=3.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)}$, $\; z_0=0$.

8. $f(z)=\dfrac{z-1}{\cos z}$.

9. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\cos z}{z^2}dz, \quad \gamma:|z|=3.$

Вариант 17

1. $f\left(z\right)=e^{z}, \quad z_0=\dfrac{\pi i}{2}.$

2. $w=z^2\sin z.$

3. $u=x^3-3xy^2+3x^2-6x-3y^2, \quad f(0)=0.$

4. $w=\dfrac{z+i}{z-i}, \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z>0.$

5. $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Re} z\,dz, \quad \gamma-$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=i$ с точкой $z_2=2-i.$

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^2+1}, \quad \gamma:\left|z-i\right|=1.$

7. $f\left(z\right)=\cos\dfrac{1}{z-3}, \quad z_0=3.$

8. $f\left(z\right)=\dfrac{e^{z}-z-1}{z^2}.$

9. $f\left(z\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}.$

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z-2}{z(z-1)}dz, \quad \gamma:\left|z+0{,}5\right|=3.$

Вариант 18

1. $f\left(z\right)=z^{1+i}, \quad z_0=i.$

2. $w=\dfrac{\cos z}{z}.$

3. $v=x+y-3, \quad f\left(0\right)=0.$

4. $w=\dfrac{z}{z+i}, \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z>0.$

5. $\int\limits_{\gamma} |z|\, dz$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_1=-1$ до точки $z_2=1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^3+4z}$, $\gamma: |z-3i|=2$.

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3$.

8. $f(z)=\dfrac{z}{\mathrm{tg} z}$.

9. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin z}{z\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2} dz$, $\gamma: |z|=2$.

Вариант 19

1. $f(z)=\cos z$, $z_0=1+i$.
2. $w=\mathrm{Ln}\, z$.
3. $v=2xy$, $f(0)=0$.
4. $w=3z^2$, G: полуплоскость $\mathrm{Im}\, z>0$;
5. $\int\limits_{\gamma} z^3 dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$.
6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{z^2+\pi^2}$, $\gamma: |z-i|=3$.
7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=1$.
8. $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$.

9. $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^3}$.

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{z-1}{z^2+4}dz$, $\quad \gamma:|z|=3$.

Вариант 20

1. $f(z)=\cos z, \quad z_0=2-i.$

2. $w=z^i$.

3. $u=x^2-y^2, \quad f(0)=0$.

4. $w=(1+\sqrt{3}i)z-2i,\ G:$ круг $|z|\le 1$.

5. $\int\limits_\gamma \operatorname{Im} z\, dz, \quad \gamma-$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i$.

6. $\oint\limits_\gamma \dfrac{(z^2+1)dz}{z^2-1}, \quad \gamma:|z+1|=1.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}, \quad z_0=0$.

8. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-i}$.

9. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z^2+4)}$.

10. $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(1+z)^2(z+2)}, \quad \gamma:|z|=1{,}5$.

Вариант 21

1. $f(z)=z^i, \quad z_0=1+i.$

2. $w=\dfrac{\operatorname{Im} z}{z}.$

3. $v = 4x^3y - 4xy^3, \quad f(0) = 0$.

4. $w = i(3z - 1), \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

5. $\int\limits_{\gamma}\left(z^2 + iz - 2\right)dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i - 1$.

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)^2}, \quad \gamma: |z - 2i| = 2.$

7. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}, \quad z_0 = 2$.

8. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$.

9. $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{\sin z}, \quad \gamma: |z| = 2$.

Вариант 22

1. $f(z) = \operatorname{Arcsin} z, \quad z_0 = 3.$

2. $w = |z|\cos z.$

3. $v = 3x^2y + 6xy - 6y - x^3, \quad f(0) = 0.$;

4. $w = (1-i)(1+z), \ G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0,$ $z_2 = -i, z_3 = -1$.

5. $\int\limits_{\gamma} z|z|\,dz, \quad \gamma -$ дуга параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i.$

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\sin z dz}{(z+i)^3}, \quad \gamma: |z| = 1{,}5.$

7. $f(z) = ze^{-\frac{1}{z^2}}, \ z_0 = 0.$

8. $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$.

9. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-i)}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$, $\quad \gamma:|z-1|=2$.

Вариант 23

1. $f(z)=e^z$, $\quad z_0=3+i.$

2. $w=z^{3i}$.

3. $u=x^2-y^2+3x,\quad f(0)=0.$

4. $w=e^{z+3},\quad G:$ полоса $-\infty<\operatorname{Re}z<+\infty,\ 0\le\operatorname{Im}z\le\pi$.

5. $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Im}z\,dz,\quad \gamma-$ломаная линия, соединяющая точки $z_0=0,$ $z_1=i,\ z_2=2+i$.

6. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^2+4},\quad \gamma:|z-2i|=1.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)},\ z_0=1.$

8. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z}$.

9. $f(z)=\dfrac{2}{(z-i)(z+1)}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}dz$, $\quad \gamma:|z|=4$.

Вариант 24

1. $f(z)=\operatorname{Ln}z,\quad z_0=3-4i.$

2. $w=z\cos z.$

3. $v = 2xy + 3y, \quad f(0) = 0$.

4. $w = \dfrac{z+i}{z}, \quad G:$ полоса $\operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0$.

5. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\, dz, \quad \gamma -$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1 = 2i$ с точкой $z_2 = 1 - i$.

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{(z-1)^2 (z+3)}, \quad \gamma : |z| = 2.$

7. $f(z) = z^2 \cos \dfrac{1}{z^2}, \ z_0 = 0.$

8. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^2}.$

9. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^3}$.

10. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^{-z} dz}{z^2}, \quad \gamma : |z| = 3.$

Вариант 25

1. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = 2i.$

2. $w = \dfrac{z^2 + i}{z}.$

3. $u = x^3 - 3xy^2 - 2y, \quad f(0) = 0$.

4. $w = i(1 - z), \quad G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0,$ $z_2 = 1, \ z_3 = -i$.

5. $\int\limits_{\gamma} (z+2)\, dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i$;

6. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin z dz}{(z+i)^3}, \quad \gamma : |z| = 1{,}5.$

7. $f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+5\right)}$, $z_0=0$.

8. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$.

9. $f(z)=\dfrac{z^4}{(z+i)^2}$.

10. $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{z^2+1}dz$, $\gamma:|z|=3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – СПб: Лань, 2002.

2. Волковысский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексной переменной / Л.И. Волковысский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Физматлит, 2004.

3. Высшая математика для инженеров: в 2 т. / под ред. Н.А. Микулика. – Минск: Элайда, 2004. – Т. 2. – 586 с.

4. Математика для инженеров: в 2 т. / под ред. Н.А. Микулика. – Минск: Элайда, 2006. – Т. 2.

5. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001.