

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ.
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Реут Л.Е.

Потенциальная энергия деформации. Энергетические методы определения перемещений: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2022. – 101 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, доцент, заведующая лабораторией сверхтвёрдых и износостойких материалов Института порошковой металлургии им. академика О.В. Романа *Л.Н. Дьячкова*;

кандидат технических наук, доцент, декан факультета информационных технологий и робототехники Белорусского национального технического университета *А.М. Авсевич*

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает один из важных разделов курса, посвященный потенциальной энергии деформации, накапливаемой элементами при упругом деформировании. Определение энергии деформации является одним из наиболее важных вопросов в механике материалов, так как на ее вычислении основано решение многих практических задач – определение напряжений и оценка прочности элементов при различных случаях нагружения, вычисление деформаций и перемещений в узлах, определяющих жесткость конструкции и возникающие в ней деформационные изменения, решение статически неопределимых систем, разработка и проектирование элементов механизмов и машин, принцип работы которых основан на их способности накапливать энергию деформации, а затем производить новую работу за счет ее высвобождения, решение многих других инженерных задач, осуществление которого возможно только через вычисление энергии деформации. В пособии подробно представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

© Реут Л.Е., 2022

© Белорусский национальный

технический университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Работа внешних сил	5
2. Обобщенная сила и обобщенное перемещение. Теорема Клапейрона	8
3. Работа внутренних сил	9
4. Принцип возможных перемещений	12
5. Потенциальная энергия деформации	14
6. Виртуальная работа и виртуальное перемещение	17
7. Основные свойства перемещений	20
8. Энергетические методы определения перемещений	22
8.1. Теорема Кастилиано	22
8.2. Интеграл Максвелла-Мора	28
8.3. Графоаналитическое решение интеграла Мора. Метод перемножение эпюр	34
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	44
1. Определение перемещений через энергию деформаций и работу внешних сил	44
2. Определение перемещений методом Кастилиано	54
3. Определение перемещений с помощью интеграла Максвелла-Мора	61
4. Графоаналитический метод определения перемещений. Метод перемножения эпюр	69
 Литература	 101

ВВЕДЕНИЕ

При разработке инженерных конструкций главной задачей, решаемой в первую очередь, является обеспечение прочности, надежности и долговечности конструкции в заданных эксплуатационных условиях. Поэтому первостепенными и основными расчетами в механике материалов являются расчеты на прочность, которые связаны с вычислением напряжений и проектированием элементов конструкций под заданные рабочие нагрузки. Методики определения напряжений и расчетов на прочность достаточно полно разработаны как для простейших случаев нагружения – растяжения (сжатия), плоского изгиба, сдвига, кручения, так и для сложного сопротивления, когда элемент подвергается комбинации нескольких деформаций.

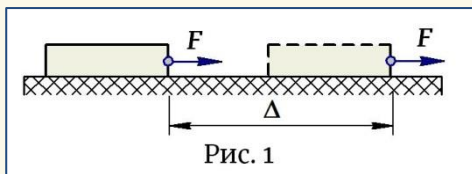
Однако помимо прочности не менее важным требованием является жесткость конструкции, ее способность в условиях силового (а иногда и температурного) воздействия деформироваться в пределах установленных технических норм, сохраняя в рабочем состоянии размеры и форму. Расчеты на жесткость связаны с деформациями, возникающими в элементах и узлах, и их вычисление является важной задачей не только при оценке жесткости конструкции, но и ее устойчивости, при расчете деталей на динамические нагрузки, при раскрытии статической неопределимости и оценке прочности и жесткости статически неопределимых систем и т.д. При простейших случаях нагружения существуют простые формулы, основанные на законе Гука и позволяющие вычислять в деталях линейные и угловые деформации. Однако в случае работы элемента в условиях сложного сопротивления применение указанных формул не представляется возможным. Для решения таких задач существуют другие методы, наиболее общим из которых является метод определения деформаций и перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации, накопленной в элементах в результате деформирования. Способы решения, основанные на вычислении потенциальной энергии деформации, а также законе сохранения энергии и принципе начала возможных перемещений, называются *энергетическими методами определения перемещений*. Они являются универсальными и могут быть использованы как для простейших случаев нагружения, так и для элементов, работающих в условиях сложного сопротивления.

При изучении данной темы в первую очередь необходимо научиться вычислять потенциальную энергию деформации для разных случаев нагружения. Вторым этапом изучения темы является вопрос использования этой энергии для определения деформаций, перемещений и решения задач жесткости конструкций.

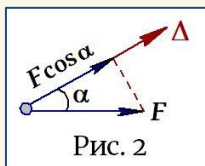
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Работа внешних сил (A_F)

Из физики известно, что если сила перемещает тело на некоторое расстояние, т.е. точка приложения силы получает перемещение, то эта сила на этом перемещении совершает работу (рис. 1), определяемую как : $A_F = F \cdot \Delta$.

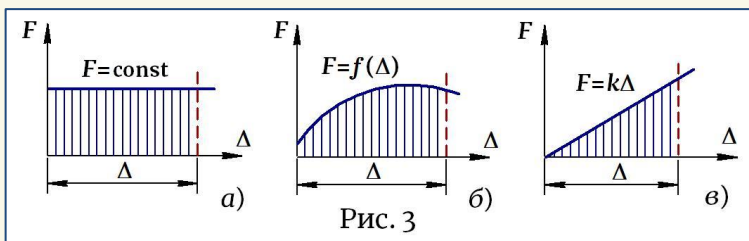


При этом следует помнить, что **сила может совершать работу только на перемещении по своему направлению**. Поэтому если на точку действует система сил и в результате этого действия точка получает некое перемещение Δ , не совпадающее с направлением сил, то работу на этом перемещении совершает не полная величина каждой силы, а ее часть – проекция на направление перемещения (рис. 2):



$$A_F = F \cos \alpha \cdot \Delta.$$

Величина работы, которую совершает сила на перемещении по своему направлению, зависит от характера изменения этой силы на перемещении. Рассмотрим диаграммы изменения силы на заданном перемещении и определим на этом перемещении ее работу (рис. 3).



! **Работа силы на перемещении определяется площадью диаграммы, ограниченной функцией изменения этой силы на участке перемещения Δ :**

★ если сила на перемещении постоянна ($F = \text{const}$), т.е. на момент воздействия уже имеет конечное значение (рис. 3, а), то ее работа на этом перемещении определяется как $A_F = F \cdot \Delta$;

★ если сила на заданном перемещении изменяется по некоторому закону $F = f(\Delta)$ (рис. 3, б) или $F = k\Delta$ (рис. 3, в), то работа этой силы как площадь диаграммы соответственно равна —

$$A_F = \int_0^{\Delta} f(\Delta) d\Delta \quad \text{и} \quad A_F = \frac{F \cdot \Delta}{2}.$$

Вернемся к задачам механики материалов и вопросу деформирования упругих тел. Здесь следует напомнить, что упругие деформации пропорциональны нагрузке, а поэтому закон изменения силы на упругих деформациях всегда линейный.

Рассмотрим диаграмму растяжения пластичной стали (рис. 4).

Полная работа, затраченная на растяжение и разрыв образца, определяется полной площадью диаграммы растяжения. Но в процессе деформирования на различных стадиях нагружения в образце возникают и упругие и пластические деформации, соотношение между которыми по мере возрастания нагрузки изменяется, но которые всегда присутствуют вместе до тех пор, пока образец находится под нагрузкой. Поэтому полную работу деформации в любой момент нагружения можно представить в виде суммы двух работ —

$$A_{\text{полн}} = A_{\text{упр}} + A_{\text{ост}},$$

считая, что часть работы затрачивается на упругую (обратимую) деформацию, а часть — на пластическую (остаточную).

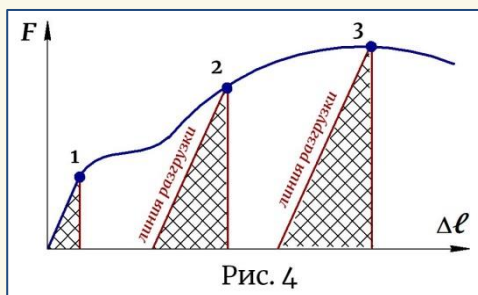
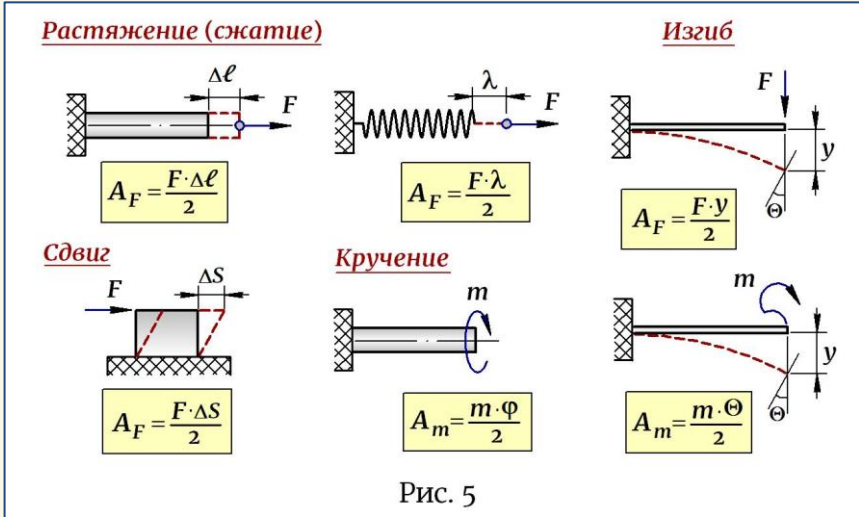


Рис. 4

Так, при нагружении до точки 1 возникают только упругие деформации и работа, затраченная на эти деформации, определяется соответствующей площадью диаграммы. При нагружении за предел текучести — до точек 2, 3 и т.д. — в образце уже присутствуют и упругие, и пластические деформации, и полная работа, затраченная на эти деформации, определяется площадью части диаграммы, ограниченной ординатами этих точек. Если в любой момент нагружения нагрузку сбросить, разгрузка пойдет по линии, параллельной участку пропорциональности, и часть площади, лежащая между линией разгрузки и ординатой точки, определит величину работы, затраченной к данному моменту нагружения на упругую деформацию. А это значит, что в любой момент нагружения работа, затраченная на упругую деформацию, даже за пределом текучести и наличие в образце пластических деформаций, всегда определяется площадью треугольника → $A_F = \frac{F \cdot \Delta}{2}$.

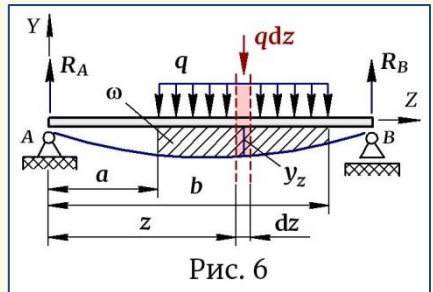
Исходя из этого, работа внешних сил на упругих деформациях для известных простейших деформаций соответственно равна (рис. 5):



Следует еще раз обратить внимание и запомнить, что сила может совершать работу только на перемещении по своему направлению, а это значит, что **сосредоточенная сила совершает работу только на линейном перемещении, а момент – на угловом, т.е. на угле поворота.**

Распределенная нагрузка интенсивностью q при упругом деформировании совершает работу на площади эпюры перемещений ω под этой нагрузкой, равную $A_q = q\omega/2$:

★ рассмотрим балку, находящуюся под действием системы сил, состоящей из равномерно распределенной нагрузки и реакций опор, из которых работу производит только распределенная нагрузка, поскольку перемещения по направлению опорных реакций равны нулю (рис. 6);



★ для определения работы нагрузки q рассмотрим в произвольном сечении Z бесконечно малый участок dz , в котором под действием силы qdz , являющейся равнодействующей на данном участке, возникает прогиб y_z и на котором данная сила совершает элементарную работу, равную $\rightarrow dA_q = (qdz \cdot y_z)/2$;

★ тогда полная работа нагрузки q на прогибах сечений по длине участка ее действия определится как:

$$A_q = \int_a^b \frac{qdz \cdot y_z}{2} = \frac{q}{2} \int_a^b y_z dz = \frac{q\omega}{2},$$

где $\omega = \int_a^b y_z dz$ — площадь фигуры между первоначальной и изогнутой осями балки. Таким образом, перемещением для распределенной нагрузки является площадь эпюры прогибов под этой нагрузкой.

2. Обобщенная сила и обобщенное перемещение. Теорема Клапейрона

Обобщая вышесказанное относительно работы внешних сил на упругих деформациях и их способности производить работу только на определенных перемещениях (рис. 5), введем понятие **ОБОБЩЕННОЙ СИЛЫ** и **ОБОБЩЕННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ**.

Под **ОБОБЩЕННОЙ СИЛОЙ** (F_i) понимается любая внешняя нагрузка, приложенная к упругой системе и вызывающая соответствующее перемещение. Это — сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка или сочетание сил, включая реакции опор.

Под **ОБОБЩЕННЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ** (Δ_i) понимается перемещение, на котором обобщенная сила совершает работу. Следовательно, для сосредоточенной силы таким перемещением будет линейное перемещение, для момента — угол поворота, для распределенной нагрузки — площадь эпюры перемещений под этой нагрузкой.

И тогда работа внешних сил на упругих деформациях в общем виде может быть записана как:

$$A_F = \frac{F_i \Delta_i}{2}, \quad (1)$$

где выражение (1) называется **теоремой Клапейрона** →

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего ей обобщенного перемещения.

Если к телу приложена система сил, то их полная работа на основании теоремы Клапейрона определится как:

$$A_F = \frac{1}{2} \sum F_i \cdot \Delta_i . \quad (2)$$

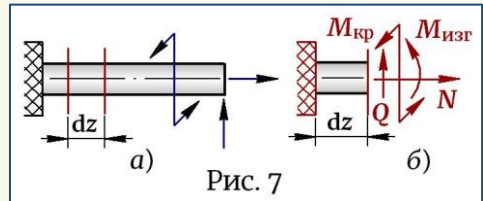
3. Работа внутренних сил ($A_{вн}$)

При нагружении тела внешними силами элемент деформируется, что является следствием смещения частиц материала в новое положение, и на этом перемещении внешние силы совершают работу. Но в результате деформирования в телах возникают внутренние силы (силы упругого сопротивления), которые после снятия нагрузки восстанавливают первоначальные размеры и форму элемента, возвращая перемещенные частицы в исходное положение. А значит, внутренние силы совершают работу на тех же перемещениях, что и внешние силы, но в обратном направлении.

Рассмотрим элемент, нагруженный системой внешних сил, выделим в нем бесконечно малый участок длиной dz (рис. 7, а), зафиксируем его левую сторону (рис. 7, б) и, полагая, что в сечении возникают шесть внутренних усилий \rightarrow

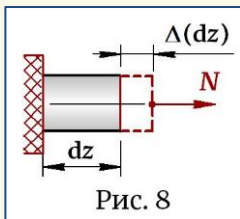
$$N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{кр}$$

определим работу этих сил на соответствующих перемещениях.



① Работа продольной силы N

Внутренняя продольная сила N для рассматриваемой части стержня является внешней силой (рис. 8), а поэтому, согласно теореме Клапейрона (1), на удлинении $\Delta(dz)$ она совершает работу —



$$dA_N = \frac{N \cdot \Delta(dz)}{2} = \left\| \Delta(dz) = \frac{Ndz}{EA} \right\| = \frac{N^2 dz}{2EA} .$$

Тогда **полная работа продольной силы** на удлинении всего стержня равна:

$$A_N = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} , \quad (3)$$

где EA — жесткость сечения при растяжении (сжатии).

② Работа поперечных сил Q_x и Q_y

Рассмотрим сдвиг в направлении поперечной силы Q и определим ее работу на перемещении ΔS . Для рассматриваемой части стержня сила Q также является внешней (рис. 9), поэтому согласно (1) —

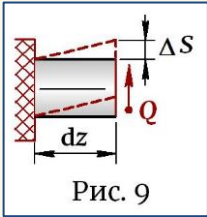


Рис. 9

$$dA_Q = \frac{Q \cdot \Delta S}{2} = \left\| \Delta S = \frac{Q dz}{GA} \right\| = \frac{Q^2 dz}{2GA},$$

а ее полная работа на деформации стержня равна:

$$A_Q = \int_0^{\ell} k \frac{Q^2 dz}{2GA},$$

где k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения и характера распределения в сечении касательных напряжений. При *чистом сдвиге* (равномерном распределении касательных напряжений) $k = 1$; при сдвиге, сопутствующем поперечному изгибу, касательные напряжения в сечении распределены неравномерно и для разных типов поперечных сечений коэффициент k вычисляется отдельно. Так, для прокатных профилей приближенно $k = A/A_c$, где A_c — площадь стенки; для круглого сечения $k = 32/27$; для прямоугольного $k = 1,2$.

Рассматривая пространственную задачу и случай одновременного действия в сечении поперечных сил Q_x и Q_y в двух взаимно перпендикулярных направлениях, **полная работа поперечных сил** на соответствующих перемещениях определяется как:

$$A_{Q_x} = \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA}; \quad A_{Q_y} = \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA}, \quad (4)$$

где GA — жесткость сечения при сдвиге.

③ Работа изгибающих моментов M_x и M_y

Определим работу изгибающего момента $M_{изг}$ в направлении его действия на угле поворота сечения. Как и в предыдущих случаях, момент по отношению к рассматриваемой части стержня является внешней нагрузкой (рис. 10), поэтому согласно (1) его работа равна —

$$dA_{M_{изг}} = \frac{M_{изг} \cdot \Theta}{2} \quad (a).$$

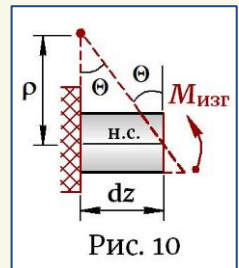


Рис. 10

Определим значение угла поворота Θ . В силу малости деформаций, принимая $\text{tg } \Theta \approx \Theta = \frac{dz}{\rho}$, откуда $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\Theta}{dz}}$ (б), и учитывая, что кривизна

балки связана с моментом выражением $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_{\text{н.о.}}}}$ (в), приравниваем

значения (б) и (в) $\rightarrow \frac{\Theta}{dz} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_{\text{н.о.}}}$ и получаем: $\Theta = \frac{M_{\text{изг}} dz}{EI_{\text{н.о.}}}$. Тогда ра-

бота изгибающего момента на повороте сечения выделенной части стержня согласно выражению (а) равна — $dA_{M_{\text{изг}}} = \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_{\text{н.о.}}}$.

Рассматривая пространственную задачу и случай одновременного действия в сечении изгибающих моментов M_x и M_y в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, **полная работа изгибающих моментов** на соответствующих перемещениях определяется как:

$$\boxed{A_{M_x} = \int_0^{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}; A_{M_y} = \int_0^{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}}, \quad (5)$$

где EI — жесткость сечения при изгибе.

④ **Работа крутящего момента $M_{\text{кр}}$**

Работа крутящего момента $M_{\text{кр}}$ на угле закручивания сечения φ , учитывая, что по отношению к рассматриваемой части стержня момент является внешней нагрузкой (рис. 11), может быть определена по теореме Клапейрона (1) как —

$$dA_{M_{\text{кр}}} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \varphi}{2} = \left\| \varphi = \frac{M_{\text{кр}} dz}{GI_{\rho}} \right\| = \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}};$$

Тогда **полная работа крутящего момента $M_{\text{кр}}$** на всей длине стержня равна —

$$\boxed{A_{M_{\text{кр}}} = \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}}}, \quad (6)$$

где GI_{ρ} — жесткость сечения при кручении.

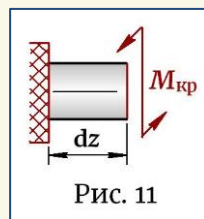


Рис. 11

Тогда в общем случае пространственного нагружения, когда в сечении одновременно действуют все шесть внутренних усилий, *полная работа внутренних сил* $A_{\text{вн}}$ на основании выражений (3)–(6) может быть вычислена по формуле (7):

$$A_{\text{вн}} = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}} .$$

Таким образом, для любого случая сложного сопротивления, т.е. для любой заданной комбинации деформаций, определив внутренние силы *методом сечений*, выбираем из полученного выражения $A_{\text{вн}}$ (7) слагаемые, соответствующие данной комбинации, и вычисляем работу внутренних сил для этого случая.

4. Принцип возможных перемещений

Работа внешних и внутренних сил на соответствующих перемещениях связана между собой на основании **«ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ»**. Это основной принцип механики и в применении к упругим телам он является следствием закона сохранения энергии —

|| При статическом деформировании упругой системы суммарная работа внешних и внутренних сил на любых возможных перемещениях равна нулю —

$$A_F + A_{\text{вн}} = 0 . \quad (8)$$

Под **возможными перемещениями** понимаются любые элементарные перемещения точек механической системы, допускаемые наложенными на систему связями. Это — воображаемые перемещения (их называют еще *виртуальными*), которые могут и не происходить, но если возникают, они должны быть бесконечно малыми, чтобы конфигурация системы и ее положение для данных условий равновесия оставались неизменными, а также должны сохраняться наложенные на систему связи, определяющие ее вид. Более подробно *возможные перемещения* и причины их возникновения будут рассмотрены ниже.

Принцип возможных перемещений, сформулированный для материальной точки, носит название принципа Бернулли —

|| Если материальная точка находится в равновесии, то полная работа всех сил, приложенных к ней, на любом перемещении равна нулю.

Для доказательства принципа Бернулли рассмотрим точку, которая находится под действием системы сил и в результате этого действия получает в некотором направлении перемещение Δ (рис. 12, а). Но так как сила может совершать работу только по своему направлению,

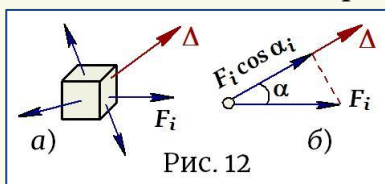


Рис. 12

то на перемещении Δ работу совершает не полная величина каждой силы, а только ее часть – проекция ($F_i \cos \alpha_i$) на направление перемещения (рис. 12, б). И тогда работа каждой силы на этом перемещении определяется как $A_i = (F_i \cos \alpha_i \cdot \Delta)$, а полная работа всех сил на перемещении Δ будет равна:

$$A_{\text{полн}} = \sum A_i = \sum (F_i \cos \alpha_i \cdot \Delta) = \Delta \cdot \sum (F_i \cos \alpha_i),$$

где $\sum (F_i \cos \alpha_i)$ – сумма проекций всех сил на перемещение Δ . Но так как система находится в равновесии, то **сумма проекций всех сил на любое направление** должна быть равна нулю, т.е. $\sum (F_i \cos \alpha_i) = 0$, откуда получаем $\rightarrow \boxed{A_{\text{полн}} = 0}$.

Это является условием равновесия любой материальной точки, а также совокупности точек, образующих механическую систему, для которого необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему сил на любых возможных ее перемещениях была равна нулю. Принцип начала возможных перемещений относится к любой материальной точке – свободной или входящей в состав твердого тела. В теоретической механике для механической системы, состоящей из абсолютно твердых (недеформируемых) тел, учитывается работа только внешних сил A_F . В механике материалов помимо работы внешних сил необходимо рассматривать также работу внутренних сил $A_{\text{вн}}$ (сил упругого сопротивления), поэтому применительно к упруго деформируемым телам, где действуют и внешние, и внутренние силы, суммарная работа этих сил в условиях статического нагружения будет равна нулю (8). Отсюда следует, что работа внутренних сил равна работе внешних сил, но противоположна ей по знаку – $\boxed{A_F = -A_{\text{вн}}}$, что соответствует закону сохранения энергии, принимая, что в идеально упругих телах никакой другой работы, кроме как работы по деформированию тела, внешние силы не производят. При равновесии системы внешние и внутренние силы равны по величине, но работа внешних сил является *положительной*, так как

направление деформации и перемещение точек совпадает с направлением действия силы, а работа внутренних сил – *отрицательна*, так как они препятствует развитию деформаций и направлены противоположно перемещениям. Но упругая система после снятия нагрузки возвращается в первоначальное состояние и работу по ее восстановлению совершают внутренние силы, только теперь работа внутренних сил (при отсутствии внешних) является *положительной*, так как их направление совпадает с направлением перемещений.

Принцип начала возможных перемещений для абсолютно твердых тел был сформулирован Лагранжем в 1788 г. и впервые применен к деформируемым телам Пуассоном в 1833 г.

5. Потенциальная энергия деформации

Рассмотрим энергетическую сторону упругой деформации на примере простого растяжения (рис. 13).

Нагружаем стержень статической нагрузкой путем постепенного подвешивания очень малых грузов ΔF . Так как груз первоначально поднят над Землей, он обладает некоторым запасом потенциальной энергии. При добавлении дополнительной нагрузки ΔF груз опускается и его потенциальная энергия уменьшается, а стержень дополнительно растягивается, и энергия, потерянная грузом при опускании, не исчезает, а согласно закону сохранения энергии, полностью превращается в потенциальную энергию деформации U стержня.

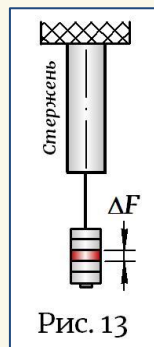
Полное преобразование одного вида потенциальной энергии в другую возможно только при статическом нагружении, когда деформация системы происходит без нарушения ее равновесия, при этом потерями на тепловые, магнитные и др. явления можно пренебречь.

Числовой мерой уменьшения потенциальной энергии поднятого над Землей тела при его опускании, и соответственно, мерой увеличения энергии деформации стержня U является величина работы A_F , производимой внешними силами на этом перемещении:

$$U = A_F \quad (9)$$

потенциальная энергия деформации численно равна работе внешних сил, проделанной ими на этой деформации.

И тогда, в соответствии со значениями (8) и (9) получаем:



$$U = -A_{\text{вн}} \quad (10)$$

потенциальная энергия деформации численно равна работе внутренних сил, взятой с обратным знаком, где «минус» означает, что внутренние силы, выполняя работу, снижают энергию деформированного тела.

Таким образом, величина потенциальной энергии деформации определяется величиной работы внешних сил *при нагружении тела* и проявляется в виде работы внутренних сил *при его разгрузке*. Исходя из определения, что энергия – это способность тела совершать работу, можно потенциальной энергии деформации придать физический смысл — *это есть энергия внутренних сил, равная их работе, которую они совершают при переводе упругой системы из деформированного состояния в состояние с нулевой деформацией*. А значит, потенциальная энергия деформации может быть выражена через внутренние силы и, согласно формуле (7), вычислена как (11):

$$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}}$$

Следует заметить, что при вычислении энергии деформации не все слагаемые в формуле (11) являются равнозначными по величине. Так, при изгибе и кручении, а также их комбинациях с другими деформациями, поперечные Q и продольные N силы, по сравнению с изгибающими и крутящим моментами, оказывают очень незначительное влияние на изменение энергии деформации, поэтому при рассмотрении соответствующих комбинаций этими силами, как правило, пренебрегают. При других условиях нагружения можно пренебречь другими слагаемыми. Таким образом, в каждом конкретном случае делается оценка деформации и задача, по возможности, упрощается.

При вычислении потенциальной энергии, лежащей в основе энергетических методов определения перемещений, необходимо принимать во внимание важные особенности, вытекающие из формулы (11):

- ① Потенциальная энергия является *квадратичной функцией обобщенных сил* (или *обобщенных перемещений*, которые линейно связаны с обобщенными силами), а значит, она всегда *положительна*.
- ② Потенциальная энергия *не зависит от порядка приложения сил*, а определяется только конечными значениями сил и перемещений.
- ③ Потенциальная энергия как квадратичная функция обобщенных сил *не подчиняется принципу независимости действия сил*.

ПРИМЕР. Стержень длиной ℓ подвергается кручению моментами m_1 и m_2 (рис. 14). Определим потенциальную энергию в стержне, накопленную от закручивания заданными моментами.

Стержень испытывает только деформацию кручения, поэтому используем для вычисления энергии деформации последнее слагаемое в формуле U (11). Решение задачи выполним двумя способами:

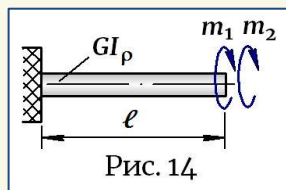


Рис. 14

1. Определим энергию деформации на основании *принципа независимости действия сил*, т.е. как сумму накопленных энергий от каждого момента в отдельности. Принимая крутящие моменты в сечении равными $M_{кр(1)} = m_1$ и $M_{кр(2)} = m_2$, получаем:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр(1)}^2 dz}{2GI_{\rho}} + \int_0^{\ell} \frac{M_{кр(2)}^2 dz}{2GI_{\rho}} = \int_0^{\ell} \frac{m_1^2 dz}{2GI_{\rho}} + \int_0^{\ell} \frac{m_2^2 dz}{2GI_{\rho}} = \frac{m_1^2 \ell}{2GI_{\rho}} + \frac{m_2^2 \ell}{2GI_{\rho}}. \quad (a)$$

2. Определим энергию деформации, предполагая, что закручивание стержня происходит от суммарного действия моментов и крутящий момент в сечении равен $M_{кр} = m_1 + m_2$:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_{\rho}} = \int_0^{\ell} \frac{(m_1 + m_2)^2 dz}{2GI_{\rho}} = \frac{m_1^2 \ell}{2GI_{\rho}} + \frac{m_1 m_2 \ell}{GI_{\rho}} + \frac{m_2^2 \ell}{2GI_{\rho}}. \quad (б)$$

Сравнение значений (а) и (б) показывает, что результаты не совпадают. Так как сумма квадратов не равна квадрату суммы, при расчете

по *принципу суперпозиции* происходит потеря слагаемого $\frac{m_1 m_2 \ell}{GI_{\rho}}$,

что в дальнейшем при вычислении перемещений приведет к ошибочному результату. **Поэтому принцип независимости действия сил при определении энергии деформации использовать НЕЛЬЗЯ!**

В завершении вопроса следует напомнить, что при деформировании упругого тела работа сил затрачивается на два процесса: на сообщение частицам кинетической энергии движения K и на накопление потенциальной энергии деформации U , и значит, $A_F = K + U$. Но если сила прикладывается медленно, т.е. скорость приложения стремится к нулю, то можно принять $K = 0$ и считать, что работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации — $A_F = U$. В этом заключается суть статического нагружения.

6. Виртуальная работа и виртуальное перемещение

Правильный расчет потенциальной энергии позволит правильно определять деформации элементов и перемещения узлов, а значит, правильно решать задачи жесткости при нагружении конструкций.

А для этого необходимо учитывать очень важную особенность — *сила может совершать работу не только на том перемещении, которое она сама вызывает, но и на перемещении по своему направлению, но вызванном другой силой*. Эта работа называется **ВИРТУАЛЬНОЙ (или ВОЗМОЖНОЙ) РАБОТОЙ**, а перемещение, на котором она совершается — **ВИРТУАЛЬНЫМ (или ВОЗМОЖНЫМ) ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ**. Виртуальная работа вносит свой энергетический вклад в накопление энергии деформации и при вычислении последней должна быть обязательно учтена. Потеря этой части энергии приведет к ошибочным результатам расчета деформаций и перемещений.

Рассмотрим вопрос на примере плоского изгиба балки (рис. 15):

① Нагрузим балку в *точке 1* силой F_1 , под действием которой балка прогнется и *точка 1* получит перемещение Δ_{11} (рис. 15, а), где двойной индекс означает — первая цифра указывает силу, по направлению которой происходит перемещение; вторая цифра — силу, вызвавшую это перемещение. Следовательно, Δ_{11} — это перемещение *точки 1* по направлению силы F_1 и вызвано это перемещение силой F_1 .

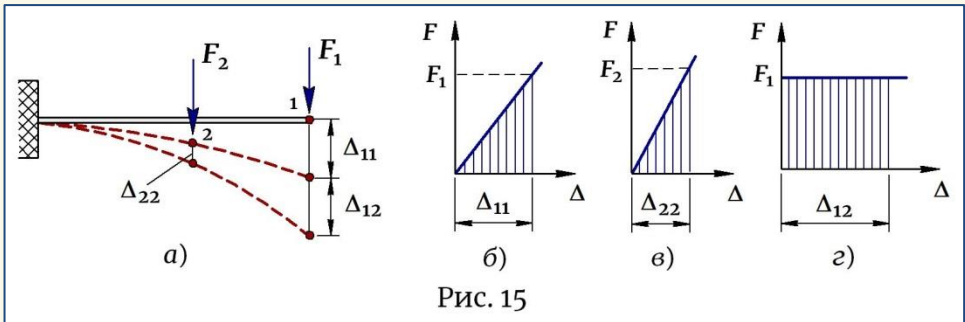


Рис. 15

Так как действие силы F_1 возрастает от нуля до конечного значения, изменяясь при упругих деформациях по линейному закону, работа силы F_1 на перемещении Δ_{11} определяется площадью треугольника диаграммы нагружения (рис. 15, б) и согласно теореме Клапейрона равна:

$$A_{11} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (a)$$

② Далее, не убирая силу F_1 , прикладываем к изогнутой балке в *точке 2* силу F_2 (рис. 15, а), в результате чего балка прогибается еще больше и *точка 2* под действием F_2 получает перемещение Δ_{22} . Сила F_2 также возрастает от нуля до конечного значения (рис. 15, в) и работа этой силы на перемещении Δ_{22} по диаграмме нагружения также определяется как площадь треугольника и равна:

$$A_{22} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}. \quad (б)$$

Работа, которую совершает сила на перемещении точки своего приложения и вызвано это перемещение этой же силой, называется **ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ РАБОТОЙ**, а само перемещение – **ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ**.

Значит, работы A_{11} (а) и A_{22} (б) – это **действительные работы** сил F_1 и F_2 на перемещениях по своему направлению, которые сами эти силы и вызвали, а Δ_{11} и Δ_{22} – **действительные перемещения**.

③ Однако от действия силы F_2 *точка 1* также получила перемещение, которое мы обозначаем Δ_{12} , т.е. перемещение точки приложения силы F_1 , но вызвано оно силой F_2 (рис. 15, а). Так как точка приложения силы F_1 перемещается на Δ_{12} , значит, на этом перемещении эта сила также совершает работу. Но поскольку на момент приложения силы F_2 сила F_1 уже достигла конечного значения, значит, на перемещении Δ_{12} она постоянна (рис. 15, з) и ее работа на этом перемещении определяется как площадь прямоугольника:

$$A_{12} = F_1 \Delta_{12}. \quad (в)$$

Перемещение точки приложения одной силы, но вызванное другой силой, называется **ВИРТУАЛЬНЫМ** (или **ВОЗМОЖНЫМ**) **ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ**, а работа силы на виртуальном перемещении называется **ВИРТУАЛЬНОЙ** (или **ВОЗМОЖНОЙ**) **РАБОТОЙ**.

Следовательно, Δ_{12} – это **виртуальное перемещение**, а A_{12} (в) – это **виртуальная работа**. И тогда **полная потенциальная энергия деформации**, накопленная в балке от действия двух сил, согласно закону сохранения энергии и на основании значений (а)–(в) равна:

$$U = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_1 \Delta_{12}. \quad (г)$$

Примечание.

Обратите внимание на последнее слагаемое в выражение (з). Если не учитывать работу силы на виртуальном перемещении, будет получено неверное значение потенциальной энергии и это внесет ошибку в дальнейшие расчеты по определению перемещений. Именно такой виртуальной работой является слагаемое $m_1 m_2 \ell / GI_p$ в примере, рассмотренном в п. 5,

которое представляет собой работу момента m_1 на угле поворота, вызванном моментом m_2 :
$$m_2 : \frac{m_1 m_2 \ell}{GI_p} = m_1 \cdot \frac{m_2 \ell}{GI_p} = \left\| \frac{m_2 \ell}{GI_p} = \varphi_{12} \right\| = m_1 \varphi_{12} .$$

Как было сказано выше, под возможными (виртуальными) перемещениями понимаются очень малые воображаемые перемещения, которые для точек механической системы допускаются наложенными на систему связями без их нарушения. Возможные перемещения точек могут быть вызваны различными реальными или виртуальными воздействиями — силами, приложенными в других точках, температурными изменениями, другими техническими причинами. Механическая система может одновременно иметь несколько возможных перемещений. Возможные перемещения, возникающие в деформируемых телах, связаны, как правило, с деформациями, они отражают характер и особенности наложенных на систему связей и не зависят от величины и направления активных сил. Однако возможные перемещения нельзя путать с действительным перемещением, которое является лишь одним из этих возможных и которое обусловлено для точки не только характером связи, но и действующими на нее силами, массой, начальными условиями ее движения. В процессе совершения системой виртуального (возможного) перемещения значение и направление внешних и внутренних сил на этом перемещении считаются неизменными. Возможная работа внешних и внутренних сил на перемещениях, вызванных другими воздействиями, совершается уже существующими силами, имеющими на данный момент конечное значение, а поэтому определяется простым произведением соответствующих сил и перемещений. Возможная работа, как и действительная, может быть положительной, если направление перемещения совпадает с направлением силы, и отрицательной, если указанные направления не совпадают. Учитывая принятое в механике материалов допущение о малости деформаций и линейную зависимость деформаций от нагрузок, в качестве возможных перемещений можно принимать конечные упругие перемещения, вызванные любым видом внешней нагрузки и происходящие без нарушения связей.

7. Основные свойства перемещений

Установим зависимость между деформациями в различных сечениях балки, пользуясь понятием потенциальной энергии.

Рассмотрим балку, нагружаемую силами F_1 и F_2 , и вычислим в ней потенциальную энергию деформации для двух состояний нагружения, изменяя порядок приложения сил.

СОСТОЯНИЕ I (рис. 16). Нагрузим балку в *точке 1* силой F_1 , под действием которой балка прогнется, *точка 1* получит перемещение Δ_{11} и сила F_1 на этом перемещении совершит работу, равную:

$$A_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2 .$$

Далее, не отнимая силу F_1 , прикладываем к изогнутой балке в *точке 2* силу F_2 , в результате чего балка прогибается еще больше, *точка 2* под действием F_2 получит перемещение Δ_{22} и сила на этом перемещении совершит работу: $A_{22} = F_2 \Delta_{22} / 2$.

Но под действием силы F_2 *точка 1* получает дополнительное перемещение Δ_{12} , на котором сила F_1 также совершает работу, равную $A_{12} = F_1 \Delta_{12}$. Потенциальная энергия деформации, накопленная в первом состоянии, будет численно равна сумме работ, производимой силами на соответствующих перемещениях:

$$U_I = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_1 \Delta_{12} . \quad (a)$$

СОСТОЯНИЕ II (рис. 17). Изменим порядок нагружения балки. Первоначально нагрузим балку в *точке 2* силой F_2 , под действием которой балка прогнется, *точка 2* получит перемещение Δ_{22} и сила F_2 на этом перемещении совершит работу, равную: $A_{22} = F_2 \Delta_{22} / 2$.

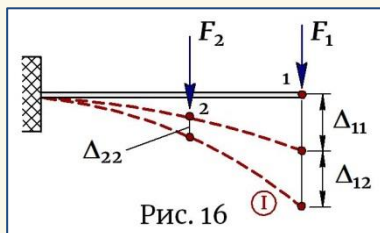


Рис. 16

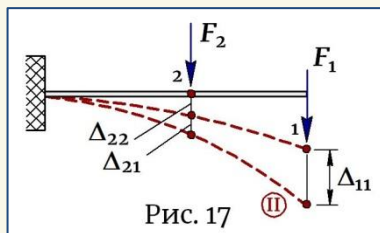


Рис. 17

Далее, не убирая силу F_2 , прикладываем к балке в *точке 1* силу F_1 ,

в результате чего балка прогибается еще больше, **точка 1** под действием F_1 получает перемещение Δ_{11} и сила на этом перемещении совершит работу: $A_{11} = F_1 \Delta_{11} / 2$.

Но под действием силы F_1 **точка 2** получает дополнительное перемещение Δ_{21} , на котором сила F_2 также совершает работу, равную $A_{21} = F_2 \Delta_{21}$. Потенциальная энергия деформации, накопленная во втором состоянии, будет численно равна сумме работ, производимой силами на соответствующих перемещениях:

$$U_{II} = A_{11} + A_{22} + A_{21} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_2 \Delta_{21}. \quad (б)$$

Так как величина энергии деформации не зависит от порядка приложения сил, а определяется только конечными значениями сил и перемещений, то $U_I = U_{II}$. Приравниваем значения (а) и (б):

$$\frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_1 \Delta_{12} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} + F_2 \Delta_{21}, \quad \text{откуда}$$

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \quad - \text{ теорема о взаимности работ (теорема Бетти) } -$$

|| Работа силы F_1 на перемещении, вызванном силой F_2 , равна работе силы F_2 на перемещении, вызванном силой F_1 .

Применяя теорему Бетти к частному случаю нагружения, когда силы одинаковы ($F_1 = F_2 = F$), получаем **теорему о взаимности перемещений (теорема Максвелла)** — $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ (рис. 18) —

|| Перемещение точки 2 под действием силы, приложенной в точке 1, равно перемещению точки 1 под действием силы, приложенной в точке 2.

Если в обоих состояниях прикладываются единичные силы ($\bar{F}_1 = 1, \bar{F}_2 = 1$), то теорема о взаимности перемещений имеет вид —

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \text{где } \delta - \text{ перемещение от единичной нагрузки.}$$

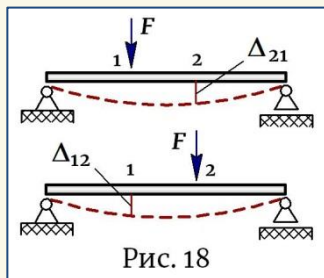
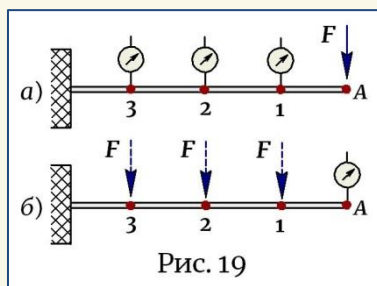


Рис. 18

Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений играют важную роль в общей теории исследования напряженного и деформированного состояния стержней, пластинок, оболочек и других конструкций и имеют большое практическое значение. Их применение существенно упрощает решение многих задач строительной механики, решение практических задач, например, при выполнении опытных замеров по определению перемещений, в том числе, в труднодоступных местах. Так, например, если в балке (рис. 19) от действия силы F , приложенной на конце консоли A , необходимо измерить прогибы в сечениях 1, 2, 3, нет необходимости устанавливать датчики во всех указанных точках (рис. 19, а) или переносить прибор от одной точки к другой, что крайне неудобно и может привести к ошибкам измерения. Для этого достаточно установить датчик на конце консоли (рис. 19, б), а силу F последовательно прикладывать в заданных сечениях 1, 2, 3. Измеренные на конце консоли прогибы, согласно теореме Максвелла, будут равны прогибам точек 1, 2, 3 от силы F , приложенной в точке A .



8. Энергетические методы определения перемещений

Определив потенциальную энергию деформации U (10) для заданного случая нагружения, переходим к методам определения перемещений с использованием этой энергии. Рассмотрим данный вопрос на примере плоского изгиба балки, однако полученные результаты могут быть использованы для любых других деформаций, в том числе, для сложного сопротивления.

8.1. Теорема Кастилиано

Рассмотрим балку, нагруженную системой сил, например, силой F и распределенной нагрузкой q , приложенных одновременно, и определим перемещение y_F , возникающее в точке приложения силы F , но являющееся результатом действия всех сил (рис. 20).

① Под действием системы сил балка изгибается и принимает **состояние I** (рис. 20). Накопленная в данном состоянии энергия деформации

ции определяется работой сил на соответствующих перемещениях и численно равна:

$$\boxed{U_I} = A_F + A_q = U_F + U_q = \frac{F y_F}{2} + U_q, \quad (a)$$

где $U_F = \frac{F y_F}{2}$ — энергия, накопленная за счет *действительной работы* силы F на перемещении y_F ; U_q — энергия, накопленная вследствие изгиба от нагрузки q .

② Далее, не нарушая равновесия системы, переведем балку в **состояние II**, что можно сделать, приложив к балке дополнительную нагрузку, либо незначительно увеличив одну из действующих сил, например, силу F на величину dF (рис. 20). Так как потенциальная энергия является функцией нескольких переменных, т.е. нескольких сил — $U = f(F, q, \dots)$, то, как известно из математического анализа, приращение одной из переменных на бесконечно малую величину dF приведет к приращению функции на величину дифференциала, равного

$$\boxed{dU = \frac{\partial U}{\partial F} dF}. \quad \text{Тогда потенциальная энергия в } \textit{состоянии II} \text{ будет равна энергии, накопленной в } \textit{состоянии I} \text{ (a), плюс приращение } dU :$$

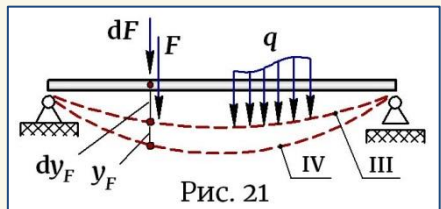
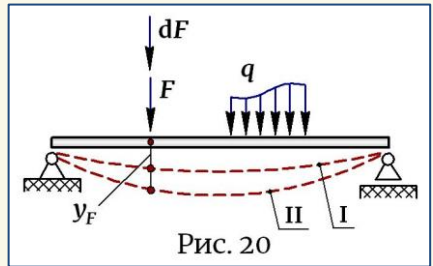
$$\boxed{U_{II}} = U_I + dU = \frac{F y_F}{2} + U_q + \frac{\partial U}{\partial F} dF. \quad (б)$$

③ А теперь произведем нагружение в *обратном порядке* (рис. 21).

Сначала в точке, где была приложена сила F , приложим силу dF , которая вызовет перемещение dy_F и приведет балку в **состояние III**. Величина энергии деформации в этом состоянии определяется *действительной работой* силы на перемещении:

$$\boxed{U_{III}} = \frac{dF dy_F}{2}. \quad (в)$$

Далее, не убирая силу dF , приложим в первоначально заданных местах силу F и нагрузку q и пере-



ведем балку в **состояние IV**. Потенциальная энергия деформации в этом состоянии будет определяться энергией, накопленной в **состоянии III** (в), плюс дополнительная энергия — U_q вследствие изгиба от

нагрузки q , $U_F = \frac{F y_F}{2}$ — энергия за счет *действительной работы* силы F на перемещении y_F , а также энергия за счет *виртуальной работы* силы dF на перемещении y_F , равная $dF y_F$:

$$U_{IV} = U_{III} + \frac{F y_F}{2} + U_q + dF y_F = \frac{dF dy_F}{2} + \frac{F y_F}{2} + U_q + dF y_F. \quad (z)$$

④ Так как величина потенциальной энергии не зависит от порядка приложения сил, то $U_{II} = U_{IV}$. Приравниваем выражения (б) и (z) —

$$\frac{F y_F}{2} + U_q + \frac{\partial U}{\partial F} dF = \frac{dF dy_F}{2} + \frac{F y_F}{2} + U_q + dF y_F,$$

сокращаем одинаковые слагаемые в левой и правой частях уравнения и, пренебрегая слагаемым $\frac{dF dy_F}{2}$ в силу его малости, получаем:

$$y_F = \frac{\partial U}{\partial F} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Прогиб точки приложения сосредоточенной силы равен} \\ \text{частной производной потенциальной энергии деформации по этой силе.} \end{array} \right.$$

⑤ Если на балку действует система сил и требуется определить *угол поворота* сечения, где приложен момент m (рис. 22), то следует брать производную потенциальной энергии по этому моменту:

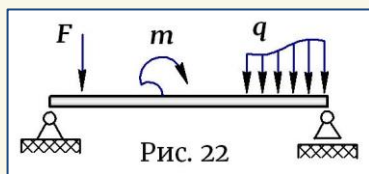


Рис. 22

$$\Theta_m = \frac{\partial U}{\partial m} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Угол поворота сечения, в котором приложен сосредото-} \\ \text{ченный момент, равен частной производной по-} \\ \text{тенциальной энергии деформации по этому моменту.} \end{array} \right.$$

Примечание.

Линейное перемещение определяется как производная энергии по силе, а угол поворота — по моменту. При этом, и сила, и момент должны быть обязательно приложены в точках, где требуется определить соответствующие перемещения.

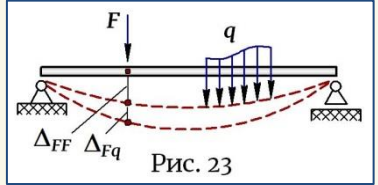
Обобщая сказанное, получаем **теорему Кастилиано**, лежащую в основе энергетических методов определения перемещений:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Частная производная от потенциальной энергии по} \\ \text{обобщенной силе равна обобщенному перемещению.} \end{array} \right.$$

Примечание.

Теорема Кастилиано может быть доказана и другим образом, если рассматривать энергетическое состояние балки при последовательном нагружении системой сил (рис. 23).

Первоначально нагружим балку силой F , под действием которой балка прогибается и точка приложения силы получает перемещение Δ_{FF} , где первый индекс указывает силу, по направлению которой происходит перемещение, а второй – силу, вызвавшую это перемещение. Затем нагружаем балку дополнительной системой сил и накопленная энергия деформации в полученном состоянии определяется энергией, приобретенной ранее при первоначальном нагружении, плюс энергией за счет работы сил при дополнительном нагружении:



$$U = U_{FF} + U_q + U_{Fq} = \frac{1}{2} F \Delta_{FF} + U_q + F \cdot \Delta_{Fq}, \quad (a)$$

где $U_{FF} = \frac{1}{2} F \Delta_{FF}$ – энергия, определяемая действительной работой силы F на перемещении Δ_{FF} ; U_q – энергия, определяемая работой дополнительной системы сил; $U_{Fq} = F \cdot \Delta_{Fq}$ – энергия, определяемая виртуальной работой силы F на перемещении Δ_{Fq} , вызванном дополнительными силами.

Представив перемещение $\Delta_{FF} = \delta_{FF} F$, где δ_{FF} – перемещение от единичной силы, энергия деформации (a) принимает вид:

$$U = \frac{1}{2} F^2 \delta_{FF} + U_q + F \cdot \Delta_{Fq}. \quad (б)$$

Произведем дифференцирование функции энергии (б) по силе F и с учетом значения $\Delta_{FF} = \delta_{FF} F$ получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_{FF} F + \Delta_{Fq} = \Delta_{FF} + \Delta_{Fq},$$

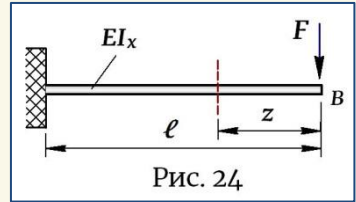
где $\Delta_{FF} + \Delta_{Fq} = \Delta_F$ – прогиб по направлению силы F как результат действия на балку всей системы сил. Следовательно: $\Delta_F = \partial U / \partial F$.

Теорема Кастилиано была опубликована в 1875 г. Рассмотрим применение метода Кастилиано на примерах.

ПРИМЕР 1. В балке (рис. 24) определить прогиб в точке B .

На основании формулы (11) потенциальная энергия деформации при плоском изгибе определится слагаемыми:

$$U = \int_0^{\ell} k \frac{Q^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x}.$$



Однако учитывая, что потенциальная энергия, накопленная от действия поперечной силы Q (сдвига), незначительна по сравнению с энергией, накопленной от изгиба, здесь и в дальнейшем слагаемым с поперечной силой будем пренебрегать.

В соответствии с теоремой (12) определяем погиб в точке B :

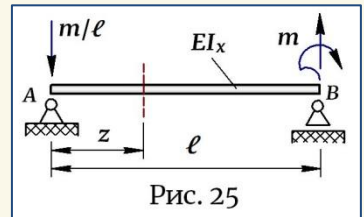
$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{\ell} \frac{M_z dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial F} = \left\| \frac{M_z = -Fz}{\frac{\partial M_z}{\partial F} = -z} \right\| = \int_0^{\ell} \frac{(-Fz)(-z)}{EI_x} dz = \frac{Fl^3}{3EI_x},$$

что соответствует формуле, полученной ранее для такой же расчетной схемы балки методом непосредственного интегрирования.

ПРИМЕР 2. В балке (рис. 25) определить угол поворота сечения B .

По аналогии с предыдущим примером, пренебрегая слагаемым, связанным с поперечной силой, потенциальная энергия деформации, накопленная балкой, равна:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x}.$$



Определяем угол поворота сечения на опоре в точке B :

$$\Theta_B = \frac{\partial U}{\partial m} = \int_0^{\ell} \frac{M_z dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial m} = \left\| \frac{M_z = -\frac{m}{\ell}z}{\frac{\partial M_z}{\partial m} = -\frac{z}{\ell}} \right\| = \int_0^{\ell} \frac{\left(-\frac{m}{\ell}z\right)\left(-\frac{z}{\ell}\right)}{EI_x} dz = \frac{m\ell}{3EI_x},$$

что также соответствует формуле, полученной для данной расчетной схемы балки методом непосредственного интегрирования.

Прием введения добавочной силы

Использование метода Кастилиано для определения линейных и угловых перемещений является возможным только для точек, в которых приложена сосредоточенная сила или момент, и только по направлению этих нагрузок. Однако бывают случаи, когда требуется определить перемещение точки, в которой указанные нагрузки не приложены, или перемещение по другому направлению, не совпадающему с направлением заданных сил. В этом случае используют **прием введения добавочной силы**, некой фиктивной несуществующей силы, которую используют для выполнения операции дифференцирования, а затем выводят из расчета, приравняв к нулю. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 3. В балке (рис. 26), нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью q , определить прогиб в точке B .

Так как в точке B сосредоточенная сила не приложена, то для использования формулы Кастилиано (12) прикладываем здесь **добавочную силу** F_D и определяем прогиб y_B :

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F_D} = \int_0^{\ell} \frac{M_Z dz}{EI_X} \cdot \frac{\partial M_Z}{\partial F_D},$$

где $M_Z = -\frac{qz^2}{2} - F_D z$; $\frac{\partial M_Z}{\partial F_D} = -z$.

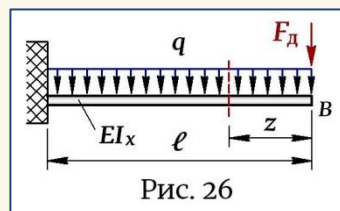


Рис. 26

Подставляем значения под знак интеграла и, приравнявая здесь фиктивную добавочную силу к нулю $\rightarrow [F_D = 0]$, получаем:

$$y_B = \int_0^{\ell} \frac{M_Z dz}{EI_X} \cdot \frac{\partial M_Z}{\partial F_D} = \int_0^{\ell} \frac{\left(-qz^2/2 - F_D z\right)(-z)}{EI_X} dz = \frac{q\ell^4}{8EI_X}.$$

ПРИМЕР 4. В балке (рис. 27), нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью q , определить угол поворота сечения B .

Так как в точке B момент не приложен, то для использования формулы Кастилиано (12) прикладываем здесь **добавочный момент** m_D и определяем Θ_B :

$$\Theta_B = \frac{\partial U}{\partial m_D} = \int_0^{\ell} \frac{M_Z dz}{EI_X} \cdot \frac{\partial M_Z}{\partial m_D},$$

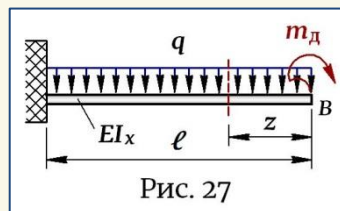


Рис. 27

где $M_z = -\frac{qz^2}{2} - m_d$; $\frac{\partial M_z}{\partial m_d} = -1$.

Подставляем значения под знак интеграла и, приравнявая здесь фиктивную добавочную силу к нулю $\rightarrow m_d = 0$, получаем:

$$\Theta_B = \int_0^{\ell} \frac{M_z dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial m_d} = \int_0^{\ell} \frac{(-qz^2/2 - m_d)(-1)}{EI_x} dz = \frac{q\ell^3}{6EI_x}.$$

Теореме Кастилиано справедлива и обратная теорема — **теорема Лагранжа**. Выразив потенциальную энергию в функции независимых перемещений — $U = f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$, можно доказать, что —

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \quad (13) \quad \parallel \text{Частная производная от потенциальной энергии по обобщенному перемещению равна обобщенной силе.}$$

8.2. Интеграл Максвелла–Мора

Теорема Кастилиано (12), рассмотренная выше, как энергетический метод определения перемещений является одним из самых красивых решений определения перемещений в механике конструкций. Этот метод является универсальным, его можно использовать и при простейших случаях нагружения, и при сложном сопротивлении, а также для элементов самых разных форм — прямых и кривых стержней, пластин, оболочек и т.д. Единственным «минусом» при решении задач методом Кастилиано является то, что приходится брать производную сложного интеграла, и в результате в подынтегральном выражении появляется еще одна производная. Кроме того, при большом числе участков на элементе (например, балки с множеством участков, рамы, пространственные стержни и т.д.) интегрирование необходимо производить для каждого участка, что делает задачу трудоемкой и несколько громоздкой. Поэтому дальнейшее развитие метода Кастилиано идет в направлении его упрощения и в результате получается форма решения, называемая **интегралом Максвелла–Мора**.

Рассмотрим способ Максвелла–Мора на примере плоского поперечного изгиба (рис. 28). Определим в балке прогиб точки B .

Потенциальная энергия деформации изгиба в данной балке, согласно формуле (11), определяется как:

$$U = \int_0^{\ell} k \frac{Q^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x}.$$

Начинаем выполнять решение по методу Кастилиано, как это было рассмотрено в **ПРИМЕРЕ 1** (рис. 24):

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{\ell} k \frac{Q_Z dz}{GA} \cdot \frac{\partial Q_Z}{\partial F} + \int_0^{\ell} \frac{M_Z dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_Z}{\partial F},$$

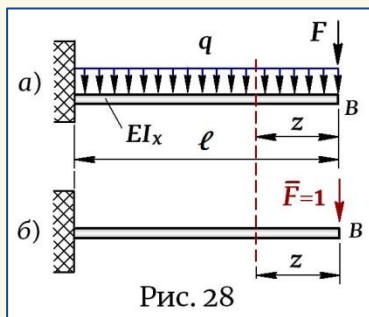


Рис. 28

где подынтегральные выражения соответственно равны (рис. 28, а):

$$Q_Z = F + qz \rightarrow \boxed{\frac{\partial Q_Z}{\partial F} = 1}; \quad M_Z = -Fz - \frac{qz^2}{2} \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_Z}{\partial F} = -z}. \quad (a)$$

В теоретической механике используется понятие — **ЕДИНИЧНЫЙ ВЕКТОР** — это вектор, направление которого совпадает с направлением вектора заданной величины, но численное равен единице. Единичный вектор — величина безразмерная. В механике материалами векторными величинами являются сила F и момент m , поэтому для них будем использовать соответствующие понятия — **ЕДИНИЧНАЯ СИЛА** $\bar{F} = 1$ и **ЕДИНИЧНЫЙ МОМЕНТ** $\bar{m} = 1$ (**ЕДИНИЧНЫЕ** нагрузки обозначаются с черточкой сверху).

Рассмотрим ту же балку, но без рабочей нагрузки, и приложим в точке B **единичную силу** $\bar{F} = 1$ в том направлении, в котором определяем перемещение. Запишем значения поперечной силы \bar{Q}_Z и момента \bar{M}_Z от единичной силы в том же сечении z (рис. 28, б):

$$\boxed{\bar{Q}_Z = \bar{F} = 1} \quad \text{и} \quad \boxed{\bar{M}_Z = -\bar{F}z = -z}. \quad (б)$$

Сравнивая значения (а) и (б), видно, что производные поперечной силы и изгибающего момента по силе F в подынтегральных выражениях равны поперечной силе и моменту в том же сечении от единичной силы $\bar{F} = 1$, т. е. $\boxed{\frac{\partial Q_Z}{\partial F} = \bar{Q}_Z}$ и $\boxed{\frac{\partial M_Z}{\partial F} = \bar{M}_Z}$.

Это позволяет, не выполняя операции дифференцирования функции потенциальной энергии, заменять в подынтегральных выражениях производные внутренних сил на внутренние силы от единичной нагрузки. И тогда окончательно прогиб в точке B определится как:

$$y_B = \int_0^{\ell} k \frac{Q_F \bar{Q}}{GA} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz \quad - \quad (14)$$

интеграл Максвелла–Мора для плоского поперечного изгиба, где индексом «F» обозначены внутренние усилия от заданной нагрузки (*грузовые внутренние усилия*), а чертой сверху – внутренние усилия от единичной силы (*единичные внутренние усилия*).

Аналогичным образом, для определения углов поворота будем использовать *единичный момент* $\bar{m}=1$, прикладывая его в соответствующем сечении и заменяя производные $\frac{\partial M_z}{\partial m}$ и $\frac{\partial Q_z}{\partial m}$ на внутренние силы от этого единичного момента.

В самом общем случае нагружения, когда в сечении действуют шесть внутренних усилий, **интеграл Максвелла–Мора** имеет вид:

$$\Delta = \int_0^{\ell} \frac{N_F \bar{N}}{EA} dz + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_{x(F)} \bar{Q}_x}{GA} dz + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_{y(F)} \bar{Q}_y}{GA} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{x(F)} \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{y(F)} \bar{M}_y}{EI_y} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{кр(F)} \bar{M}_{кр}}{GI_{\rho}} dz \quad , \quad (15)$$

где Δ – общее обозначение перемещения (линейного или углового).

Таким образом, при решении интеграла Максвелла-Мора рассматриваются два состояния – *грузовое* и *единичное*, и каждое слагаемое в формуле (15) выражает виртуальную работу сил одного состояния на перемещениях другого состояния. Так, например, продольная сила грузового состояния N_F на деформации единичного состояния, равной

$\delta = \frac{\bar{N} dz}{EA}$, совершает виртуальную работу – $A_{N_F \bar{N}} = \int N_F \cdot \frac{\bar{N} dz}{EA}$, а

продольная сила единичного состояния $\bar{N}=1$ на перемещении грузового состояния Δ_{N_F} совершает работу – $A_{\bar{N} N_F} = \bar{N} \Delta_{N_F} = \Delta_{N_F}$. Но на

основании **теоремы о взаимности работ** – $A_{\bar{N} N_F} = A_{N_F \bar{N}}$, откуда по-

лучаем: $\Delta_{N_F} = \int \frac{N_F \bar{N}}{EA} dz$. Аналогичные рассуждения справедливы

и для других слагаемых интеграла Максвелла-Мора.

Интеграл (15) был предложен Максвеллом в 1864 г. и только через десять лет в 1874 г. был введен Отто Мором в практику расчета.

Рассмотрим применение интеграла Максвелла–Мора на примерах.

ПРИМЕР 5. Используя интеграл Максвелла–Мора, определить в заданной балке (рис. 29) прогиб и угол поворота конца консоли B .

Принять для балки:

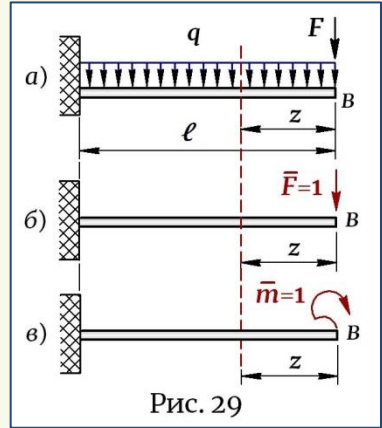
$$q = 5 \text{ кН/м}; F = 8 \text{ кН}; \ell = 3 \text{ м};$$

$$I_x = 3500 \text{ см}^4; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}.$$

РЕШЕНИЕ:

① На балке один участок. Используем интеграл Максвелла–Мора (14), который, пренебрегая здесь поперечной силой Q ,

принимает вид:
$$\Delta_B = \int_0^{\ell} \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz. \quad (a)$$



② От свободного конца рассматриваем сечение z (рис. 29, а) и записываем для него значение *грузового изгибающего момента*:

$$M_{z(F)} = -Fz - \frac{qz^2}{2}. \quad (б)$$

③ Определяем прогиб сечения u_B :

а) Рассматриваем ту же балку, убираем внешнюю нагрузку, в заданном сечении B прикладываем единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 29, б) и записываем для того же сечения z *единичный изгибающий момент* —

$$\bar{M}_z = -\bar{F}z = \|\bar{F} = 1\| = -z. \quad (в)$$

б) Подставляем значения (б) и (в) в интеграл (а) и получаем —

$$u_B = \int_0^{\ell} \frac{M_{z(F)} \bar{M}_z}{EI_x} dz = \int_0^{\ell} \frac{(-Fz - qz^2/2)(-z)}{EI_x} dz = \frac{F\ell^3}{3EI_x} + \frac{q\ell^4}{8EI_x} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^3 (3 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3500 \cdot 10^4} + \frac{5 (3 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3500 \cdot 10^4} = 17,5 \text{ мм}.$$

④ Определяем угол поворота сечения Θ_B :

а) Рассматриваем ту же балку, убираем внешнюю нагрузку, но теперь в сечении B прикладываем единичный момент $\bar{m}=1$ (рис. 29, в) и записываем для того же сечения Z *единичный изгибающий момент* —

$$\bar{M}_Z = -\bar{m} = -1. \quad (z)$$

б) Подставляем значения (б) и (z) в интеграл (а) и получаем —

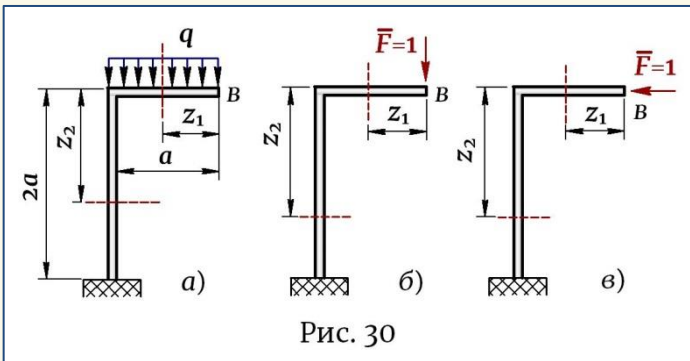
$$\begin{aligned} \Theta_B &= \int_0^{\ell} \frac{M_Z(F) \bar{M}_Z}{EI_x} dz = \int_0^{\ell} \frac{(-Fz - qz^2/2)(-1)}{EI_x} dz = \frac{F\ell^2}{2EI_x} + \frac{q\ell^3}{6EI_x} = \\ &= \frac{8 \cdot 10^3 (3 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3500 \cdot 10^4} + \frac{5 (3 \cdot 10^3)^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3500 \cdot 10^4} = 0,0083 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Примечание.

Если в результате расчетов искомые значения получатся со знаком «минус», это значит, что перемещение (прогиб или поворот) произойдет в направлении, обратном направлению приложенной единичной нагрузки.

ПРИМЕР 6. Используя интеграл Максвелла–Мора, в заданной плоской раме (рис. 30) определить вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли B . Принять для рамы:

$$q = 20 \text{ кН/м}; a = 1 \text{ м}; I_x = 1290 \text{ см}^4; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① На раме два участка – горизонтальный и вертикальный, поэтому следует брать сечения на каждом из них, записав для этих сечений значения *грузовых* и *единичных* внутренних усилий. Пренебрегая влиянием поперечной и продольной сил на соответствующих участках и учитывая только изгибающие моменты, интеграл Максвелла–Мора для определения перемещений принимает вид:

$$\Delta_B = \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz \quad (a)$$

② Определяем вертикальное $\Delta_B^{\text{верт}}$ перемещение конца консоли B .

Для этого прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$ вертикально и записываем для сечений z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$) и z_2 ($0 \leq z_2 \leq 2a$) выражения внутренних усилий — *грузовых* (рис. 30, а) и *единичных* (рис. 30, б):

$$M_{z_1(F)} = -\frac{qz_1^2}{2}; \quad \bar{M}_{z_1} = -\bar{F}z_1 = -z_1; \quad (б)$$

$$M_{z_2(F)} = -\frac{qa^2}{2}; \quad \bar{M}_{z_2} = -\bar{F}a = -a. \quad (в)$$

Подставляем значения (б) и (в) в интеграл (а) и получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_B^{\text{верт}} &= \int_0^a \frac{(-qz_1^2/2)(-z_1)}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{(-qa^2/2)(-a)}{EI_x} dz = \frac{qz_1^4}{8EI_x} \Big|_0^a + \\ &+ \frac{qa^3z_2}{2EI_x} \Big|_0^{2a} = \frac{qa^4}{8EI_x} + \frac{qa^4}{EI_x} = \frac{9qa^4}{8EI_x} = \frac{9 \cdot 20 (1 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 8,7 \text{ мм.} \end{aligned}$$

③ Определяем горизонтальное $\Delta_B^{\text{гориз}}$ перемещение конца консоли B .

Теперь прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$ горизонтально и записываем для тех же сечений выражения *грузовых* (рис. 30, а) и *единичных* (рис. 30, в) внутренних усилий:

$$M_{z_1(F)} = -\frac{qz_1^2}{2}; \quad \bar{M}_{z_1} = 0; \quad (з)$$

$$M_{z_2(F)} = -\frac{qa^2}{2}; \quad \bar{M}_{z_2} = \bar{F}z_2 = z_2. \quad (д)$$

Подставляем значения (з) и (д) в интеграл (а) и получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_B^{\text{гориз}} &= \int_0^a \frac{(-qz_1^2/2) \cdot 0}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{(-qa^2/2)z_2}{EI_x} dz = -\frac{qa^2z_2^2}{4EI_x} \Big|_0^{2a} = \\ &= -\frac{qa^4}{EI_x} = -\frac{20 (1 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = -7,8 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Примечание.

Знак «минус» говорит о том, что конец консоли получит горизонтальное перемещение, обратное направлению единичной силы, т.е. вправо.

Интеграл Максвелла-Мора является значительным шагом в упрощении решения по методу Кастилиано. Он устраняет необходимость дифференцирования функции потенциальной энергии деформации и выводит из расчета производные в подынтегральных выражениях. Кроме того, интеграл Максвелла-Мора даже при отсутствии в заданных сечениях сосредоточенной силы или момента позволяет определять здесь линейные и угловые перемещения без введения в расчет добавочной нагрузки, как это требуется по методу Кастилиано. Однако использование интеграла Максвелла-Мора ограничено: он применим **только для элементов стержневого типа** – для прямых и кривых стержней, а для элементов других форм использовать его нельзя.

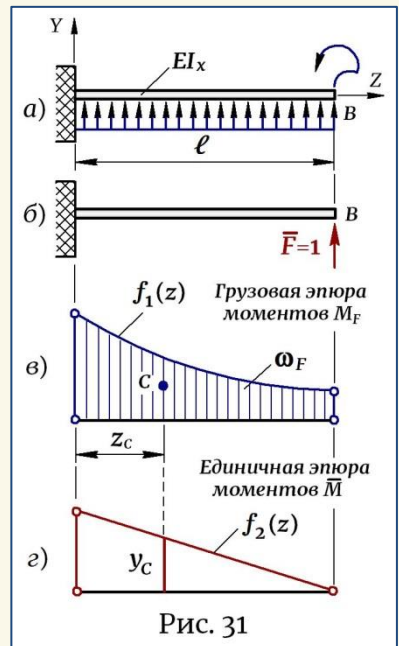
8.3. Графоаналитическое решение интеграла Мора. Метод перемножения эюр

Использование интеграла Максвелла-Мора для решения задач хотя и представляется более удобным, чем метод Кастилиано, но и этот способ может быть упрощен. Интеграл Максвелла-Мора можно решать не путем интегрирования, а графически, методом **ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ЭЮР** (метод Верещагина).

Рассмотрим вопрос на примере изгиба балки. Докажем возможность графического решения интеграла Мора и установим, в чем заключается суть перемножения эюр.

Определим на балке (рис. 31, а) прогиб конца консоли Δ_B . Решение задачи начнем с помощью интеграла Максвелла-Мора (13), который, пренебрегая поперечной силой Q , для плоского изгиба принимает вид:

$$\Delta_B = \int_0^{\ell} \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} M_F \bar{M} dz = \frac{k}{EI_x},$$



где

$$k = \int_0^{\ell} M_F \bar{M} dz . \quad (a)$$

Далее, согласно методике, рассмотренной выше, прикладываем в точке B единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 31, б) и строим эпюры изгибающих моментов — *грузовую* (рис. 31, в) и *единичную* (рис. 31, г). Так как эпюра представляет собой график функции изгибающего момента от координаты сечения Z , и учитывая, что **единичная эпюра, построенная на прямом стержне, всегда линейна**, обозначим функции моментов как:

$$M_F = f_1(z) \text{ и } \bar{M} = f_2(z) = az + b. \quad (б)$$

Подставляем функции *грузового* и *единичного* моментов (б) в значение k (а) и приводим решение интеграла в виду (в):

$$k = \int_0^{\ell} f_1(z) f_2(z) dz = \int_0^{\ell} f_1(z) (az + b) dz = a \int_0^{\ell} f_1(z) \cdot z dz + b \int_0^{\ell} f_1(z) dz ,$$

где полученные слагаемые представляют собой:

$$\int_0^{\ell} f_1(z) dz = \boxed{\omega_F} \text{ — площадь грузовая эпюры;}$$

$$\int_0^{\ell} f_1(z) \cdot z dz = \boxed{S_y} \text{ — статический момент площади грузовая эпюры}$$

относительно оси Y , который, как известно, определяется произведением площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до указанной оси (рис. 31, в) и соответственно равен: $\boxed{S_y = \omega_F Z_C}$.

Подставляем полученные значения в выражение k (в) и получаем:

$$k = aS_y + b\omega_F = a\omega_F Z_C + b\omega_F = \omega_F (aZ_C + b),$$

где согласно моменту \bar{M} (б) $\rightarrow (az_C + b)/_{z=Z_C} = f_2(z)/_{z=Z_C} = y_C$ — это ордината единичной эпюры при $z = Z_C$, т.е. ордината, расположенная под центром тяжести грузовая эпюры.

Тогда выражение (а) принимает окончательный вид:

$$\boxed{k = \int_0^{\ell} M_F \bar{M} dz = \omega_F y_C} . \quad (16)$$

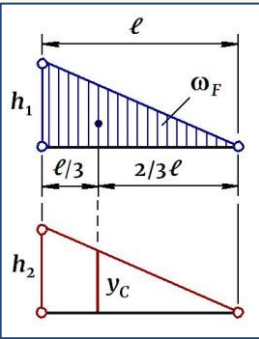
Интеграл Максвелла–Мора равен произведению площади грузовой эпюры на ординату единичной эпюры, расположенную под центром тяжести грузовой.

Завершая решение для балки (рис. 31), прогиб в точке B с учетом значения (16) равен: $\Delta_B = \frac{\omega_F y_C}{EI_X}$.

ПРИМЕРЫ И ПРАВИЛА ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ЭПЮР

Рассмотрим **ПРИМЕРЫ** и **ПРАВИЛА** перемножения эпюр, где ℓ — длина участка, h — числовые значения на соответствующих эпюрах.

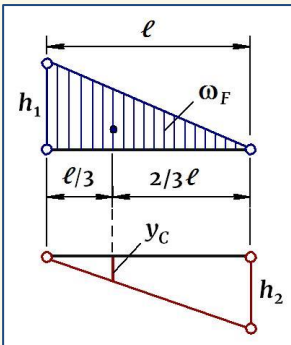
ПРИМЕР 1



Грузовая эпюра представляет собой треугольник, площадь которого равна: $\omega_F = \ell h_1 / 2$. Центр тяжести треугольника лежит на расстоянии $(2/3)\ell$ от вершины или $(1/3)\ell$ от основания, поэтому ордината на единичной эпюре из подобия треугольников и пропорции вычисляется как: $y_C = (2/3)h_2$. Тогда:

$$k = \omega_F \cdot y_C = \frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_2.$$

ПРИМЕР 2



ПРАВИЛО № 1.

Если обе эпюры – *грузовая* и *единичная* – лежат по одну сторону от оси, они перемножаются со знаком «плюс», если по разные – «минус».

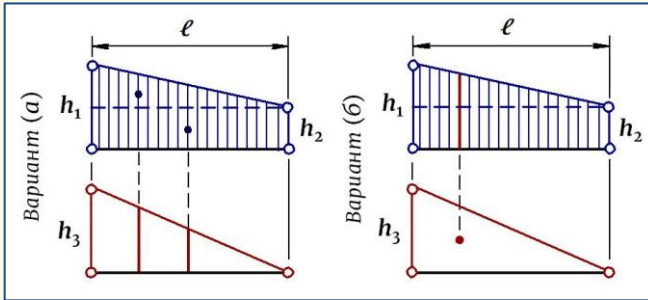
$$k = -\frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{1}{3} h_2.$$

ПРАВИЛО № 2.

Если обе эпюры – *грузовая* и *единичная* – прямолинейные, то при перемножении не имеет значения, какую из них принимать за площадь и на какой брать ординату.

ПРИМЕР 3

Если эпюра имеет форму трапеции, ее удобнее разбить на две простейшие фигуры, для которых известны и площадь, и положение центра тяжести, например, на прямоугольник и треугольник.



И тогда перемножение эпюр будет состоять из двух слагаемых: площадь прямоугольника, учитывая что его центр тяжести лежит посередине длины ℓ , умножается на свою ординату, а площадь треугольника – на ординату под его центром тяжести:

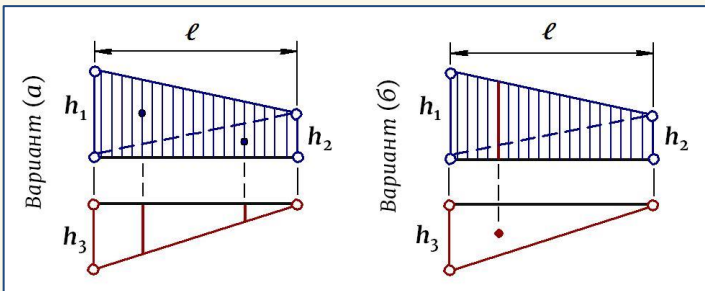
$$\text{– Вариант (а)} \rightarrow k = \ell h_2 \times \frac{1}{2} h_3 + \frac{1}{2} \ell (h_1 - h_2) \times \frac{2}{3} h_3 .$$

Если за площадь принимать единичную эпюру, а ординату на уровне ее центра тяжести брать на трапеции, то следует понимать, что ординатой является полный отрезок, лежащий на трапеции, и он вычисляется как сумма двух отрезков – отрезок на прямоугольнике плюс отрезок на треугольнике:

$$\text{– Вариант (б)} \rightarrow k = \frac{1}{2} \ell h_3 \times \left[h_2 + \frac{2}{3} (h_1 - h_2) \right] .$$

ПРИМЕР 4

Однако разбивка трапеции на прямоугольник и треугольник является не очень удобной при выполнении расчетов, поскольку требует вычисления разницы сторон трапеции, что при цифрах с десятичными долями делает расчет более трудоемким. Наиболее удобно разбивать трапецию на два треугольника, для которых и площадь, и положение центра тяжести определены:



– Вариант (а) →

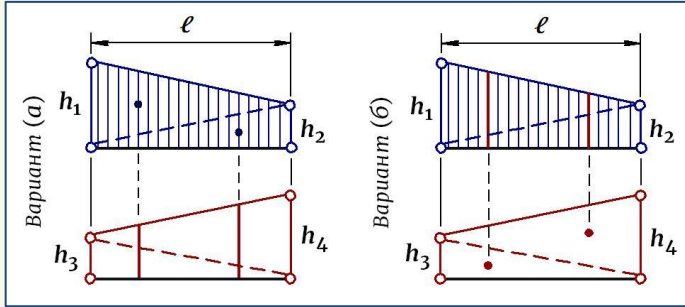
$$k = -\frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_3 - \frac{1}{2} \ell h_2 \times \frac{1}{3} h_3 ;$$

– Вариант (б) →

$$k = -\frac{1}{2} \ell h_3 \times \left(\frac{2}{3} h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right) .$$

ПРИМЕР 5

В случае, если обе эпюры – *грузовая* и *единичная* – имеют форму трапеции, перемножение на основании сказанного принимает вид:

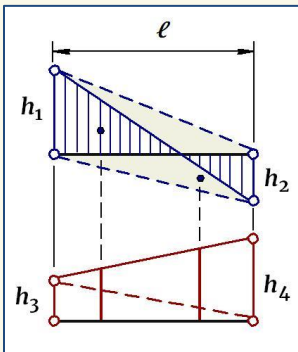


– Вариант (а) → $k = \frac{1}{2} \ell h_1 \times \left(\frac{2}{3} h_3 + \frac{1}{3} h_4 \right) + \frac{1}{2} \ell h_2 \times \left(\frac{2}{3} h_4 + \frac{1}{3} h_3 \right) ;$

– Вариант (б) → $k = \frac{1}{2} \ell h_3 \times \left(\frac{2}{3} h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right) + \frac{1}{2} \ell h_4 \times \left(\frac{1}{3} h_1 + \frac{2}{3} h_2 \right) .$

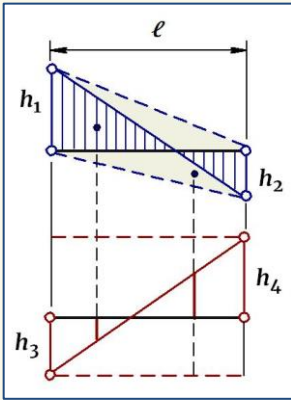
ПРИМЕР 6

Часто в пределах участка эпюра изменяет знак на противоположный, принимая форму «перекрестной» фигуры. Такую эпюру следует брать за площадь, дополнив ее сверху и снизу до двух полных треугольников. Математически можно доказать, что добавленные площади (они показаны цветом) являются *равновеликими*, и так как они лежат по разные стороны оси и будут перемножаться с одной и той же единичной эпюрой, значит, одно слагаемое будет иметь знак «плюс», другое – «минус», и таким образом сколько добавится в одном слагаемом, столько же убавится в другом. Поэтому дополнение треугольников до полных является *правомерным*. Тогда:



$$k = \frac{1}{2} \ell h_1 \times \left(\frac{2}{3} h_3 + \frac{1}{3} h_4 \right) - \frac{1}{2} \ell h_2 \times \left(\frac{2}{3} h_4 + \frac{1}{3} h_3 \right) .$$

ПРИМЕР 7



В случае, если обе эшпоры – *грузовая* и *единичная* – являются перекрестными, грузовую следует дополнять до двух полных треугольников, как показано в предыдущем примере, а единичную следует дополнять сверху и снизу до двух полных прямоугольников, и вычислять ординаты на единичной эшпоре, как показано на рисунке:

– для верхнего (*грузового*) треугольника →

$$y_C = \frac{2}{3} (h_3 + h_4) - h_4;$$

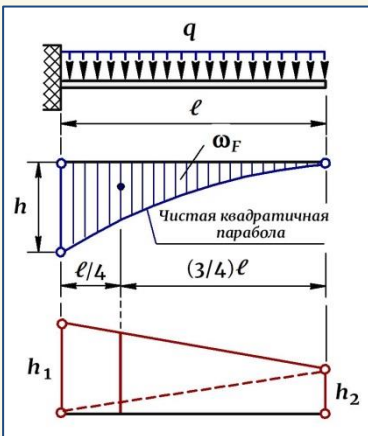
– для нижнего (*грузового*) треугольника →

$$y_C = \frac{2}{3} (h_3 + h_4) - h_3.$$

Тогда:
$$k = -\frac{1}{2} \ell h_1 \times \left[\frac{2}{3} (h_3 + h_4) - h_4 \right] - \frac{1}{2} \ell h_2 \times \left[\frac{2}{3} (h_3 + h_4) - h_3 \right].$$

При нагружении балки распределенной нагрузкой эшпора изгибающих моментов имеет криволинейную параболическую форму и в зависимости от характера распределенной нагрузки может представлять собой квадратичную или кубическую параболу, кривую любой степенной функции и т.д. В этом случае в силу вступает следующее правило →

ПРИМЕР 8



ПРАВИЛО № 3.

Если грузовая эшпора имеет криволинейную форму, то площадь следует брать только криволинейной эшпоры.

Эшпора изгибающих моментов, полученная от распределенной нагрузки, приложенной на консоли, называется по форме – **чистая квадратичная парабола**, в которой значение

$h = ql^2/2$ – это величина изгибающего момента в заделке. Площадь такой параболы

определяется как –
$$\omega_F = \frac{1}{3} h \ell = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \ell,$$

а центр тяжести лежит на расстоянии $(3/4)\ell$ от вершины или $(1/4)\ell$ от основания.

Тогда:
$$k = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \ell \times \left(\frac{3}{4} h_1 + \frac{1}{4} h_2 \right).$$

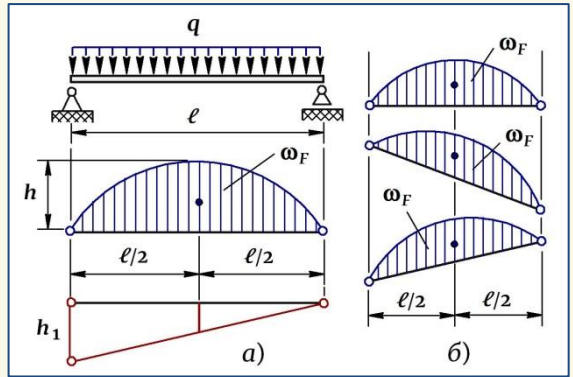
ПРИМЕР 9

В данной расчетной схеме балки значение $h = ql^2/8$ — это величина наибольшего изгибающего момента, возникающего посередине пролета (a). Площадь эпюры изгибающих моментов определяется по формуле —

$$\omega_F = \frac{2}{3} h \ell = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \ell,$$

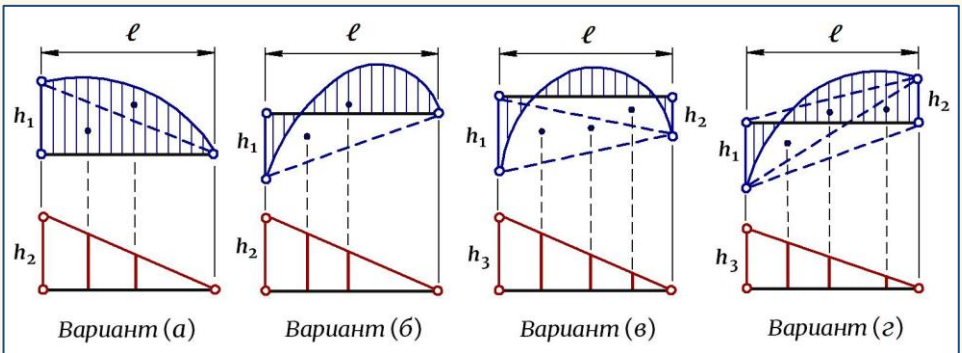
а центр тяжести эпюры лежит посередине длины пролета (a). При этом, при любом положении параболы (b) ее площадь определяется по той же формуле и центр тяжести лежит посередине пролета. Тогда:

$$k = -\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \ell \times \frac{1}{2} h_1.$$



Если на участке эпюра представляет собой сложную фигуру, ее следует разбить на простейшие фигуры, для которых и площадь, и положение центра тяжести определены, и перемножение выполнять по правилам, рассмотренным выше.

ПРИМЕРЫ 10–11–12–13



– Вариант (а) → $k = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \ell \times \frac{1}{2} h_2 + \frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_2;$

– Вариант (б) → $k = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \ell \times \frac{1}{2} h_2 - \frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_2;$

$$- \text{Вариант (в)} \rightarrow k = \frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{8} \ell \times \frac{1}{2} h_3 - \frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_3 - \frac{1}{2} \ell h_2 \times \frac{1}{3} h_3 ;$$

$$- \text{Вариант (з)} \rightarrow k = \frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{8} \ell \times \frac{1}{2} h_3 - \frac{1}{2} \ell h_1 \times \frac{2}{3} h_3 + \frac{1}{2} \ell h_2 \times \frac{1}{3} h_3 .$$

При определении перемещений в *пространственных конструкциях*, где на участках может возникать изгиб в двух плоскостях и кручение, расчет производится аналогичным образом – построением и перемножением грузовых и единичных эпюр. Грузовая эпюра изгибающего момента перемножается с единичной эпюрой изгибающего момента, грузовая эпюра крутящего момента – с единичной эпюрой крутящего момента. При этом необходимо придерживаться следующих правил:

ПРАВИЛО № 4.

При перемножении эпюр изгибающих моментов – *грузовой* и *единичной* – перемножаются только те эпюры, которые лежат в одной плоскости.

ПРАВИЛО № 5.

При перемножении эпюр крутящих моментов – *грузовой* и *единичной*, если они закручивают участок в одном направлении, они перемножаются со знаком «плюс», если в разных направлениях – «минус».

Таким образом, определение перемещений методом Верещагина заключается в последовательном выполнении следующих операций:

- ★ первоначально строится эпюра внутренних усилий от заданной внешней нагрузки (*грузовая эпюра*);
- ★ на *грузовой эпюре* определяется ее площадь и положение центра тяжести. Если эпюра имеет сложную форму, ее следует разбить на простейшие фигуры, для которых и площадь, и положение центра тяжести известны;
- ★ далее элемент освобождается от внешней нагрузки и в сечении, где требуется определить перемещение, прикладывается либо *единичная сила* $\bar{F} = 1$ (если необходимо определить линейное перемещение), либо *единичный момент* $\bar{m} = 1$ (если необходимо определить угловое перемещение, т.е. угол поворота);
- ★ от единичной нагрузки строится *единичная эпюра*, на которой вычисляется ордината, расположенная на уровне центра тяжести *грузовой эпюры*;
- ★ далее *грузовая* и *единичная эпюры* перемножаются согласно формуле (16) и принятым правилам перемножения.

Примечание.

Грузовая эпюра выполняется со штриховкой, как это принято при построении эпюр, единичную эпюру штриховать не надо.

ПРИМЕР 7. Методом перемножения эпюр для заданной балки определить прогиб конца консоли Δ_B (рис. 32).

Площадь грузовой эпюры моментов равна (рис. 32, а):

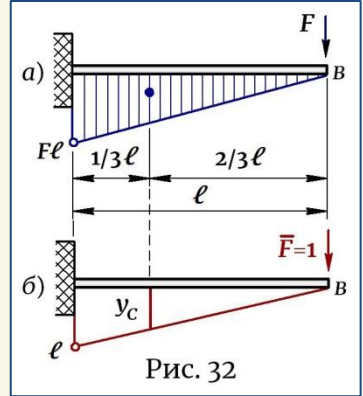
$$\omega_F = \frac{1}{2} F \ell \cdot \ell = \frac{F \ell^2}{2}.$$

Ордината единичной эпюры, расположенная под центром тяжести грузовой, определяется из пропорции (рис. 32, б):

$$\frac{y_C}{\ell} = \frac{(2/3)\ell}{\ell} \rightarrow y_C = (2/3)\ell.$$

Прогиб в точке B равен:

$$\Delta_B = \frac{\omega_F y_C}{EI_X} = \frac{(F \ell^2) / 2 \times (2/3)\ell}{EI_X} = \frac{F \ell^3}{3EI_X},$$



что соответствует результату, полученному для данной балки другими методами, рассмотренными ранее.

В заключении следует подчеркнуть, что метод Верещагина или метод перемножения эпюр применим **только для прямых стержней** и его нельзя использовать для кривых стержней и элементов других форм.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

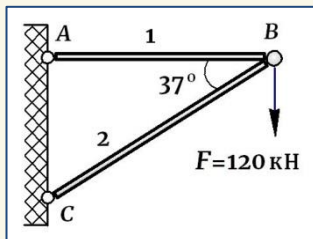
$A_F = \frac{F_i \Delta_i}{2}$	Работа внешних сил. Теорема Клапейрона
Работа внутренних сил	
$A_{\text{вн}} = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}}$	
$A_F + A_{\text{вн}} = 0$	Принцип начала возможных перемещений
Потенциальная энергия деформации	
$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \int_0^{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}}$	
$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}$	Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)
$\Delta_{12} = \Delta_{21}$	Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла)
$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$	Теорема Кастилиано
$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$	Теорема Лагранжа
Интеграл Максвелла-Мора	
$\Delta = \int_0^{\ell} \frac{N_F \bar{N}}{EA} dz + \int_0^{\ell} k_x \frac{Q_{x(F)} \bar{Q}_x}{GA} dz + \int_0^{\ell} k_y \frac{Q_{y(F)} \bar{Q}_y}{GA} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{x(F)} \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{y(F)} \bar{M}_y}{EI_y} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}(F)} \bar{M}_{\text{кр}}}{GI_{\rho}} dz$	
$k = \int_0^{\ell} M_F \bar{M} dz = \omega_F \omega_C$	Метод перемножения эпюр (метод Верещагина)

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Определение перемещений через энергию деформации и работу внешних сил

Задача 1

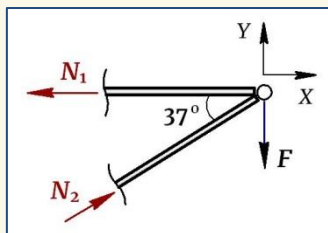
Для заданного кронштейна, состоящего из двух стержней, выполненных из разных материалов, и нагруженного в узле силой $F = 120$ кН, через потенциальную энергию деформации и работу внешней силы определить вертикальное перемещение узла B . Принять для стержней: $\ell_1 = 1$ м, $\ell_2 = 1,25$ м,



$A_1 = 10$ см², $A_2 = 250$ см², $E_1 = 2 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 1 \times 10^5$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Стержни в кронштейне работают на растяжение (стержень 1) и сжатие (стержень 2). Методом сечений определяем в стержнях продольные силы, для чего отсекаем узел и рассматриваем его равновесие:



$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: N_2 \cos 37^\circ - N_1 &= 0 \\ \sum Y = 0: N_2 \sin 37^\circ - F &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$N_1 = 160 \text{ кН (растяжение)}$$

$$N_2 = 200 \text{ кН (сжатие)}$$

② Определяем потенциальную энергию деформации, накопленную в стержнях:

$$\begin{aligned} U &= \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} = \int_{\ell} \frac{N_1^2 dz}{2E_1 A_1} + \int_{\ell} \frac{N_2^2 dz}{2E_1 A_1} = \frac{N_1^2 \ell_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2E_2 A_2} = \\ &= \frac{(160 \cdot 10^3)^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} + \frac{(200 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,25 \cdot 10^3}{2 \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 250 \cdot 10^2} = 164000 \text{ Нмм.} \end{aligned}$$

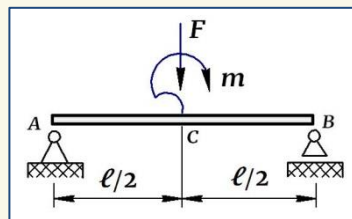
③ Согласно теореме Клапейрона, работа силы F на перемещении точки ее приложения Δ_B равна: $A_F = (F \cdot \Delta_B) / 2$.

Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

$$\boxed{A_F = U} \rightarrow \frac{F \cdot \Delta_B}{2} = U \rightarrow \boxed{\Delta_B} = \frac{2U}{F} = \frac{2 \cdot 164000}{120 \cdot 10^3} = 2,74 \text{ мм.}$$

Задача 2

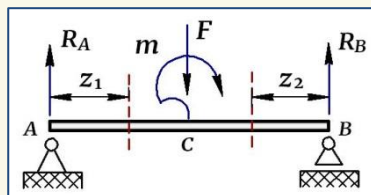
Для заданной балки (двутавр № 20) длиной $\ell = 4 \text{ м}$, нагруженной моментом $m = 20 \text{ кНм}$ и силой $F = 20 \text{ кН}$, определить угол поворота сечения C , если прогиб этого сечения равен $u_C = 5 \text{ мм}$. Принять для двутавра: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $I_x = 1840 \text{ см}^4$.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем на балке реакции опор:

$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} R_A = F/2 + m/\ell = 5 \text{ кН} \\ R_B = F/2 - m/\ell = 15 \text{ кН} \end{array}.$$



Проверка — $\sum Y = 0$: $R_A + R_B - F = 0$.

② На балке два участка. Рассматриваем на участках сечения Z_1 и Z_2 и записываем для них значение изгибающих моментов:

$$M_{Z_1} = R_A z_1; \quad M_{Z_2} = R_B z_2.$$

③ Определяем потенциальную энергию, накопленную в балке от изгиба. Пренебрегая поперечной силой, запишем выражение для потенциальной энергии через изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} U &= \boxed{\int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x}} = \int_0^{\ell/2} \frac{M_{Z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell/2} \frac{M_{Z_2}^2 dz}{2EI_x} = \int_0^{\ell/2} \frac{(R_A z_1)^2 dz}{2EI_x} + \\ &+ \int_0^{\ell/2} \frac{(R_B z_2)^2 dz}{2EI_x} = \frac{R_A^2}{2EI_x} \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^{\ell/2} + \frac{R_B^2}{2EI_x} \frac{z_2^3}{3} \Big|_0^{\ell/2} = \frac{R_A^2 \ell^3}{48EI_x} + \frac{R_B^2 \ell^3}{48EI_x} = \\ &= \frac{(5 \cdot 10^3)^2 (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} + \frac{(15 \cdot 10^3)^2 (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 90580 \text{ Нмм.} \end{aligned}$$

④ Используя теорему Клапейрона, определяем работу внешних сил (силы F и момента m) на соответствующих перемещениях:

$$A_F = \frac{F \cdot y_C}{2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 5}{2} = 50000 \text{ Нмм}; \quad A_m = \frac{m \cdot \Theta_C}{2} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot \Theta_C}{2}.$$

Полная работа внешних сил определится как сумма работ и по закону сохранения энергии равна потенциальной энергии, накопленной в системе:

$$A_{\text{полн}} = A_F + A_m = U.$$

Примечание.

Сила F , приложенная посередине пролета, в силу симметрии нагрузки не приводит к повороту данного сечения, а только вызывает его прогиб, а момент m , приложенный посередине, только поворачивает это сечение, но не создает его прогиб. Поэтому полная работа этих сил определяется только их действительной работой на соответствующих перемещениях. Если бы нагрузки были приложены не посередине или в разных сечениях балки, то при вычислении полной работы необходимо было бы учитывать виртуальную часть работы, производимой каждой из них на перемещении по своему направлению, но вызванном другой силой.

⑤ Подставляем сюда полученные значения и определяем угол поворота сечения C :

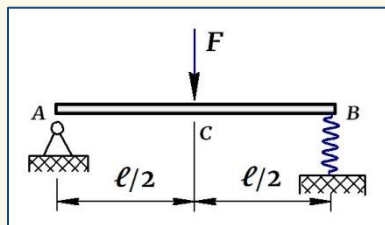
$$U = A_F + A_m = 50000 + \frac{20 \cdot 10^6 \cdot \Theta_C}{2} = 90580 \rightarrow \Theta_C = 0,004 \text{ рад}.$$

Задача 3

Балка из двутавра № 22 длиной $\ell = 6 \text{ м}$ опирается одним концом на шарнирную опору, а другим – на винтовую пружину, и нагружается посередине пролета силой $F = 20 \text{ кН}$. Определить прогиб балки в точке C . Данные для пружины: $D = 10 \text{ см}$, $d = 2 \text{ см}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$, число витков $n = 6$; для балки – $I_x = 2550 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

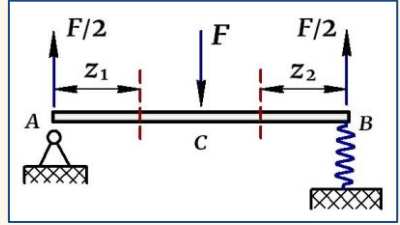
РЕШЕНИЕ:

① Конструкция состоит из двух упругих элементов – балки и пружины, которые деформируются и в них накапливается энергия деформации. Полная потенциальная энергия деформации, накопленная в системе, равна:



$$U_{\text{полн}} = U_{\text{бал}} + U_{\text{пруж}} \quad (1)$$

② Определяем потенциальную энергию, накопленную в БАЛКЕ. Пренебрегая поперечной силой, определим потенциальную энергию через изгибающие моменты, и учитывая, что в силу симметрии нагрузки реакции одинаковы и равны $F/2$, а значит, в обоих сечениях $M_{z_1} = M_{z_2} = (F/2)z$, получаем:



$$U_{\text{бал}} = \int_0^{\ell/2} \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell/2} \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x} = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{[(F/2)z]^2 dz}{2EI_x} = \frac{F^2 \ell^3}{96EI_x} = \frac{(20 \cdot 10^3)^2 (6 \cdot 10^3)^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 176470 \text{ Нмм}. \quad (2)$$

③ Определяем потенциальную энергию, накопленную в ПРУЖИНЕ. Пренебрегая деформацией сдвига и вызывающей его поперечной силой, определяем потенциальную энергию в пружине только через крутящий момент. Учитывая, что пружина сжимается силой $F/2$ и, значит, крутящий момент равен $M_{\text{кр}} = (F/2) \cdot (D/2) = FD/4$, а также принимая значения $I_p = \pi d^4 / 32$ и $\ell = \pi Dn$ — длина пружины, получаем:

$$U_{\text{пруж}} = \int_{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_p} = \int_0^{\pi Dn} \frac{(FD/4)^2 dz}{2G\pi d^4 / 32} = \frac{(FD/4)^2 \pi Dn}{2G\pi d^4 / 32} = \frac{(FD)^2 \pi Dn}{G\pi d^4} = \frac{F^2 D^3 n}{Gd^4} = \frac{(20 \cdot 10^3)^2 100^3 \cdot 6}{8 \cdot 10^4 \cdot 20^4} = 187500 \text{ Нмм}. \quad (3)$$

Примечание.

Величина потенциальной энергии деформации, накопленная в пружине, может быть вычислена через работу силы $F/2$ и осадку пружины λ :

$$\lambda = \frac{8(F/2)D^3 n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot (20/2)10^3 \cdot 100^3 \cdot 6}{8 \cdot 10^4 \cdot 20^4} = 37,5 \text{ мм};$$

$$A_F = U_{\text{пруж}} = \frac{(F/2)\lambda}{2} = \frac{(20/2)10^3 \cdot 37,5}{2} = 187500 \text{ Нмм},$$

что соответствует результату, вычисленному по формуле (3).

Подставляем значения (2) и (3) в (1) и определяем полную потенциальную энергию, накопленную в системе:

$$U_{\text{полн}} = U_{\text{бал}} + U_{\text{пруж}} = 176470 + 187500 = 363970 \text{ Нмм}. \quad (4)$$

④ Под действием силы F сечение C получает прогиб и эта сила на этом прогибе совершает работу, которая согласно теореме Клапейрона определяется как:

$$A_F = \frac{F y_C}{2}. \quad (5)$$

На основании закона сохранения энергии $A_F = U_{\text{полн}}$, поэтому приравниваем значения (4) и (5) и получаем:

$$\frac{F y_C}{2} = U_{\text{полн}}, \text{ отсюда } y_C = \frac{2 U_{\text{полн}}}{F} = \frac{2 \cdot 363970}{20 \cdot 10^3} = 36,4 \text{ мм}.$$

⑤ Для сравнения, если бы обе опоры были жесткими, прогиб посередине пролета для данной расчетной схемы балки был бы равен:

$$y_C = \frac{F l^3}{48 E I_x} = \frac{20 \cdot 10^3 (6 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 17,6 \text{ мм}.$$

Задача 4

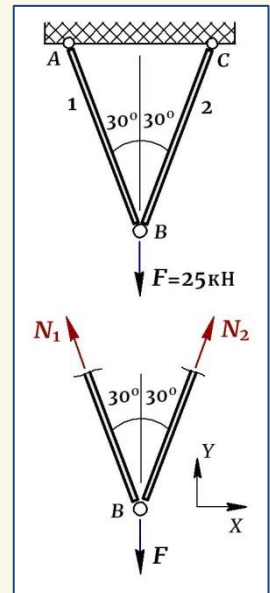
Шарнирно-стержневая конструкция состоит из двух стальных стержней одинаковой длины $l_1 = l_2 = 1 \text{ м}$, но с различными диаметрами сечения $d_1 = 12 \text{ мм}$ и $d_2 = 20 \text{ мм}$, и нагружается в узле B силой $F = 25 \text{ кН}$. Определить опускание узла Δ_B . Принять: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Стержни в конструкции работают на растяжение. Методом сечений определяем в стержнях продольные силы, для чего отсекаем узел и рассматриваем его равновесие:

$$\sum X = 0: N_2 \sin 30^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0 \rightarrow N_1 = N_2.$$

$$\sum Y = 0: 2N_1 \cos 30^\circ - F = 0 \rightarrow$$



$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos 30^\circ} = \frac{25}{2 \cos 30^\circ} = 14,4 \text{ кН}.$$

② Для удобства расчета вычисляем площади поперечных сечений:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ мм}^2; \quad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2.$$

③ Определяем потенциальную энергию деформации, накопленную в стержнях:

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} = \int_{\ell} \frac{N_1^2 dz}{2E_1 A_1} + \int_{\ell} \frac{N_2^2 dz}{2E_2 A_2} = \frac{N_1^2 \ell_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2E_2 A_2} =$$

$$= \frac{(14,4 \cdot 10^3)^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 113} + \frac{(14,4 \cdot 10^3)^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 314} = 6229,6 \text{ Нмм}.$$

④ Согласно теореме Клапейрона, работа силы F на перемещении точки ее приложения Δ_B равна: $A_F = (F \cdot \Delta_B) / 2$.

Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

$$A_F = U \rightarrow \frac{F \cdot \Delta_B}{2} = U \rightarrow \Delta_B = \frac{2U}{F} = \frac{2 \cdot 6229,6}{25 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ мм}.$$

Задача 5

Вал, передающий мощность $N = 90$ л.с. при скорости вращения $n = 100$ об/мин, закручен на угол $\varphi^\circ = 1,4^\circ$ на длине $\ell = 4,2$ м. Определить потенциальную энергию деформации, накопленную на длине $\ell_0 = 1$ м (на одном погонном метре вала).

РЕШЕНИЕ:

① Определяем крутящий момент $M_{кр}$ на валу через мощность, передаваемую валом, и скорость вращения:

$$M_{кр} = 7,2 \frac{N}{n} = 7,2 \frac{90}{100} = 6,48 \text{ кНм}. \quad (1)$$

② Согласно закону Гука угол закручивания вала определяется как:

$$\varphi^\circ = \frac{M_{кр} \ell}{GI_\rho} \cdot \frac{180^\circ}{\pi},$$

откуда с учетом значения (1) получаем \rightarrow

$$I_{\rho} = \frac{M_{\text{кр}} \ell \cdot 180^{\circ}}{G \pi \cdot \varphi^{\circ}} = \frac{6,48 \cdot 10^6 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 1,4^{\circ}} = 1393 \text{ см}^4. \quad (2)$$

③ Определяем потенциальную энергию деформации, накопленную на одном погонном метре вала, т.е. на длине $\ell_0 = 1 \text{ м}$:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}^2 \ell_0}{2GI_{\rho}} = \frac{(6,48 \cdot 10^6)^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 1393 \cdot 10^4} = 0,019 \text{ кНм}.$$

Задача 6

Стальной вал ($G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$) постоянного сечения диаметром $d = 28 \text{ мм}$ и длиной $\ell = 1,5 \text{ м}$ скручен моментом $M_{\text{кр}} = 0,2 \text{ кНм}$. Вычислить количество потенциальной энергии деформации, накопленной валом при закручивании.

РЕШЕНИЕ:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}^2 \ell}{2G (\pi d^4 / 32)} = \frac{(0,2 \cdot 10^6)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 (3,14 \cdot 28^4 / 32)} = 0,006 \text{ кНм}.$$

Задача 7

Балка длиной ℓ постоянного сечения жесткостью EI_x и высотой h испытывает чистый изгиб. Определить потенциальную энергию деформации, накопленную балкой, полагая, что наибольшие напряжения в ней равны $[\sigma]$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем изгибающий момент в опасном сечении балки:

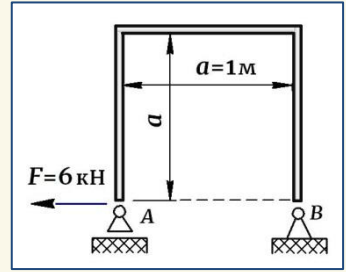
$$\sigma_{\text{max}} = [\sigma] = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} = \frac{M_{\text{изг}}}{I_x / (h/2)} = \frac{M_{\text{изг}} h}{2I_x} \rightarrow M_{\text{изг}} = \frac{2I_x [\sigma]}{h}.$$

② Тогда потенциальная энергия деформации с учетом значения изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ равна:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} = \frac{M_{\text{изг}}^2 \ell}{2EI_x} = \frac{4I_x^2 [\sigma]^2 \ell}{Eh^2}.$$

Задача 8

Рама из двутавра № 10 нагружена на опоре А силой $F = 6 \text{ кН}$. Используя зависимость между потенциальной энергией деформации и работой силы, определить горизонтальное перемещение шарнирно-подвижной опоры. Принять для двутавра: $I_x = 198 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

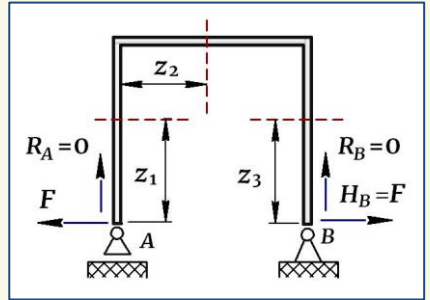


РЕШЕНИЕ:

① Реакции опор на раме равны:

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow H_B = F; \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow R_A = R_B = 0.$$

② При поперечном изгибе плоской рамы на ее участках возникает изгибающий момент, а также продольные и поперечные силы. Пренебрегая влиянием последних на величину энергии деформации, а значит, и на величину возникающих перемещений, определим энергию U только через изгибающие моменты:



$$\begin{aligned} U &= \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} = \int_0^a \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{M_{z_3}^2 dz}{2EI_x} = \\ &= \left\| \begin{aligned} M_{z_1} &= Fz_1; M_{z_2} = Fa; \\ M_{z_3} &= H_B z_3 = Fz_3 \end{aligned} \right\| = \int_0^a \frac{(Fz_1)^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{(Fa)^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{(Fz_3)^2 dz}{2EI_x} = \\ &= \frac{F^2 a^3}{6EI_x} + \frac{F^2 a^3}{2EI_x} + \frac{F^2 a^3}{6EI_x} = \frac{5 F^2 a^3}{6 EI_x} = \frac{5 \cdot (6 \cdot 10^3)^2 (1 \cdot 10^3)^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 198 \cdot 10^4} = 75758 \text{ Нмм}. \end{aligned}$$

③ Согласно теореме Клапейрона работа силы F на перемещении опоры А определяется как $A_F = (F \Delta_A) / 2$. Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

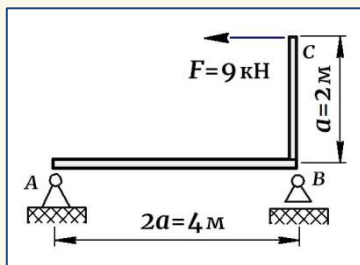
$$A_F = U \rightarrow \frac{F \Delta_A}{2} = U \rightarrow \Delta_A = \frac{2U}{F} = \frac{2 \cdot 75758}{6 \cdot 10^3} = 25,3 \text{ мм}.$$

Задача 9

К балке AB длиной $2a$, установленной на двух опорах, на правом конце жестко прикреплена стойка BC высотой a , в верхней точке которой приложена сила $F = 9 \text{ кН}$. Через энергию деформации и работу силы F определить горизонтальное перемещение точки приложения силы $\Delta_C^{\text{гориз}}$.

Принять для обоих элементов:

$$I_x = 873 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



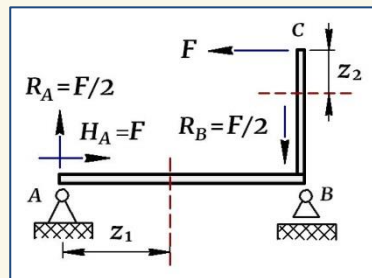
РЕШЕНИЕ:

① Определяем на балке реакции опор:

$$\sum X = 0: \boxed{H_A = F};$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: Fa - R_B \cdot 2a = 0 \\ \sum M_B = 0: Fa - R_A \cdot 2a = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_A = F/2 \\ R_B = F/2 \end{aligned}}.$$

② Оба элемента конструкции испытывают плоский поперечный изгиб, при котором в сечениях возникают изгибающий момент и поперечная сила. Пренебрегая влиянием последней на величину энергии деформации, а значит, и на величину возникающих перемещений, определим энергию только через изгибающие моменты:



$$\begin{aligned} U &= \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} = \int_0^{2a} \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x} = \left\| \begin{aligned} M_{z_1} &= R_A z_1 = (F/2) z_1 \\ M_{z_2} &= F z_2 \end{aligned} \right\| = \\ &= \int_0^{2a} \frac{[(F/2) z_1]^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{(F z_2)^2 dz}{2EI_x} = \frac{F^2 a^3}{3EI_x} + \frac{F^2 a^3}{6EI_x} = \frac{F^2 a^3}{2EI_x} = \\ &= \frac{(9 \cdot 10^3)^2 (2 \cdot 10^3)^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 185567 \text{ Нмм.} \end{aligned}$$

③ Согласно теореме Клапейрона работа силы F на перемещении

точки приложения определяется как $\boxed{A_F = F \Delta_C^{\text{гориз}} / 2}$. Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

$$\boxed{A_F = U} \rightarrow \frac{F \Delta_C^{\text{гориз}}}{2} = U \rightarrow \boxed{\Delta_C^{\text{гориз}}} = \frac{2U}{F} = \frac{2 \cdot 185567}{9 \cdot 10^3} = 41,2 \text{ мм.}$$

Примечание.

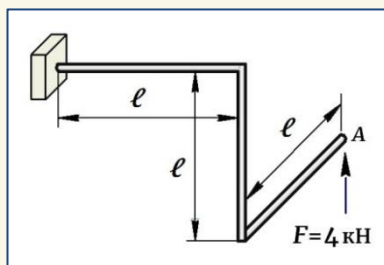
Накопление потенциальной энергии деформации за счет поперечных сил, возникающих в балке и стойке, составляет порядка 1,4% от количества энергии, создаваемой изгибающим моментом. Если влияние поперечных сил учитывать, то энергия деформации будет равна 188073 Нмм, а горизонтальное перемещение точки приложения силы составлять величину порядка 41,8 мм.

Задача 10

Стальной пространственный стержень круглого поперечного сечения диаметром $d=8$ см и длиной участков $\ell=0,8$ м подвергается действию силы $F=4$ кН. Используя зависимость между потенциальной энергией деформации и работой силы F , определить вертикальное перемещение точки приложения силы —

$\Delta_A^{\text{верт}}$ Принять для стержня:

$$E=2 \times 10^5 \text{ МПа, } G=8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Определяем в пространственном стержне потенциальную энергию деформации U . Пренебрегая возникающими на участках стержня поперечными и продольными силами и их влиянием на величину перемещений, потенциальная энергия деформации, накопленная в стержне, определится как:

$$\boxed{U = \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 dz}{2GI_{\rho}}}, \quad (1)$$

где для заданного стержня —

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} = 200,96 \text{ см}^4; \quad I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = 2I_x = 401,92 \text{ см}^4.$$

② Рассматриваем сечения на каждом участке и записываем в сечении значения изгибающих и крутящих моментов:

Участок АВ: $0 \leq z_1 \leq \ell$

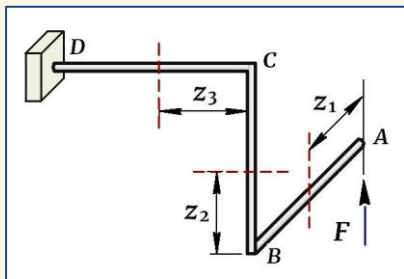
$$M_{изгZ_1} = Fz_1; \quad M_{крZ_1} = 0.$$

Участок ВС: $0 \leq z_2 \leq \ell$

$$M_{изгZ_2} = F\ell; \quad M_{крZ_2} = 0.$$

Участок CD: $0 \leq z_3 \leq \ell$

$$M_{изгZ_2} = Fz_3; \quad M_{крZ_3} = F\ell.$$



Подставляем значения моментов в формулу (1) и вычисляем U :

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\ell} \frac{M_{изгZ_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_{изгZ_2}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_{изгZ_3}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{M_{крZ_3}^2 dz}{2GI_{\rho}} = \\ &= \int_0^{\ell} \frac{(Fz_1)^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{(F\ell)^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{(Fz_3)^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{\ell} \frac{(F\ell)^2 dz}{2GI_{\rho}} = \frac{F^2 \ell^3}{6EI_x} + \frac{F^2 \ell^3}{2EI_x} + \\ &+ \frac{F^2 \ell^3}{6EI_x} + \frac{F^2 \ell^3}{2GI_{\rho}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{F^2 \ell^3}{EI_x} + \frac{F^2 \ell^3}{2GI_{\rho}} = \frac{5(4 \cdot 10^3)^2 (0,8 \cdot 10^3)^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200,96 \cdot 10^4} + \\ &+ \frac{(4 \cdot 10^3)^2 (0,8 \cdot 10^3)^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 401,92 \cdot 10^4} = 16985,1 + 12738,9 = 29724 \text{ Нмм}. \end{aligned}$$

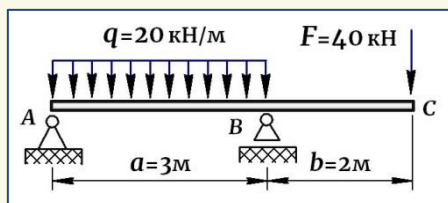
- ③ Согласно теореме Клапейрона работа силы F на перемещении точки A определяется как $A_F = F\Delta_A^{верт} / 2$. Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

$$A_F = U \rightarrow \frac{F\Delta_A^{верт}}{2} = U \rightarrow \Delta_A^{верт} = \frac{2U}{F} = \frac{2 \cdot 29724}{4 \cdot 10^3} = 14,9 \text{ мм}.$$

2. Определение перемещений методом Кастилиано

Задача 11

Для заданной балки определить прогиб конца консоли C и угол поворота опорного сечения A . Принять: $I_x = 3800 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



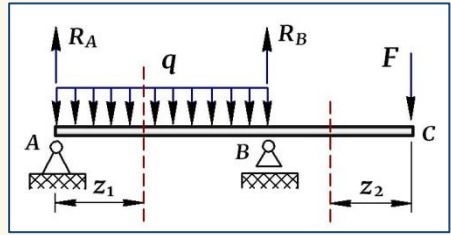
РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем реакции опор:

$$\sum M_A = 0: F(a+b) + qa^2/2 - R_B a = 0$$

$$\sum M_B = 0: Fb - qa^2/2 + R_A a = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{R_B = F(a+b)/a + qa/2}$$
$$\boxed{R_A = qa/2 - Fb/a} \quad (1)$$



Проверка — $\sum Y = 0$:

$$R_A + R_B - F - qa = 0 \rightarrow qa/2 - Fb/a + F(a+b)/a + qa/2 - F - qa = 0.$$

② Определяем потенциальную энергию деформации. Пренебрегая влиянием поперечной силы, потенциальную энергию на участках балки записываем через значения изгибающих моментов:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} = \int_0^a \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^b \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x} \quad (2)$$

③ Вычисляем прогиб конца консоли C. Согласно теореме Кастилиано «производная потенциальной энергии по обобщенной силе равна обобщенному перемещению», поэтому прогиб в точке C определяется как:

$$\boxed{y_C = \frac{\partial U}{\partial F}} \quad (3)$$

Дифференцируем энергию (2) в соответствии с (3) и получаем:

$$y_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^a \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial F} + \int_0^b \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial F}, \quad (4)$$

где согласно рисунку и значениям опорных реакций (1) \rightarrow

$$\boxed{M_{z_1}} = R_A z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \left(\frac{qa}{2} - \frac{Fb}{a} \right) z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \frac{qa}{2} z_1 - \frac{Fb}{a} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}; \quad (5)$$

$$\boxed{M_{z_2}} = -Fz_2,$$

а производные моментов (5) по силе F соответственно равны \rightarrow

$$\boxed{\frac{\partial M_{z_1}}{\partial F}} = -\frac{b}{a} z_1; \quad \boxed{\frac{\partial M_{z_2}}{\partial F}} = -z_2. \quad (6)$$

Подставляем значения (5) и (6) в интегралы (4), производим интегрирование и после преобразования получаем:

$$\begin{aligned}
 \boxed{y_C} &= \int_0^a \frac{\left(\frac{qa}{2}z_1 - \frac{Fb}{a}z_1 - \frac{qz_1^2}{2}\right)\left(-\frac{b}{a}z_1\right)dz}{EI_x} + \int_0^b \frac{(-Fz_2)(-z_2)dz}{EI_x} = \\
 &= -\frac{qbz_1^3}{6EI_x} \Big|_0^a + \frac{Fb^2z_1^3}{3EI_x \cdot a^2} \Big|_0^a + \frac{qbz_1^4}{8EI_x \cdot a} \Big|_0^a + \frac{Fz_2^3}{3EI_x} \Big|_0^b = \frac{Fb^2(a+b)}{3EI_x} - \frac{qba^3}{24EI_x} = \\
 &= \frac{40 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^2 (3+2) \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} - \frac{20 \cdot 2 \cdot 10^3 (3 \cdot 10^3)^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = 29,2 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

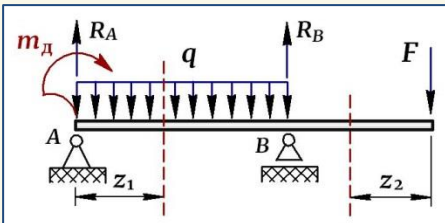
④ Вычисляем угол поворота опорного сечения А :

Примечание.

Применение теоремы Кастилиано предполагает, что в сечении, где следует определить перемещение, должна быть приложена обобщенная сила, соответствующая искомому перемещению. Если в заданном сечении такой нагрузки нет, используется «прием введения добавочной силы», т.е. вводится некая фиктивная нагрузка (добавочная сила F_D или добавочный момент m_D), которая на определенной стадии расчета принимается за существующую, а затем выводится из расчета приравниванием ее к нулю.

★ Для определения угла поворота сечения А прикладываем на опоре добавочный момент m_D и с его учетом определяем реакции опор:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum M_A = 0: F(a+b) + qa^2/2 - R_B a + m_D = 0 \\
 \sum M_B = 0: Fb - qa^2/2 + R_A a + m_D = 0
 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$



$$\begin{aligned}
 R_B &= \frac{F(a+b)}{a} + \frac{qa}{2} + \frac{m_D}{a} \\
 R_A &= \frac{qa}{2} - \frac{Fb}{a} - \frac{m_D}{a}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Проверка — $\sum Y = 0: R_A + R_B - F - qa = 0 \rightarrow$

$$\frac{qa}{2} - \frac{Fb}{a} - \frac{m_D}{a} + \frac{F(a+b)}{a} + \frac{qa}{2} + \frac{m_D}{a} - F - qa = 0.$$

★ Потенциальную энергию деформации вычисляем по формуле (2), а угол поворота опорного сечения А согласно теореме Кастилиано будет определяться как:

$$\Theta_A = \frac{\partial U}{\partial m_D}. \quad (8)$$

★ Дифференцируем энергию (2) в соответствии с (8) и получаем:

$$\Theta_A = \frac{\partial U}{\partial m_D} = \int_0^a \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial m_D} + \int_0^b \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial m_D}, \quad (9)$$

где согласно рисунку и значениям реакций опор (7), изгибающие моменты в указанных сечениях и их производные по добавочному моменту m_D соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} M_{z_1} &= R_A z_1 - \frac{qz_1^2}{2} + m_D = \left(\frac{qa}{2} - \frac{Fb}{a} - \frac{m_D}{a} \right) z_1 - \frac{qz_1^2}{2} + m_D = \\ &= \frac{qa}{2} z_1 - \frac{Fb}{a} z_1 - \frac{m_D}{a} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} + m_D; \quad M_{z_2} = -Fz_2, \\ \text{откуда} \quad \frac{\partial M_{z_1}}{\partial m_D} &= \frac{z_1}{a} + 1; \quad \frac{\partial M_{z_2}}{\partial m_D} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставляем значения (10) в интегралы (9), под знаком интегралов приравняем $m_D = 0$, производим интегрирование и после преобразования получаем:

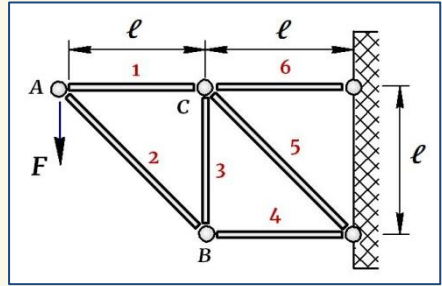
$$\begin{aligned} \Theta_A &= \int_0^a \frac{\left(\frac{qaz_1}{2} - \frac{Fbz_1}{a} - \frac{m_D z_1}{a} - \frac{qz_1^2}{2} + m_D \right) \left(\frac{z_1}{a} + 1 \right) dz}{EI_x} = \frac{qz_1^3}{6EI_x} \Big|_0^a - \\ &= \frac{Fbz_1^3}{3EI_x \cdot a^2} \Big|_0^a - \frac{qz_1^4}{8EI_x \cdot a} \Big|_0^a + \frac{qaz_1^2}{4EI_x} \Big|_0^a - \frac{Fbz_1^2}{2EI_x a} \Big|_0^a - \frac{qz_1^3}{6EI_x} \Big|_0^a = \frac{qa^3}{8EI_x} - \frac{5Fab}{6EI_x} = \\ &= \frac{20(3 \cdot 10^3)^3}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} - \frac{5 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = -0,0174 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Знак «минус» означает, что сечение А повернется в направлении, обратном направлению момента m_D .

Задача 12

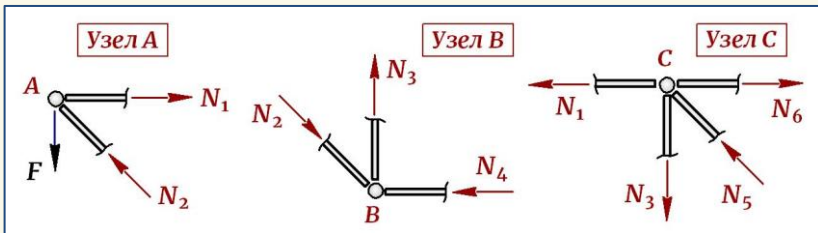
В заданной плоской шарнирно-стержневой конструкции, нагруженной в узле А силой $F = 24$ кН, используя метод Кастилиано, определить опускание точки приложения силы. Принять для стержней:

$$\ell = 1,8 \text{ м}, A = 4 \text{ см}^2, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Методом последовательного вырезания узлов определяем продольные силы в стержнях конструкции:



Узел А

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: N_1 - N_2 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y = 0: N_2 \sin 45^\circ - F = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 = F \\ N_2 = 1,41F \end{aligned} \right\} \cdot \quad (1)$$

Узел В

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: N_2 \sin 45^\circ - N_4 = 0 \\ \sum Y = 0: N_3 - N_2 \cos 45^\circ = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} N_3 = F \\ N_4 = F \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2)$$

Узел С

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: N_6 - N_1 - N_5 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y = 0: N_5 \sin 45^\circ - N_3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} N_5 = 1,41F \\ N_6 = 2F \end{aligned} \right\} \cdot \quad (3)$$

② Учитывая значения продольных сил (1)–(3) и принимая длины стержней равными $-\ell_1 = \ell_3 = \ell_4 = \ell_6 = \ell$; $\ell_2 = \ell_5 = 1,41\ell$, определяем в конструкции потенциальную энергию деформации:

$$\begin{aligned} U &= \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EA} = \int_0^{\ell} \frac{N_1^2 dz}{2EA} + \int_0^{1,41\ell} \frac{N_2^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{N_3^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{N_4^2 dz}{2EA} + \\ &+ \int_0^{1,41\ell} \frac{N_5^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{N_6^2 dz}{2EA} = \int_0^{\ell} \frac{F^2 dz}{2EA} + \int_0^{1,41\ell} \frac{(1,41F)^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{F^2 dz}{2EA} + \end{aligned}$$

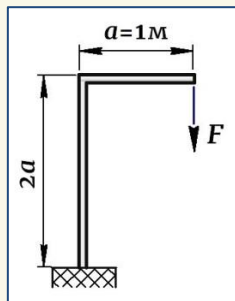
$$+ \int_0^{\ell} \frac{F^2 dz}{2EA} + \int_0^{1,41\ell} \frac{(1,41F)^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{(2F)^2 dz}{2EA} = 6,33 \frac{F^2 \ell}{EA}. \quad (4)$$

③ Методом Кастилиано на основании значения (4) определяем опускание точки приложения силы $-\Delta_A$:

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{12,66F\ell}{EA} = \frac{12,66 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2} = 6,8 \text{ мм.}$$

Задача 13

В заданной плоской раме, нагруженной на конце консоли силой $F = 20 \text{ кН}$, используя метод Кастилиано, определить вертикальное $\Delta^{\text{верт}}$, горизонтальное $\Delta^{\text{гориз}}$ и полное линейное перемещение точки приложения силы. Рама выполнена из двутавра № 22: $I_x = 2550 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

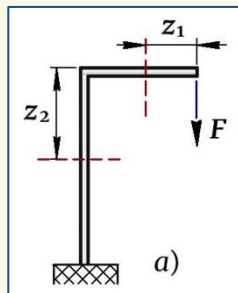
① Определяем потенциальную энергию деформации. Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил, потенциальную энергию записываем через значения изгибающих моментов на участках рамы:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_{\text{изг}}^2 dz}{2EI_x} = \int_0^a \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x}. \quad (1)$$

② Вычисляем вертикальное перемещение $\Delta^{\text{верт}}$ точки приложения силы (a). Согласно теореме Кастилиано —

$$\Delta^{\text{верт}} = \frac{\partial U}{\partial F}. \quad (2)$$

Дифференцируем энергию (1) в соответствии с теоремой Кастилиано (2) и получаем:



$$\Delta^{\text{верт}} = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^a \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial F} + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial F}, \quad (3)$$

где согласно рисунку изгибающие моменты на участках рамы и их производные соответственно равны →

$$\boxed{M_{z_1}} = -Fz_1 \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{z_1}}{\partial F}} = -z_1; \quad \boxed{M_{z_2}} = -Fa \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{z_2}}{\partial F}} = -a. \quad (4)$$

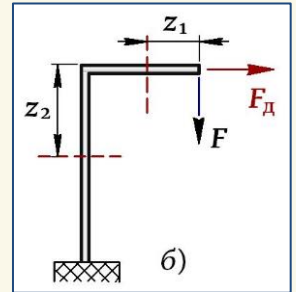
Подставляем значения (4) в интегралы (3), производим интегрирование и после преобразования получаем:

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_{верт}} &= \int_0^a \frac{(-Fz_1)(-z_1) dz}{EI_x} + \int_0^{2a} \frac{(-Fa)(-a) dz}{EI_x} = \frac{Fz_1^3}{3EI_x} \Big|_0^a + \frac{Fa^2z_2}{EI_x} \Big|_0^{2a} = \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{Fa^3}{EI_x} = \frac{7 \cdot 20 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 9,2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

③ Вычисляем горизонтальное перемещение $\Delta^{гориз}$ точки приложения силы (б). Применение теоремы Кастилиано предполагает, что в сечении по направлению искомого перемещения должна быть приложена соответствующая обобщенная сила, поэтому используем «прием введения добавочной силы» и прикладываем на конце консоли добавочную силу F_D , направленную горизонтально.

Тогда согласно теореме Кастилиано —

$$\boxed{\Delta^{гориз} = \frac{\partial U}{\partial F_D}}. \quad (5)$$



Дифференцируем энергию (1) в соответствии с теоремой Кастилиано (5) и получаем:

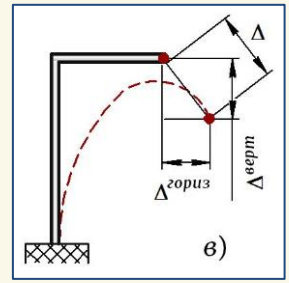
$$\Delta^{гориз} = \frac{\partial U}{\partial F_D} = \int_0^a \frac{M_{z_1}}{EI_x} dz \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial F_D} + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2}}{EI_x} dz \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial F_D}, \quad (6)$$

где согласно рисунку изгибающие моменты на участках рамы с учетом добавочной силы и их производные соответственно равны →

$$\boxed{M_{z_1}} = -Fz_1 \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{z_1}}{\partial F_D}} = 0; \quad \boxed{M_{z_2}} = -Fa - F_D z_2 \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{z_2}}{\partial F_D}} = -z_2. \quad (7)$$

Подставляем значения (7) в интегралы (6), под знаком интеграла принимаем $F_D = 0$, производим интегрирование и после преобразования получаем:

$$\Delta_{\text{гориз}} = \int_0^{2a} \frac{(-Fa - F_{\text{д}} z_2)(-z_2) dz}{EI_x} = \frac{Faz_2^2}{2EI_x} \Big|_0^{2a} = \frac{2Fa^3}{EI_x} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 7,8 \text{ мм.}$$



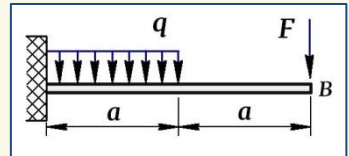
④ Определяем полное линейное перемещение конца консоли (в):

$$\Delta = \sqrt{(\Delta_{\text{верт}})^2 + (\Delta_{\text{гориз}})^2}, \text{ откуда } \Delta = \sqrt{9,2^2 + 7,8^2} = 12 \text{ мм.}$$

3. Определение перемещений с помощью интеграла Максвелла-Мора

Задача 14

В балке длиной $\ell = 2a = 4 \text{ м}$, нагруженной распределенной нагрузкой $q = 12 \text{ кН/м}$ и силой $F = 20 \text{ кН}$, используя интеграл Максвелла-Мора, определить прогиб и угол поворота конца консоли B . Принять для балки: $I_x = 3800 \text{ см}^4$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

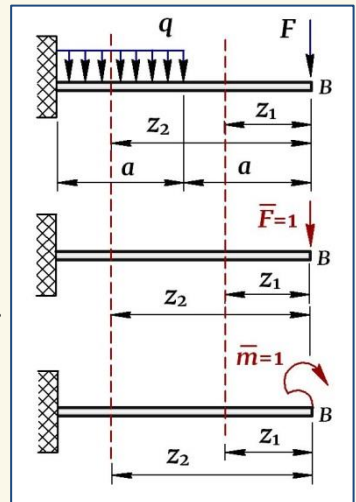


РЕШЕНИЕ:

① Балка имеет два участка. Пренебрегая влиянием поперечной силы на величину перемещений, интеграл Максвелла-Мора для плоского поперечного изгиба принимает вид (1):

$$\Delta_B = \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_a^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz.$$

② От свободного конца рассматриваем сечения z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$) и z_2 ($a \leq z_2 \leq 2a$) и записываем для них значения грузовых изгибающих моментов:



$$\left. \begin{aligned} \boxed{M_{z_1(F)}} &= -Fz_1; \\ \boxed{M_{z_2(F)}} &= -Fz_2 - \frac{q(z_2 - a)^2}{2} = -Fz_2 - \frac{qz_2^2}{2} + qaz_2 - \frac{qa^2}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

③ Определяем прогиб сечения y_B :

★ Рассматриваем ту же балку, освобождаем ее от заданной внешней нагрузки, в сечении B прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$ и для тех же сечений z_1 и z_2 записываем значения *единичных изгибающих моментов* —

$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = -\bar{F}z_1 = -z_1; \quad \boxed{\bar{M}_{z_2}} = -\bar{F}z_2 = -z_2. \quad (3)$$

★ Подставляем значения (2) и (3) в интеграл (1), решаем его и получаем —

$$\begin{aligned} \boxed{y_B} &= \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_a^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz = \int_0^a \frac{(-Fz_1)(-z_1)}{EI_x} dz + \\ &+ \int_a^{2a} \frac{(-Fz_2 - qz_2^2/2 + qaz_2 - qa^2/2)(-z_2)}{EI_x} dz = \frac{Fz^3}{3EI_x} \Big|_0^a + \frac{Fz^3}{3EI_x} \Big|_a^{2a} + \\ &+ \frac{qz^4}{8EI_x} \Big|_a^{2a} - \frac{qaz^3}{3EI_x} \Big|_a^{2a} + \frac{qa^2z^2}{4EI_x} \Big|_a^{2a} = \frac{Fa^3}{3EI_x} + \frac{8Fa^3}{3EI_x} - \frac{Fa^3}{3EI_x} + \frac{2qa^4}{EI_x} - \frac{qa^4}{8EI_x} - \\ &- \frac{8qa^4}{3EI_x} + \frac{qa^4}{3EI_x} + \frac{qa^4}{EI_x} - \frac{qa^4}{4EI_x} = \frac{8Fa^3}{3EI_x} + \frac{7qa^4}{24EI_x} = \frac{8 \cdot 20 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} + \\ &+ \frac{7 \cdot 12 (2 \cdot 10^3)^4}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = 56,1 + 7,4 = 63,5 \text{ мм.} \end{aligned}$$

④ Определяем угол поворота сечения Θ_B :

★ Рассматриваем ту же балку, убираем внешнюю нагрузку, но теперь в сечении B прикладываем единичный момент $\bar{m}=1$ и записываем для сечений z_1 и z_2 значения *единичных изгибающих моментов* —

$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = \boxed{\bar{M}_{z_2}} = -\bar{m} = -1. \quad (4)$$

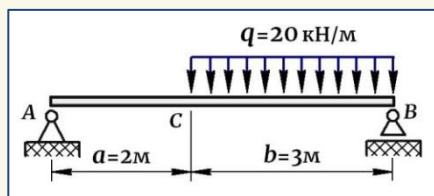
★ Подставляем значения (2) и (4) в интеграл (1), решаем его и получаем —

$$\begin{aligned}
\Theta_B &= \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_a^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz = \int_0^a \frac{(-Fz_1)(-1)}{EI_x} dz + \\
&+ \int_a^{2a} \frac{(-Fz_2 - qz_2^2/2 + qaz_2 - qa^2/2)(-1)}{EI_x} dz = \frac{Fz^2}{2EI_x} \Big|_0^a + \frac{Fz^2}{2EI_x} \Big|_a^{2a} + \\
&+ \frac{qz^3}{6EI_x} \Big|_a^{2a} - \frac{qaz^2}{2EI_x} \Big|_a^{2a} + \frac{qa^2z}{2EI_x} \Big|_a^{2a} = \frac{Fa^2}{2EI_x} + \frac{2Fa^2}{EI_x} - \frac{Fa^2}{2EI_x} + \frac{4qa^3}{3EI_x} - \frac{qa^3}{6EI_x} - \\
&- \frac{2qa^3}{EI_x} + \frac{qa^3}{2EI_x} + \frac{qa^3}{EI_x} - \frac{qa^3}{2EI_x} = \frac{2Fa^2}{EI_x} + \frac{qa^3}{6EI_x} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} + \\
&+ \frac{12(2 \cdot 10^3)^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = 0,021 + 0,002 = 0,023 \text{ рад.}
\end{aligned}$$

Задача 15

Используя интеграл Максвелла–Мора, определить в заданной балке прогиб сечения С и угол поворота опорного сечения А. Принять:

$$I_x = 4000 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① На заданной балке определяем реакции опор:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: qb(a+b/2) - R_B(a+b) = 0 \\ \sum M_B = 0: qb^2/2 - R_A(a+b) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{matrix} R_A = 18 \text{ кН} \\ R_B = 42 \text{ кН} \end{matrix} \quad (1)$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 3 = 0 \rightarrow 18 + 42 - 20 \cdot 3 = 0.$$

② На балке два участка. Пренебрегая поперечной силой, интеграл Максвелла–Мора при плоском изгибе принимает вид:

$$\Delta = \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^b \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz, \quad (2)$$

где $M_{z_1(F)}$ и $M_{z_2(F)}$ – грузовые изгибающие моменты в сечениях z_1 и z_2 , соответственно равные:

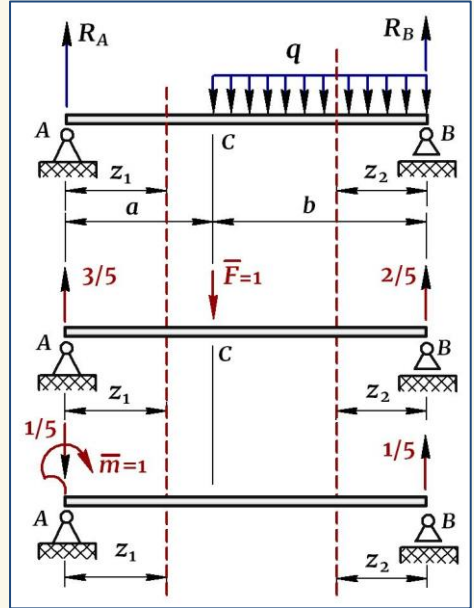
$$\boxed{M_{z_1(F)}} = R_A z_1; \quad \boxed{M_{z_2(F)}} = R_B z_2 - qz_2^2/2. \quad (3)$$

③ Определяем прогиб y_C . Для этого берем ту же балку, убираем внешнюю заданную нагрузку, а в сечении C прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$. Составляем уравнения равновесия и определяем реакции опор от этой единичной силы:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{F}a - \bar{R}_B(a+b) = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{R}_A(a+b) - \bar{F}b = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{R}_B = \bar{F}a / (a+b) = 2/5 \\ \bar{R}_A = \bar{F}b / (a+b) = 3/5 \end{aligned}}$$

Записываем в тех же сечениях выражения для изгибающих моментов, но от единичной силы (единичные моменты):



$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = \bar{R}_A z_1 = (3/5)z_1; \quad \boxed{\bar{M}_{z_2}} = \bar{R}_B z_2 = (2/5)z_2. \quad (4)$$

Подставляем грузовые (3) и единичные (4) моменты в интеграл Максвелла–Мора (2) и с учетом значений реакций опор (1) вычисляем прогиб в точке C :

$$\begin{aligned} \boxed{y_C} &= \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^b \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz = \int_0^a \frac{(R_A z_1)(\bar{R}_A z_1)}{EI_x} dz + \\ &+ \int_0^b \frac{(R_B z_2 - qz_2^2/2)(\bar{R}_B z_2)}{EI_x} dz = \frac{R_A \bar{R}_A z_1^3}{3EI_x} \Big|_0^a + \frac{R_B \bar{R}_B z_2^3}{3EI_x} \Big|_0^b - \\ &- \frac{q \bar{R}_B z_2^4}{8EI_x} \Big|_0^b = \frac{R_A \bar{R}_A a^3}{3EI_x} + \frac{R_B \bar{R}_B b^3}{3EI_x} - \frac{q \bar{R}_B b^4}{8EI_x} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot (3/5)(2 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{42 \cdot 10^3 \cdot (2/5)(3 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4} - \frac{20 \cdot (2/5)(3 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4} = 12,4 \text{ мм.}$$

④ Определяем угол поворота Θ_A . Для этого берем балку, убираем внешнюю нагрузку и на опорном сечении А прикладываем единичный момент $\bar{m}=1$. Составляем для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор от момента $\bar{m}=1$:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{m} - \bar{R}_B(a+b) = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{m} - \bar{R}_A(a+b) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{\bar{m}}{a+b}}. \quad (5)$$

Примечание.

Следует обратить внимание, что момент создается парой сил и определяется как «сила на плечо», поэтому грузовой момент имеет размерность «СИЛА на ДЛИНУ», например, [кНм], а единичный момент \bar{m} , созданный парой единичных сил, являющихся величинами безразмерными, соответственно имеет размерность $[\bar{F} \times \text{м}] = [1 \times \text{м}] = [\text{м}]$. Поэтому реакции опор (5) от единичной силы также являются величинами безразмерными.

Записываем выражения для изгибающих моментов в тех же сечениях, но от единичного момента (единичные изгибающие моменты):

$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = \bar{m} - \bar{R}_A z_1; \quad \boxed{\bar{M}_{z_2}} = \bar{R}_B z_2. \quad (6)$$

Подставляем *грузовые* (3) и *единичные* (6) моменты в интеграл Максвелла–Мора (2) и, учитывая значения (5), вычисляем угол поворота опорного сечения А:

$$\begin{aligned} \boxed{\Theta_A} &= \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^b \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz = \int_0^a \frac{(R_A z_1)(\bar{m} - \bar{R}_A z_1)}{EI_x} dz + \\ &+ \int_0^b \frac{(R_B z_2 - qz_2^2/2)(\bar{R}_B z_2)}{EI_x} dz = \frac{R_A \bar{m} z_1^2}{2EI_x} \Big|_0^a - \frac{R_A \bar{R}_A z_1^3}{3EI_x} \Big|_0^a + \\ &+ \frac{R_B \bar{R}_B z_2^3}{3EI_x} \Big|_0^b - \frac{q \bar{R}_B z_2^4}{8EI_x} \Big|_0^b = \frac{R_A \bar{m} a^2}{2EI_x} - \frac{R_A \bar{R}_A a^3}{3EI_x} + \frac{R_B \bar{R}_B b^3}{3EI_x} - \\ &- \frac{q \bar{R}_B b^4}{8EI_x} = \frac{R_A \bar{m} a^2}{2EI_x} - \frac{R_A \bar{m} a^3}{3EI_x(a+b)} + \frac{R_B \bar{m} b^3}{3EI_x(a+b)} - \frac{q \bar{m} b^4}{8EI_x(a+b)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4} - \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3} +$$

$$+ \frac{42 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3} - \frac{20 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4000 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^3} = 0,0078 \text{ рад.}$$

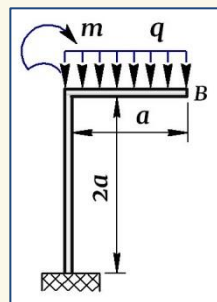
Примечание.

Если в результате расчетов искомые значения получатся со знаком «минус», значит, перемещение (прогиб или поворот) произойдет в направлении, обратном направлению приложенной единичной нагрузки.

Задача 16

Используя интеграл Максвелла–Мора, в заданной плоской раме определить вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли В. Принять для рамы: $m = 15 \text{ кНм}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$,

$$I_x = 1290 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① На раме два участка – горизонтальный и вертикальный, поэтому следует брать сечения на каждом из них, записав для этих сечений значения *грузовых* и *единичных* внутренних усилий. Пренебрегая влиянием поперечной и продольной сил на соответствующих участках и учитывая только изгибающие моменты, интеграл Максвелла–Мора для определения перемещений принимает вид:

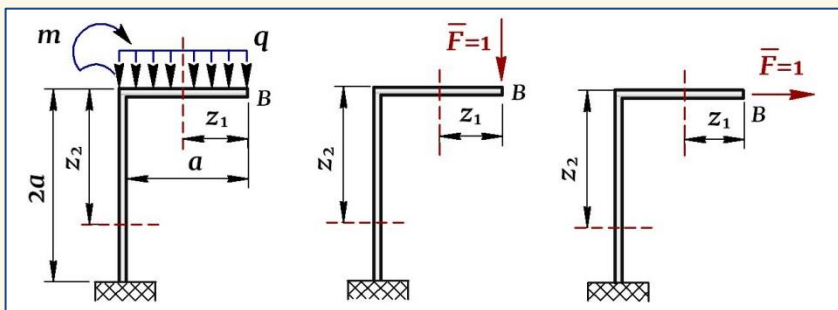
$$\Delta_B = \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz . \quad (1)$$

② Определяем вертикальное $\Delta_B^{верт}$ перемещение конца консоли В.

Для этого прикладываем единичную силу $\bar{F} = 1$ вертикально и записываем для сечений z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$) и z_2 ($a \leq z_2 \leq 2a$) выражения внутренних усилий – *грузовых* и *единичных*:

$$\boxed{M_{z_1(F)}} = -\frac{qz_1^2}{2}; \quad \boxed{M_{z_2(F)}} = -\frac{qa^2}{2} - m; \quad (2)$$

$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = -\bar{F}z_1 = -z_1; \quad \boxed{\bar{M}_{z_2}} = -\bar{F}a = -a. \quad (3)$$



Подставляем значения (2) и (3) в интеграл (1) и получаем:

$$\begin{aligned}
 \Delta_B^{\text{верт}} &= \int_0^a \frac{\left(-\frac{qz_1^2}{2}\right)(-z_1)}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{\left(-\frac{qa^2}{2} - m\right)(-a)}{EI_x} dz = \frac{qz^4}{8EI_x} \Big|_0^a + \\
 &+ \frac{qa^3z}{2EI_x} \Big|_0^{2a} + \frac{maz}{EI_x} \Big|_0^{2a} = \frac{qa^4}{8EI_x} + \frac{qa^4}{EI_x} + \frac{2ma^2}{EI_x} = \frac{9qa^4}{8EI_x} + \frac{2ma^2}{EI_x} = \\
 &= \frac{9 \cdot 20 \cdot (1 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 8,7 + 11,6 = 20,3 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

③ Определяем горизонтальное $\Delta_B^{\text{гориз}}$ перемещение конца консоли В. Теперь прикладываем единичную силу $\bar{F} = 1$ горизонтально и для тех же сечений записываем выражения *единичных* внутренних сил:

$$\boxed{\bar{M}_{z_1}} = 0; \quad \boxed{\bar{M}_{z_2}} = -\bar{F}z_2 = -z_2. \quad (4)$$

Подставляем значения (2) и (4) в интеграл (1) и получаем:

$$\begin{aligned}
 \Delta_B^{\text{гориз}} &= \int_0^a \frac{\left(-\frac{qz_1^2}{2}\right) \cdot 0}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{\left(-\frac{qa^2}{2} - m\right)(-z_2)}{EI_x} dz = \frac{qa^2z^2}{4EI_x} \Big|_0^{2a} + \\
 &+ \frac{mz^2}{2EI_x} \Big|_0^{2a} = \frac{qa^4}{EI_x} + \frac{2ma^2}{EI_x} = \frac{20 \cdot (1 \cdot 10^3)^4 + 2 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot (1 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 19,4 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

Задача 17

В раме круглого поперечного сечения диаметром $d = 11\text{ см}$ с помощью интеграла Максвелла-Мора определить вертикальное перемещение сечения C . Принять для рамы: $a = 1\text{ м}$, $E = 2 \times 10^5\text{ МПа}$.

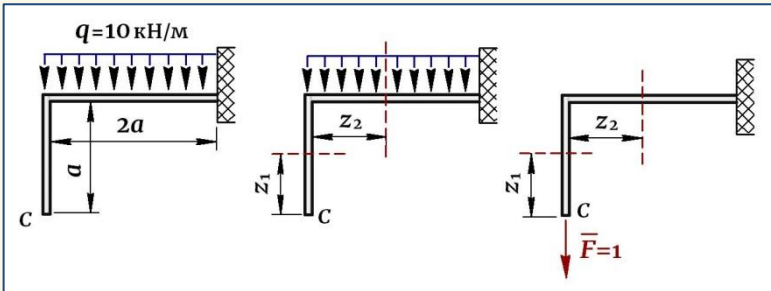
РЕШЕНИЕ:

① На раме два участка, поэтому рассматриваем на них сечения и записываем для этих сечений значения *грузовых* и *единичных* внутренних усилий. Пренебрегая влиянием поперечной и продольной сил на соответствующих участках и учитывая только изгибающие моменты, интеграл Максвелла-Мора для определения перемещений принимает вид:

$$\Delta_C = \int_0^a \frac{M_{z_1(F)} \bar{M}_{z_1}}{EI_x} dz + \int_0^{2a} \frac{M_{z_2(F)} \bar{M}_{z_2}}{EI_x} dz, \quad (1)$$

где $I_x = \pi d^4 / 64 = 3,14 \cdot 11^4 / 64 = 718,3\text{ см}^4$.

② Определяем вертикальное перемещение точки C .



Для этого прикладываем в этой точке единичную силу $\bar{F} = 1$ и записываем для сечений z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$) и z_2 ($a \leq z_2 \leq 2a$) и выражения внутренних усилий — *грузовых* и *единичных*:

$$\begin{aligned} M_{z_1(F)} &= 0; & \bar{M}_{z_1} &= 0; \\ M_{z_2(F)} &= -qz_2^2/2; & \bar{M}_{z_2} &= -\bar{F}z_2 = -z_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляем значения (2) в интеграл (1) и получаем:

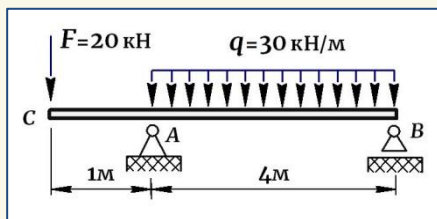
$$\Delta_C^{\text{верт}} = \int_0^{2a} \frac{(-qz_2^2/2)(-z_2)}{EI_x} dz = \frac{2qa^4}{EI_x} = \frac{2 \cdot 10(1 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 718,3 \cdot 10^4} = 13,9\text{ мм}.$$

4. Графоаналитический метод определения перемещений. Метод перемножения эпюр

Задача 18

В заданной балке методом перемножения эпюр определить прогиб и угол поворота сечения C на конце консоли. Принять для балки:

$$I_X = 1420 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: F \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 &= 0 \\ \sum M_B = 0: F \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$R_A = 85 \text{ кН}; R_B = 55 \text{ кН}.$$

Проверка –

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$85 + 55 - 20 - 30 \cdot 4 = 0.$$

② Строим *грузовую эпюру* изгибающих моментов M_F (рис. 1, б).

③ Определяем прогиб конца консоли U_C . Для этого рассматриваем ту же балку, но без внешней нагрузки, прикладываем в точке C единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем от нее реакции опор –

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 1 - \bar{R}_B \cdot 4 &= 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 5 - \bar{R}_A \cdot 4 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\bar{R}_A = 5/4; \bar{R}_B = 1/4$$

и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, в). Далее перемножаем *грузовую* и *единичную* эпюры по принятым выше правилам.

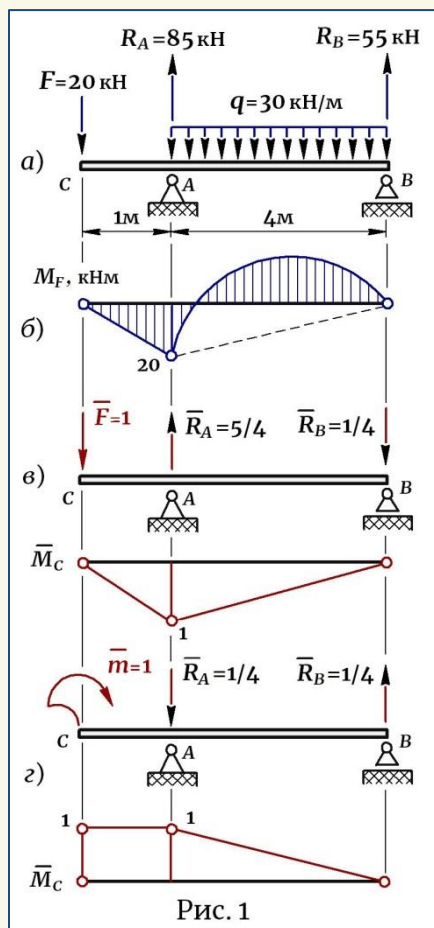


Рис. 1

Перемножение выполняем для каждого участка:

$$\boxed{y_C} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = - \frac{46,7 (\text{кНм}^3)}{EI_x} = - \frac{46,7 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1420 \cdot 10^4} = - 16,4 \text{ мм.}$$

Знак «минус», полученный в расчете, указывает, что конец консоли С получит перемещение в направлении, противоположном заданному направлению единичной силы $\bar{F} = 1$.

Примечание.

При перемножении эпюр слагаемые в скобках имеют размерность $[\text{кНм}^3]$. При переводе единиц $1 \text{ кНм}^3 = 10^{12} \text{ Нмм}^3$, поэтому результат в числителе следует умножить на 10^{12} .

④ Определяем угол поворота конца консоли Θ_C . Для этого также рассматриваем балку без внешней нагрузки, но теперь в точке С прикладываем единичный момент $\bar{m} = 1$, определяем от него реакции опор, которые при наличии на балке только одного момента, будут одинаковыми, противоположно направленными и равными $\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/4$, и строим единичную эпюру моментов (рис. 1, з). Далее выполняем перемножение грузовой и единичной эпюр по аналогии с предыдущим расчетом:

$$\boxed{\Theta_C} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{43,3 (\text{кНм}^2)}{EI_x} = \frac{43,3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1420 \cdot 10^4} = 0,0152 \text{ рад.}$$

Знак «плюс», полученный в расчете, говорит о том, что сечение С повернется по направлению единичного момента $\bar{m} = 1$.

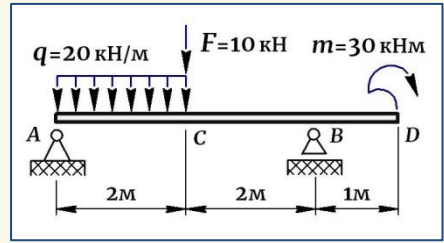
Примечание.

При перемножении эпюр слагаемые в скобках имеют размерность $[\text{кНм}^2]$. При переводе единиц $1 \text{ кНм}^2 = 10^9 \text{ Нмм}^2$, поэтому результат в числителе следует умножить на 10^9 .

Задача 19

В заданной балке определить прогибы сечений C и D, а также угол поворота опорного сечения A. Принять для балки: $I_x = 1840 \text{ см}^4$,

$$E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: m + q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 - R_B \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0: m - q \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 2 + R_A \cdot 4 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} R_A = 27,5 \text{ кН} \\ R_B = 22,5 \text{ кН} \end{array}.$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 27,5 + 22,5 - 10 - 20 \cdot 2 = 0.$

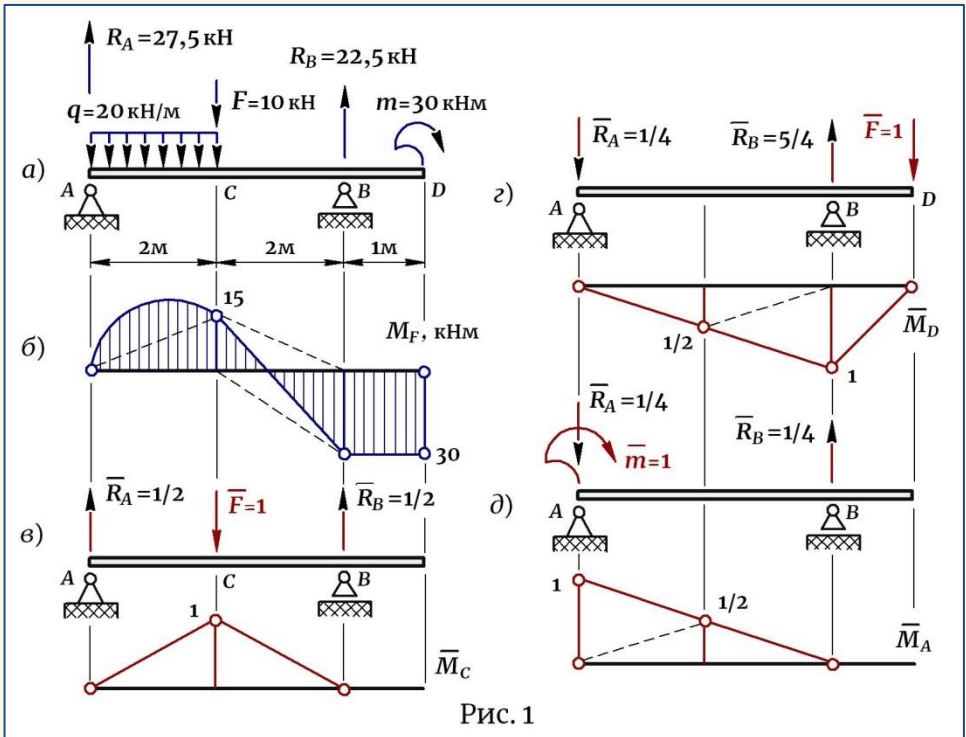


Рис. 1

② Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F (рис. 1, б).

③ Определяем прогиб посередине пролета в точке С. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке С единичную силу $\bar{F}=1$, определяем реакции опор от этой силы, которые в силу симметрии нагрузки будут одинаковыми и равными — $\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/2$ (рис. 1, в) и строим *единичную эпюру* моментов. Далее на каждом участке перемножаем *грузовую* и *единичную* эпюры по правилам, рассмотренным выше:

$$y_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{16,67}{EI_x} = \frac{16,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 4,5 \text{ мм.}$$

Знак «плюс» указывает, что точка С переместится по направлению единичной силы $\bar{F}=1$, т.е. вниз.

④ Определяем прогиб на конце консоли в точке D. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке D единичную силу $\bar{F}=1$, определяем реакции опор от этой силы —

$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 5 - \bar{R}_B \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 1 - \bar{R}_A \cdot 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{R}_A = 1/4 \\ \bar{R}_B = 5/4 \end{array} \right] -$$

и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, г). Далее на каждом участке перемножаем *грузовую* и *единичную* эпюры по правилам, рассмотренным выше:

$$y_D = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + 30 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{21,67}{EI_x} = \frac{21,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 5,9 \text{ мм.}$$

Знак «плюс» указывает, что точка D получит перемещение по направлению единичной силы, т.е. вниз.

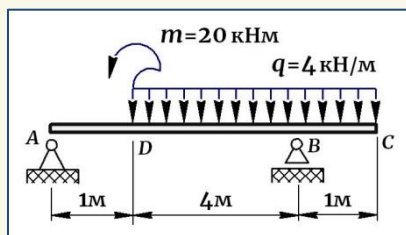
⑤ Определяем угол поворота опорного сечения А. Для этого опять рассматриваем балку без внешней нагрузки, в точке А прикладываем

единичный момент $\bar{m} = 1$, определяем от него реакции опор, которые будут одинаковыми, противоположно направленными и равными $\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/4$, и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, д). Далее выполняем перемножение *грузовой* и *единичной* эпюр по аналогии с предыдущими расчетами:

$$\Theta_A = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1+1/2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{20 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 0,0054 \text{ рад.}$$

Задача 20

В заданной балке методом перемножения эпюр определить прогибы в точках С и D, а также угол поворота опорного сечения В. Принять для балки: $I_X = 95 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: m - q \cdot 5 \cdot 3,5 + R_B \cdot 5 = 0 \\ \sum M_B = 0: m + q \cdot 4 \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 0,5 - R_A \cdot 5 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} R_A = 10 \text{ кН} \\ R_B = 10 \text{ кН} \end{cases}.$$

Проверка — $\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 5 = 0 \rightarrow 10 + 10 - 4 \cdot 5 = 0$.

② Строим *грузовую эпюру* изгибающих моментов M_F (рис. 1, б).

③ Определяем прогиб в точке D. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке D единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем реакции опор от этой силы —

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 1 - \bar{R}_B \cdot 5 = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 4 - \bar{R}_A \cdot 5 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \bar{R}_A = 4/5 \\ \bar{R}_B = 1/5 \end{cases} -$$

и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, в). Далее на каждом участке перемножаем *грузовую* и *единичную* эпюры по правилам, рассмотренным выше:

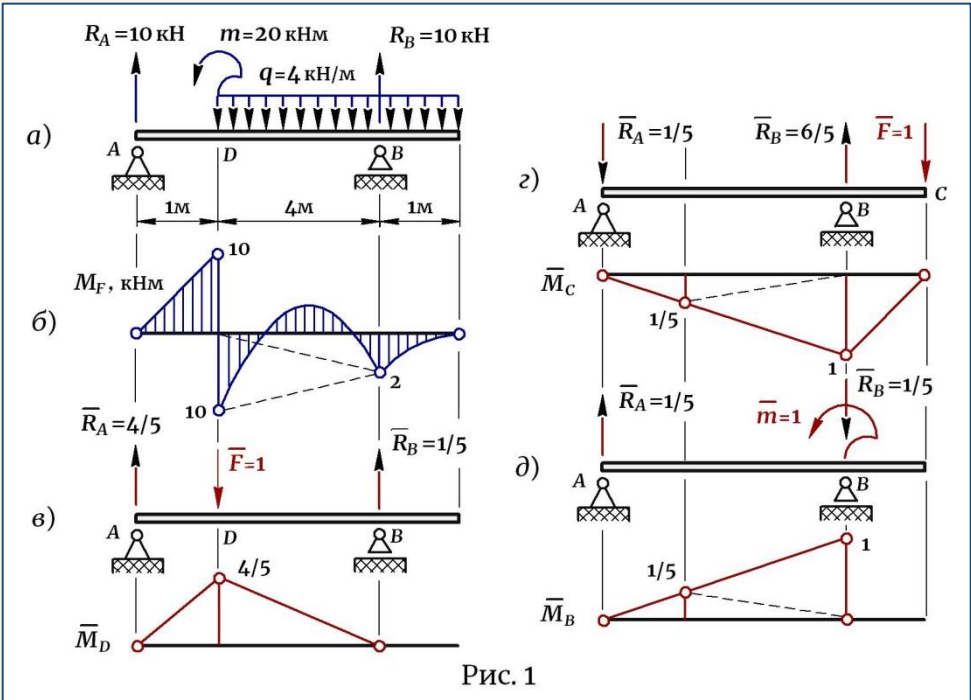


Рис. 1

$$\begin{aligned}
 \boxed{y_D} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) = -\frac{0,53}{EI_x} = -\frac{0,53 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 95 \cdot 10^4} = -2,8 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

Знак «минус» указывает, что точка *D* переместится в направлении, обратном направлению единичной силы $\bar{F} = 1$.

④ Определяем прогиб на конце консоли в точке *C*. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке *C* единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем реакции опор от этой силы –

$$\left. \begin{aligned}
 \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 6 - \bar{R}_B \cdot 5 = 0 \\
 \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 1 - \bar{R}_A \cdot 5 = 0
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned}
 \bar{R}_A &= 1/5 \\
 \bar{R}_B &= 6/5
 \end{aligned} \quad -$$

и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, *г*). Далее на каждом участке перемножаем *грузовую* и *единичную* эпюры по правилам, рассмотренным выше:

$$\boxed{y_C} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1+1/5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 1^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \right] = \\ = -\frac{0,7}{EI_x} = -\frac{0,7 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 95 \cdot 10^4} = -3,7 \text{ мм.}$$

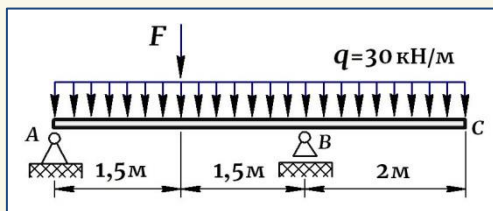
Знак «минус» указывает, что точка C также получит перемещение в направлении, обратном направлению единичной силы $\bar{F} = 1$.

⑤ Определяем угол поворота опорного сечения B . Для этого опять рассматриваем балку без внешней нагрузки, в точке B прикладываем единичный момент $\bar{m} = 1$, определяем от него реакции опор, которые будут одинаковыми, противоположно направленными и равными $\boxed{\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/5}$, и строим единичную эпюру моментов (рис. 1, д). Далее выполняем перемножение грузовой и единичной эпюр по аналогии с предыдущими расчетами:

$$\boxed{\Theta_B} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1+1/5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{1,2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 95 \cdot 10^4} = 0,0063 \text{ рад.}$$

Задача 21

Для заданной балки, нагруженной системой сил, определить, какой величины должна быть сила F , чтобы прогиб конца консоли C был равен нулю.



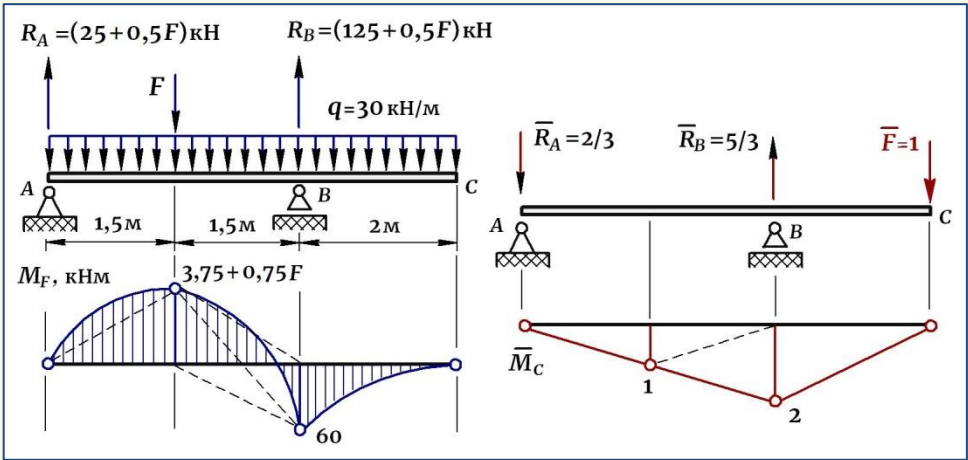
РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: q \cdot 5 \cdot 2,5 + F \cdot 1,5 - R_B \cdot 3 = 0 \\ \sum M_B = 0: q \cdot 3 \cdot 1,5 + F \cdot 1,5 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_A &= (25 + 0,5F) \text{ кН} \\ R_B &= (125 + 0,5F) \text{ кН} \end{aligned}}$$

Проверка –

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 5 = 0 \rightarrow (25 + 0,5F) + (125 + 0,5F) - F - 30 \cdot 5 = 0.$$



② Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F .

③ Для определения прогиба на конце консоли рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке C единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем реакции опор от этой силы –

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 5 - \bar{R}_B \cdot 3 = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 2 - \bar{R}_A \cdot 3 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \bar{R}_A = 2/3 \\ \bar{R}_B = 5/3 \end{cases} -$$

и строим единичную эпюру моментов. Далее перемножаем грузовую и единичную эпюры и, так как на конце консоли $y_C = 0$, приравниваем к нулю результат перемножения:

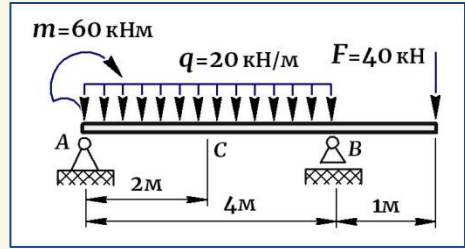
$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 1,5^2}{8} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} (3,75 + 0,75F) \times \right. \\ &\times 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 1,5^2}{8} \cdot 1,5 \cdot \frac{1+2}{2} - \frac{1}{2} (3,75 + 0,75F) \cdot 1,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 60 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left. \frac{1}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \right] = \frac{1}{EI_x} (-4,22 - 1,875 - \\ &- 0,375F - 12,66 - 3,75 - 0,75F + 75 + 60) = \frac{1}{EI_x} (112,5 - 1,125F) = 0. \end{aligned}$$

Откуда: $F = 100 \text{ кН}$.

Задача 22

В заданной двутавровой балке (двутавр № 27), нагруженной системой сил, определить прогиб посередине пролета и угол поворота левого опорного сечения. Принять для балки:

$$I_x = 5010 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: m + q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0: m + F \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} R_A = 15 \text{ кН} \\ R_B = 105 \text{ кН} \end{cases}$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 0 \rightarrow 15 + 105 - 20 \cdot 4 - 40 = 0.$$

② Строим *грузовую эпюру* изгибающих моментов M_F (рис. 1, б, г).

Примечание.

В задаче рассмотрим два варианта разбивки эпюры на простейшие фигуры. При определении прогиба посередине пролета, так как здесь будет приложена единичная сила, *грузовую эпюру* на пролете следует разделить на два участка (рис. 1, б), чтобы она соответствовала *единичной эпюре* для данного случая. При определении угла поворота на левой опоре длину пролета следует рассматривать как один участок (рис. 1, г).

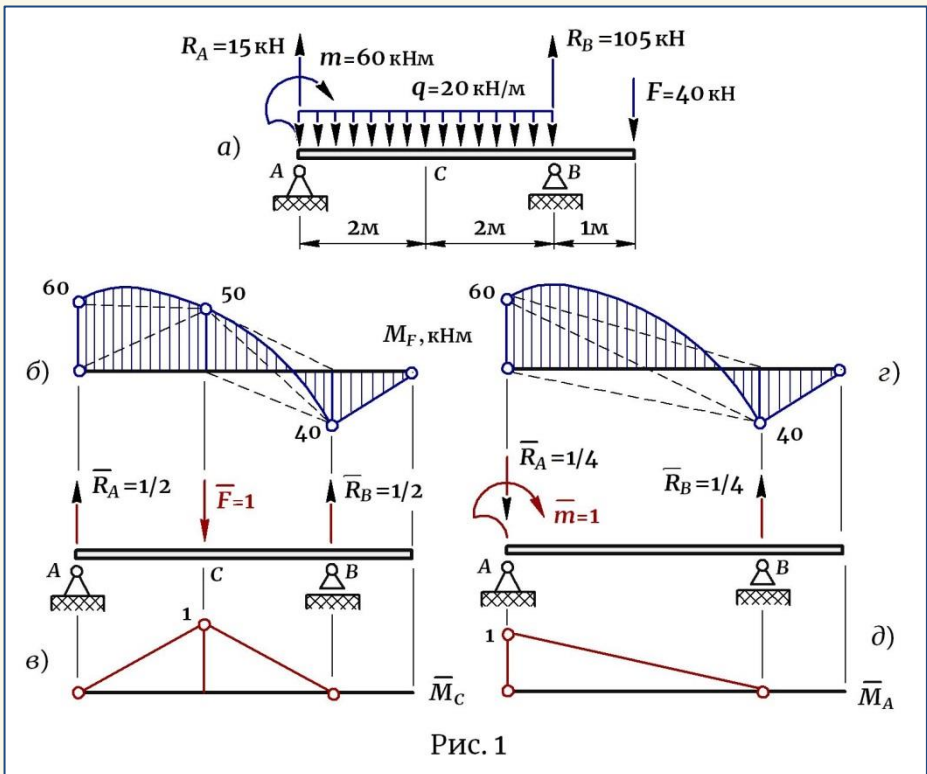
③ Определяем прогиб в точке С. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, прикладываем в точке С единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем от этой силы реакции опор, которые в силу симметрии нагрузки одинаковы и равны $\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/2$ и строим *единичную эпюру* моментов (рис. 1, в). Далее на каждом участке перемножаем *грузовую* (рис. 1, б) и *единичную* эпюры по принятым выше правилам:

$$\begin{aligned} \boxed{u_C} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{6,67 + 20 + 33,33 + 6,67 + 33,33 - 13,33}{EI_x} = \frac{86,7 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 8,7 \text{ мм}.$$

④ Определяем угол поворота опорного сечения А. Для этого опять рассматриваем балку без внешней нагрузки, в точке А прикладываем единичный момент $\bar{m}=1$, определяем от него реакции опор, которые будут одинаковыми, противоположно направленными и равными $\bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/4$, и строим единичную эпюру моментов (рис. 1, д). Далее выполняем перемножение грузовой (рис. 1, з) и единичной эпюр по аналогии с предыдущими расчетами:

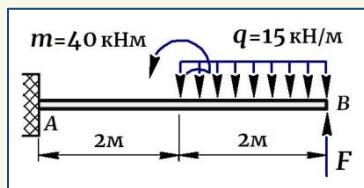
$$\Theta_A = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{53,33 + 80 - 26,67}{EI_x} = \frac{106,67 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 0,011 \text{ рад}.$$



Задача 23

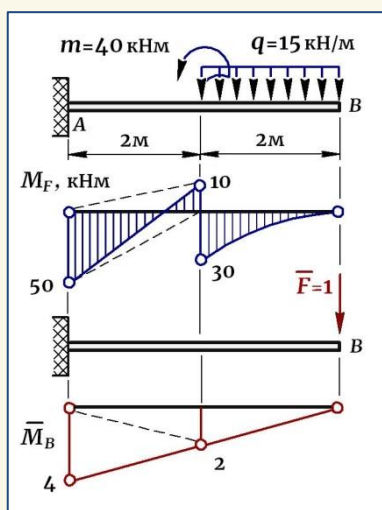
В заданной балке определить силу F , при которой прогиб конца консоли будет равен нулю. Принять для балки:

$$I_x = 3000 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Рассмотрим балку при отсутствии силы F и определим прогиб конца консоли от нагрузки q и момента m . Согласно методике определения перемещений методом Верещагина, строим *грузовую* эпюру моментов и *единичную*, построенную от единичной силы $\bar{F} = 1$, приложенной в точке B .



Далее перемножаем эпюры по принятым выше правилам:

$$\begin{aligned} \boxed{y_B} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{15 \cdot 2^2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 50 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \\ &= \frac{170 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3000 \cdot 10^4} = 28,3 \text{ мм.} \quad (1) \end{aligned}$$

② Рассмотрим балку под действием только силы F . Прогиб, возникающий на конце консоли, для данной расчетной схемы балки определяется по формуле:

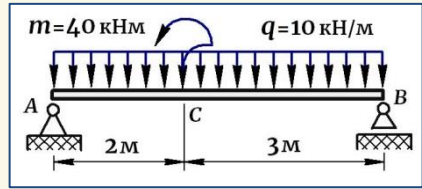
$$\boxed{y_B} = \frac{F l^3}{3EI_x} = \frac{F \cdot 10^3 (4 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3000 \cdot 10^4} = 3,56 F \text{ (мм)}. \quad (2)$$

③ Так как прогиб на свободном конце должен быть равен нулю, приравняем полученные выше значения (1) и (2) и получаем:

$$3,56 F = 28,3 \rightarrow \boxed{F = 8 \text{ кН}}.$$

Задача 24

Для заданной двутавровой балки подобрать номер профиля из условия, чтобы прогиб в точке С не превышал $[y] = 9 \text{ мм}$. Принять для материала балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Составляет для балки уравнения равновесия и определяем реакции опор (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: m - q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_B \cdot 5 = 0 \\ \sum M_B = 0: m + q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_A \cdot 5 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} R_A = 33 \text{ кН} \\ R_B = 17 \text{ кН} \end{cases}$$

Проверка — $\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 5 = 0 \rightarrow 33 + 17 - 10 \cdot 5 = 0$.

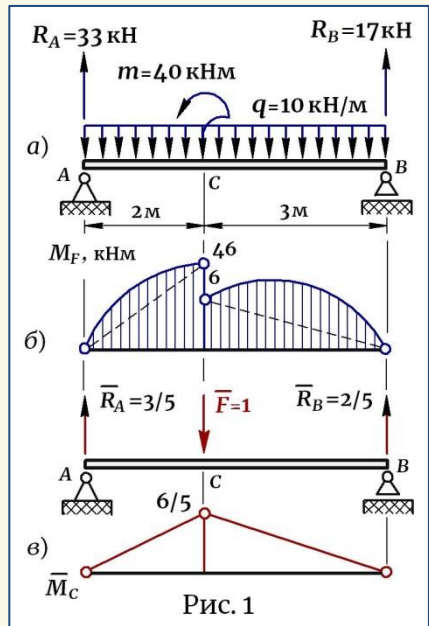
② Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F (рис. 1, б).

③ Определяем прогиб в точке С. Для этого прикладываем в точке С единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем реакции опор от этой силы —

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = 0: \bar{F} \cdot 2 - \bar{R}_B \cdot 5 = 0 \\ \sum M_B = 0: \bar{F} \cdot 3 - \bar{R}_A \cdot 5 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\bar{R}_B = 2/5; \bar{R}_A = 3/5}$$

и строим единичную эпюру моментов (рис. 1, в). Далее перемножаем грузовую и единичную эпюры по правилам, рассмотренным выше:



$$y_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 46 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \right) = \frac{61,5 \cdot 10^{12}}{EI_x}$$

④ Записываем для балки условие жесткости —

$$y_C = \frac{61,5 \cdot 10^{12}}{EI_X} \leq [y], \text{ откуда}$$

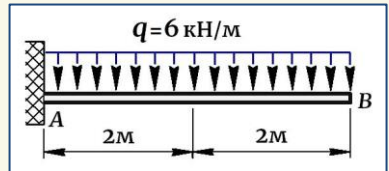
$$I_X = \frac{61,5 \cdot 10^{12}}{E[y]} = \frac{61,5 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 9} = 3417 \cdot 10^4 \text{ мм}^4 = 3417 \text{ см}^4.$$

По таблицам сортамента принимаем двутавр № 24: $I_X = 3460 \text{ см}^4$.

Задача 25

Стальная балка (двутавр № 24) на всей длине консоли нагружена распределенной нагрузкой q . Определить, какую силу F можно дополнительно приложить на конце консоли, чтобы напряжения в балке не превышали $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, а максимальный прогиб был не более $[y] = 6 \text{ мм}$. Принять для балки: $I_X = 3460 \text{ см}^4$,

$W_X = 289 \text{ см}^3$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Рассмотрим балку с приложенной на конце консоли силой F (рис. 1, а). Максимальный изгибающий момент возникает в заделке и равен (рис. 1, б) —

$$M_{\max} = ql^2/2 + Fl \quad (1)$$

② Из условия прочности с учетом значения (1) определяем силу F , которую безопасно можно приложить к балке:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{ql^2/2 + Fl}{W_X} \leq [\sigma],$$

откуда —

$$F = \frac{W_X [\sigma] - ql^2/2}{\ell} = \frac{289 \cdot 10^3 \cdot 160 - 6(2 \cdot 10^3)^2/2}{2 \cdot 10^3} = 17 \text{ кН}. \quad (2)$$

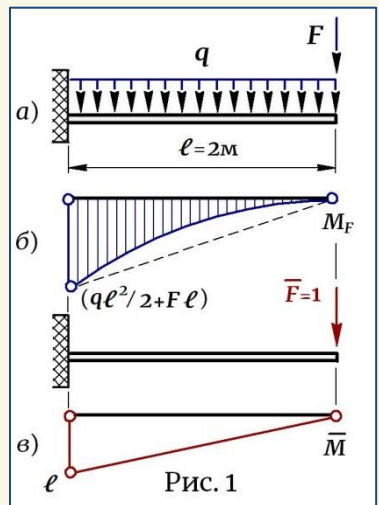


Рис. 1

③ Определяем максимальный прогиб y_{\max} на конце консоли методом перемножением *грузовой* (рис. 1, б) и *единичной* (рис. 1, в) эпюр:

$$y_{\max} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \ell \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell + \frac{1}{2} (ql^2/2 + F\ell) \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell \right] =$$

$$= \frac{1}{24EI_x} (3ql^4 + 8F\ell^3). \quad (3)$$

④ Из условия жесткости с учетом значения (3) –

$$y_{\max} = \frac{1}{24EI_x} (3ql^4 + 8F\ell^3) \leq [y]$$

определяем силу F , которую безопасно можно приложить к балке:

$$F = \frac{24EI_x [y] - 3ql^4}{8\ell^3} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4 \cdot 6 - 3 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 10^3)^4}{8 \cdot (2 \cdot 10^3)^3} =$$

$$= \frac{48 \cdot 3460 \cdot 9 - 3 \cdot 10 \cdot 2^4 \cdot 10^3}{8 \cdot 8} = \frac{996480 - 288000}{64} = 11 \text{ кН}. \quad (4)$$

Из двух значений (2) и (4) принимаем меньшее – $F = 11 \text{ кН}$.

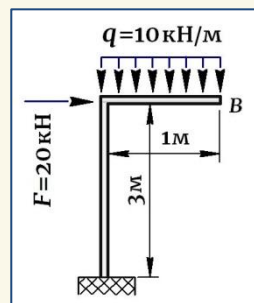
Задача 26

Для заданной рамы определить вертикальное и горизонтальное перемещения, а также угол поворота конца консоли B . Принять для рамы:

$$I_x = 5500 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}.$$

РЕШЕНИЕ:

① В сечениях плоских рам возникают три внутренних усилия – изгибающий момент, продольная и поперечная силы. Пренебрегая влиянием последних на величину возникающих деформаций, расчет на плоских рамах производим только по эпюрам изгибающих моментов. Для этого первоначально строим *грузовую эпюру* моментов (рис. 1, а), а затем, прикладывая в направлении искомого перемещения – линейного или углового – соответственно единичную силу или единичный момент, строим *единичные эпюры* (рис. 1, б, в, г):



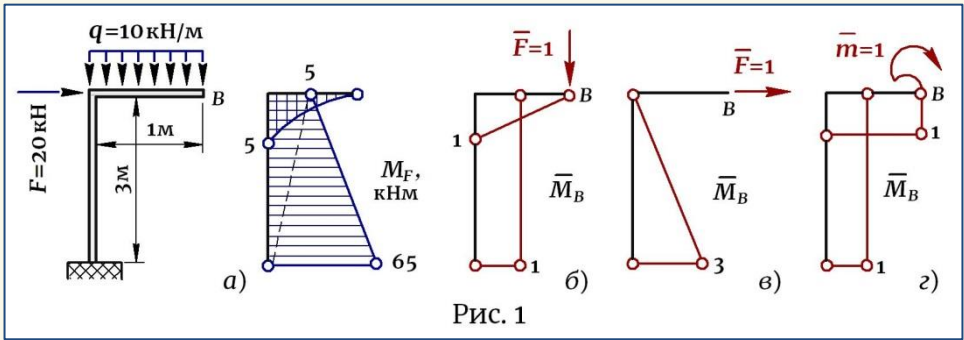


Рис. 1

② Определяем в точке B вертикальное перемещение (рис. 1, б):

$$\Delta_B^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 1^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{5+65}{2} \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{106,25}{EI_x} =$$

$$= \frac{106,25 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 9,7 \text{ мм.}$$

③ Определяем в точке B горизонтальное перемещение (рис. 1, в):

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 65 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) \right] = \frac{202,5}{EI_x} =$$

$$= \frac{202,5 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 18,4 \text{ мм.}$$

④ Определяем угол поворота сечения B (рис. 1, г):

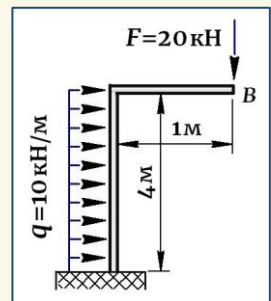
$$\Theta_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 1^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{5+65}{2} \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{106,7}{EI_x} =$$

$$= \frac{106,7 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 0,0097 \text{ рад.}$$

Задача 27

Для заданной рамы определить вертикальное и горизонтальное перемещения, а также угол поворота конца консоли B . Принять для рамы:

$$I_x = 8000 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил на величину возникающих деформаций, расчет на плоских рамах производим только по эюрам изгибающих моментов. Первоначально строим *грузовую эюру* моментов (рис. 1, а), а затем, прикладывая в направлении искомого перемещения единичную силу или единичный момент, строим *единичные эюры* (рис. 1, б, в, з):

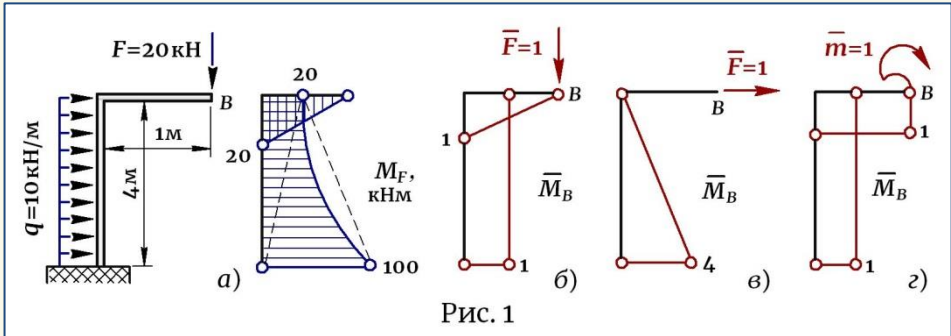


Рис. 1

② Определяем в точке B вертикальное перемещение (рис. 1, б):

$$\Delta_B^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{193,33}{EI_x} = \frac{193,33 \cdot 10^{12}}{2 \times 10^5 \cdot 8000 \cdot 10^4} = 12,1 \text{ мм.}$$

③ Определяем в точке B горизонтальное перемещение (рис. 1, в):

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = \frac{480}{EI_x} = \frac{480 \cdot 10^{12}}{2 \times 10^5 \cdot 8000 \cdot 10^4} = 30 \text{ мм.}$$

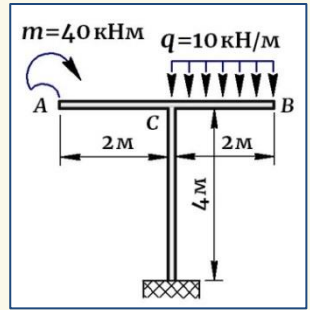
④ Определяем угол поворота сечения B (рис. 1, з):

$$\Theta_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{196,7 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 8000 \cdot 10^4} = 0,0123 \text{ рад.}$$

Задача 28

В раме определить вертикальное перемещение сечения А, горизонтальное – сечения В и угол поворота узла С. Принять для рамы:

$$I_x = 5010 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил на величину возникающих деформаций, строим *грузовую эпюру* моментов (рис. 1, а), а затем в заданном сечении, прикладывая в направлении искомого перемещения единичную силу или единичный момент, строим *единичные эпюры* (рис. 1, б, в, г):

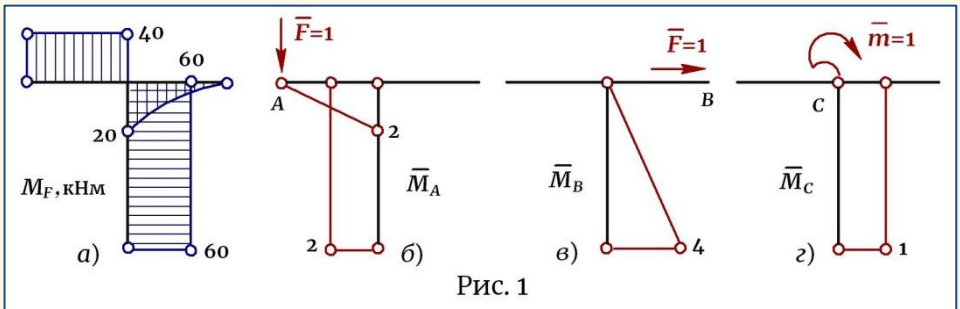


Рис. 1

② Определяем в точке А вертикальное перемещение (рис. 1, б):

$$\Delta_A^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 40 - 60 \cdot 4 \cdot 2 \right) = -\frac{560}{EI_x} = -\frac{560 \cdot 10^{12}}{2 \times 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = -55,9 \text{ мм.}$$

③ Определяем в точке В горизонтальное перемещение (рис. 1, в):

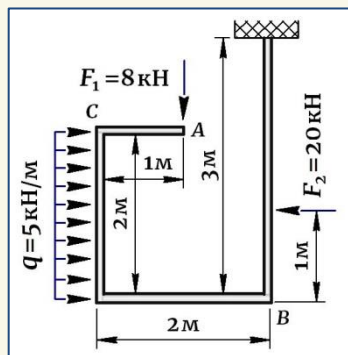
$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{4 \cdot 4 \cdot 60}{2} \right) = \frac{480 \cdot 10^{12}}{2 \times 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 47,9 \text{ мм.}$$

④ Определяем угол поворота узла С (рис. 1, г):

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} (60 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{240 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 0,024 \text{ рад.}$$

Задача 29

В раме из двутавра № 18 определить вертикальное перемещение сечения A , горизонтальное – сечения B и угол поворота сечения C . Принять для двутавра: $I_x = 1290 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил на величину деформаций и перемещений узлов и сечений, рассматриваем *грузовую эпюру* только изгибающих моментов (рис. 1, а). На раме пять участков, поэтому для удобства построения эпюры рекомендуется первоначально определить реакции в заделке и построение выполнять с двух сторон, рассматривая участки часть – от конца консоли, часть – от заделки. Затем на раме, прикладывая в заданном сечении по направлению искомого перемещения единичную силу или единичный момент, строим *единичные эпюры* (рис. 1, б, в, г):

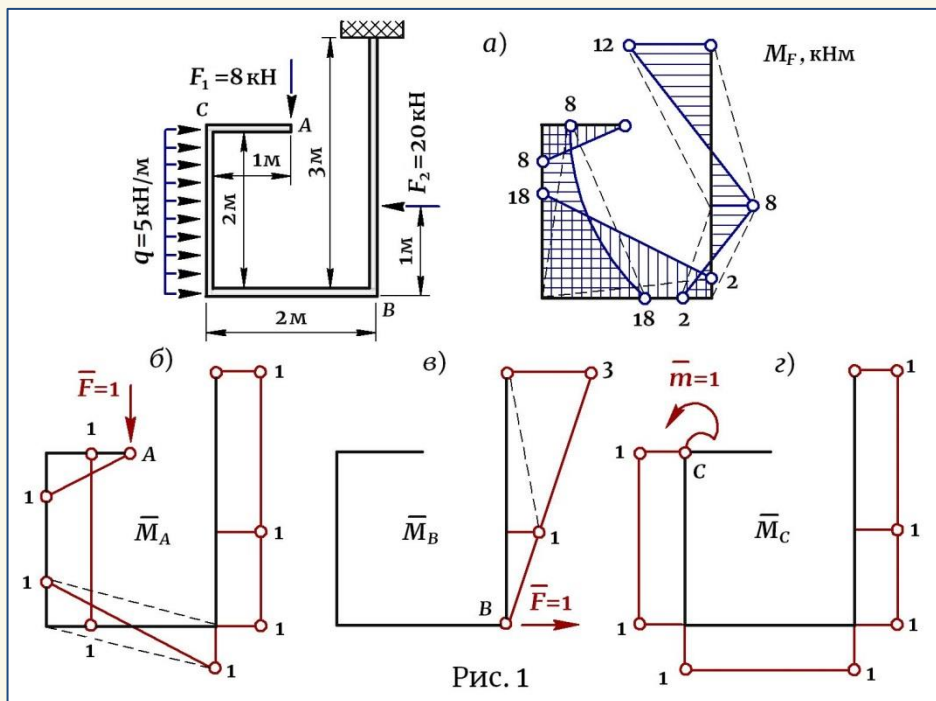


Рис. 1

② Определяем в точке А вертикальное перемещение (рис. 1, б):

$$\Delta_A^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} \cdot 18 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 18 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 1 \right] = \frac{29,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 11,5 \text{ мм.}$$

③ Определяем в точке В горизонтальное перемещение (рис. 1, в):

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{-12,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = -4,8 \text{ мм.}$$

④ Определяем угол поворота сечения С (рис. 1, г):

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{18+8}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{18+2}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \times \times 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 1 \right) = \frac{-43,67 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = -0,017 \text{ рад.}$$

Задача 30

В раме из двутавра № 24 определить вертикальное перемещение сечения С, горизонтальное – опорного сечения В и угол поворота узла D. Принять для двутавра: $I_X = 3460 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

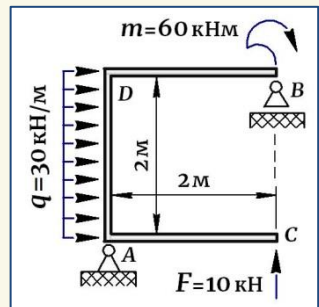
① Определяем на раме реакции опор:

$$\sum X = 0: q \cdot 2 - H_A = 0 \rightarrow H_A = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: q \cdot 2 \cdot 1 + m - F \cdot 2 - R_B \cdot 2 = 0$$

$$\sum M_B = 0: q \cdot 2 \cdot 1 - m - H_A \cdot 2 - R_A \cdot 2 = 0 \quad \left. \vphantom{\sum M_A = 0} \right\} \rightarrow$$

$$R_A = 60 \text{ кН}; R_B = 50 \text{ кН}.$$



Проверка $-\sum Y = 0: F + R_B - R_A = 0 \rightarrow 10 + 50 - 60 = 0$.

② Строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 1, а):

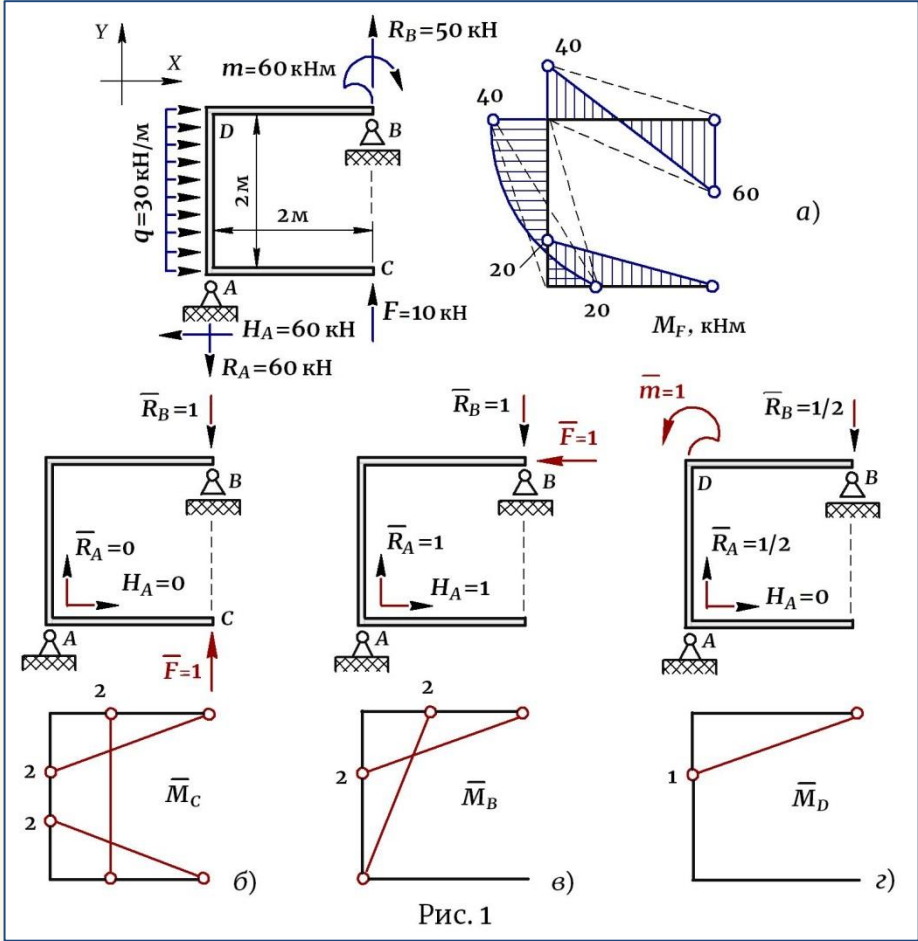


Рис. 1

③ Прикладываем на раме в заданном сечении по направлению искомого перемещения единичную силу или единичный момент, определяем опорные реакции от единичной нагрузки, строим *единичные эпюры* (рис. 1, б, в, г) и перемножаем их с *грузовой эпюрой* (рис. 1, а):

★ Вертикальное перемещение сечения C (рис. 1, б):

$$\Delta_C^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \times \right.$$

$$\times 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \Big) = - \frac{66,7}{EI_x} =$$

$$= - \frac{66,7 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = - 9,6 \text{ мм}.$$

★ Горизонтальное перемещение опорного сечения B (рис. 1, в) :

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \frac{73,3 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 10,6 \text{ мм}.$$

★ Угол поворота узла D (рис. 1, г) :

$$\Theta_D = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left(- \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) =$$

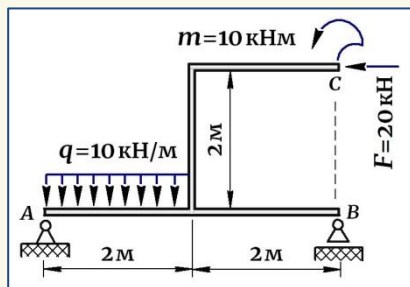
$$= - \frac{6,7 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = - 0,001 \text{ рад}.$$

Задача 31

В двутавровой раме (№ 24а) определить вертикальное и горизонтальное перемещения, а также угол поворота конца консоли C . Принять:

$$I_x = 3800 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}.$$

РЕШЕНИЕ:



① Определяем на раме реакции опор и строим *грузовую эпюру* изгибающих моментов (рис. 1, а):

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: H_A - F = 0 \\ \sum M_A = 0: q \cdot 2 \cdot 1 - m - F \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0: q \cdot 2 \cdot 3 + m + F \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} H_A = 20 \text{ кН} \\ R_A = 27,5 \text{ кН} \\ R_B = 7,5 \text{ кН} \end{aligned}.$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: R_A - q \cdot 2 - R_B = 0 \rightarrow 27,5 - 10 \cdot 2 - 7,5 = 0.$$

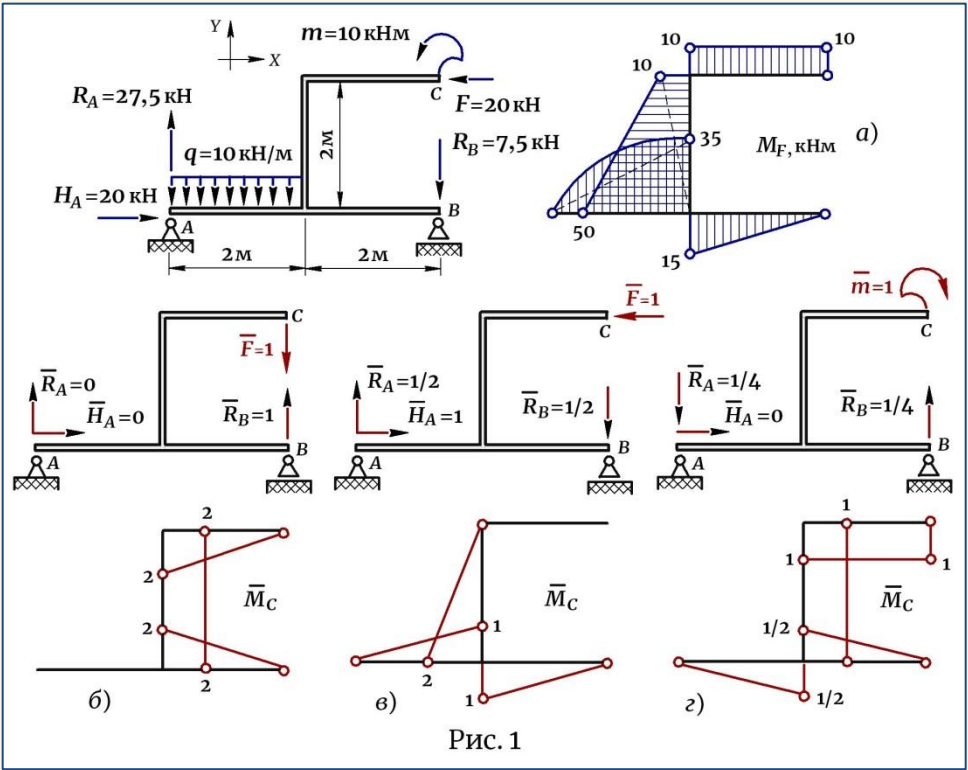


Рис. 1

② Прикладываем на раме в сечении C по направлению искомого перемещения единичную нагрузку, определяем от нее реакции опор, строим *единичные эпюры* (рис. 1, б, в, з) и перемножаем их с *грузовой эпюрой* (рис. 1, а):

★ Вертикальное перемещение сечения C (рис. 1, б):

$$\Delta_C^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{10+50}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = -\frac{160 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = -21 \text{ мм.}$$

★ Горизонтальное перемещение сечения C (рис. 1, в):

$$\Delta_C^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{110 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = 14,5 \text{ мм.}$$

★ Угол поворота сечения C (рис. 1, з):

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(-10 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{10+50}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 35 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = - \frac{100 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 3800 \cdot 10^4} = - 0,0132 \text{ рад.}$$

Задача 32

Для рамы подобрать сечение двутавр, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, и определить горизонтальное перемещение и угол поворота опорного сечения B. Принять для рамы: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем на раме реакции опор и строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: F - H_A = 0 \\ \sum M_A = 0: q \cdot 2 \cdot 1 + m - F \cdot 2 - R_B \cdot 4 = 0 \\ \sum M_B = 0: q \cdot 2 \cdot 3 - m - R_A \cdot 4 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_A = 30 \text{ кН} \\ R_A = 35 \text{ кН} \\ R_B = 5 \text{ кН} \end{array}$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 35 + 5 - 20 \cdot 2 = 0$.

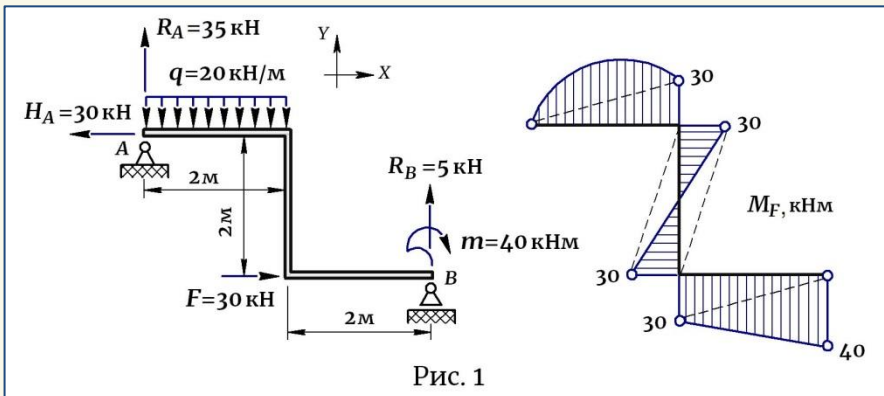
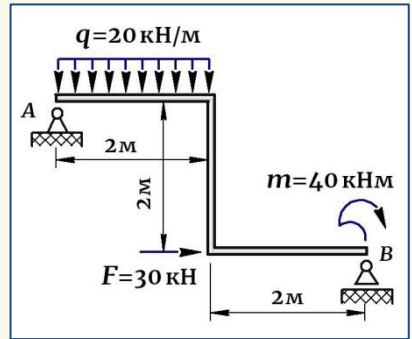


Рис. 1

② Подбираем для рамы двутавровый профиль:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\chi}} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_{\chi} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^6}{160} = 250 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 22а: $W_{\chi} = 250 \text{ см}^3$; $I_{\chi} = 2790 \text{ см}^4$.

③ Прикладываем на раме в опорном сечении В по направлению искомого перемещения единичную силу и единичный момент, определяем опорные реакции, строим *единичные эпюры* (рис. 2, а, б,) и перемножаем их с *грузовой эпюрой* (рис. 1):

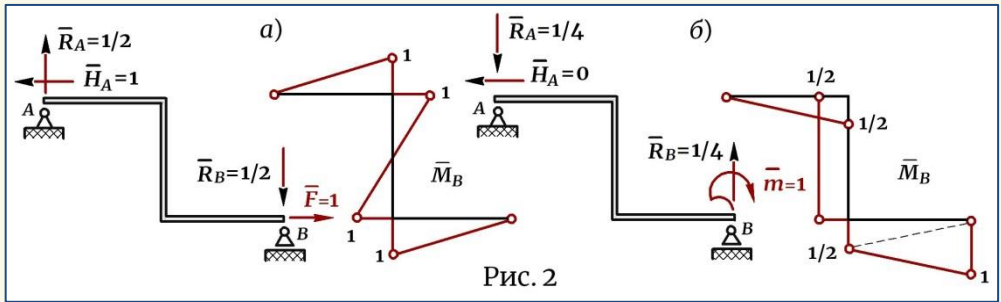


Рис. 2

★ Горизонтальное перемещение опорного сечения В (рис. 2, а):

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_{\chi}} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_{\chi}} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 30 + \frac{1}{3} \cdot 40 \right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{80 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2790 \cdot 10^4} = 14,3 \text{ см.}$$

★ Угол поворота опорного сечения В (рис. 2, б):

$$\Theta_B = \frac{1}{EI_{\chi}} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_{\chi}} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{40 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2790 \cdot 10^4} = 0,0072 \text{ рад.}$$

Задача 33

В раме (двутавр № 24) определить вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли С, а также горизонтальное перемещение опорного сечения А. Принять для двутавра:

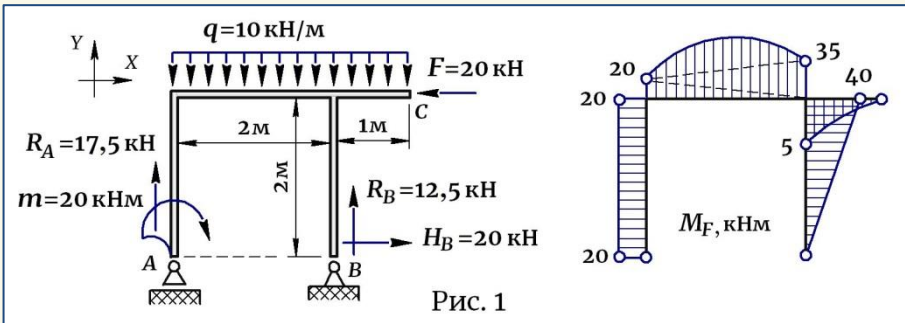
$$I_X = 3460 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$

РЕШЕНИЕ:

① Определяем на раме реакции опор и строим *грузовую эпюру* изгибающих моментов (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: H_B - F = 0 \\ \sum M_A = 0: q \cdot 3 \cdot 1,5 + m - F \cdot 2 - R_B \cdot 2 = 0 \\ \sum M_B = 0: q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 - m + F \cdot 2 - R_A \cdot 2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_B = 20 \text{ кН} \\ R_A = 17,5 \text{ кН} \\ R_B = 12,5 \text{ кН} \end{array}$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 3 = 0 \rightarrow 17,5 + 12,5 - 10 \cdot 3 = 0$.



② Прикладываем на раме в заданном сечении по направлению искомого перемещения единичную силу или единичный момент, определяем от единичной нагрузки реакции опор, строим *единичные эпюры* (рис. 2, а, б, в) и перемножаем их с *грузовой эпюрой* (рис. 1):

★ Вертикальное перемещение сечения С (рис. 2, а) :

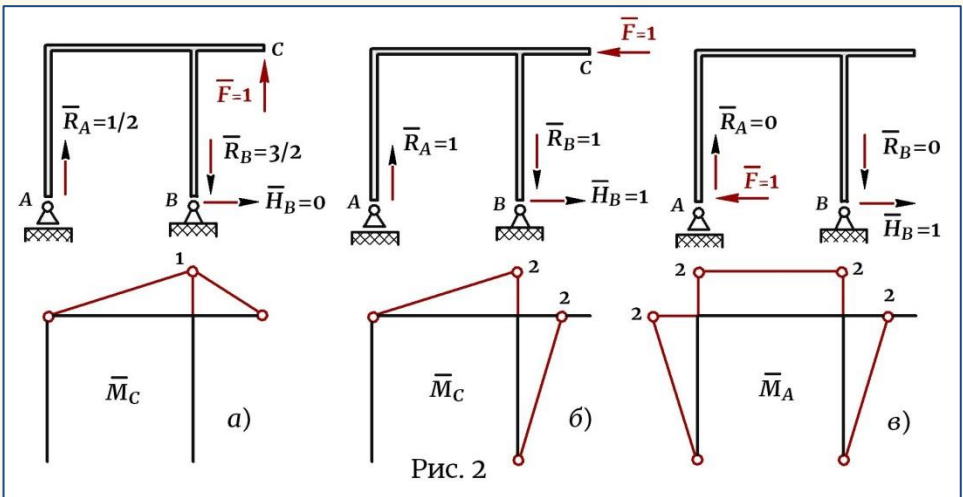
$$\Delta_C^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 1^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \right) = \frac{32,08 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 4,6 \text{ мм.}$$

★ Горизонтальное перемещение сечения C (рис. 2, б) :

$$\Delta_C^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{120 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 17,3 \text{ см.}$$

★ Горизонтальное перемещение опорного сечения A (рис. 2, в) :

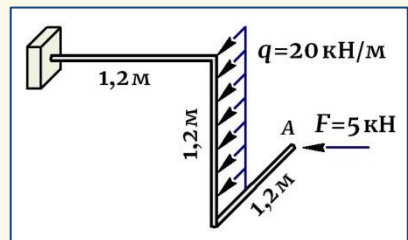
$$\Delta_A^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_X} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 35 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{216,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 31,3 \text{ мм.}$$



Задача 34

Пространственный стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 12$ см выполнен из стали и нагружен системой сил. Определить вертикальное и горизонтальное перемещения сечения A на конце консоли, а также угол его поворота в трех плоскостях. Принять для стержня:

$E = 2 \times 10^5$ МПа, $G = 8 \times 10^4$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① Метод Верещагина (*перемножение эпюр*) относится к энергетическим методам определения перемещений и основан на вычислении потенциальной энергии деформации, накапливаемой в элементе. При нагружении пространственных конструкций входящие в них элементы часто работают в условиях сложного сопротивления, подвергаясь самым различным комбинациям деформаций – растяжению, кручению, сжатию, сдвигу и изгибу в различных направлениях и плоскостях. При этом деформации, составляющие комбинацию, являются с энергетической точки зрения неодинаково энергоемкими. Наибольшее накопление энергии происходит за счет изгиба и кручения, а такие деформации как растяжение, сжатие и сдвиг вносят весьма незначительную долю в этот процесс и мало влияют на деформационные изменения конструкции. Поэтому, при расчете пространственных систем влиянием продольных и поперечных сил на величину возникающих деформаций пренебрегают и рассматривают только изгиб и кручение, выполняя расчет по формуле:

$$\Delta = \frac{1}{EI_{\chi}} \left(M_{\text{изг}(F)} \times \bar{M}_{\text{изг}} \right) + \frac{1}{GI_{\rho}} \left(M_{\text{кр}(F)} \times \bar{M}_{\text{кр}} \right), \quad (1)$$

где $M_{\text{изг}(F)}$ и $\bar{M}_{\text{изг}}$ – *грузовая* и *единичная* эпюры изгибающих моментов; $M_{\text{кр}(F)}$ и $\bar{M}_{\text{кр}}$ – аналогично *грузовая* и *единичная* эпюры крутящих моментов; EI_{χ} и GI_{ρ} – соответственно жесткость сечения при изгибе и кручении. Также для заданного стержня:

$$\begin{aligned} I_{\chi} &= \pi d^4 / 64 = 3,14 \cdot 12^4 / 64 = 1017,4 \text{ см}^4; \\ I_{\rho} &= \pi d^4 / 32 = 3,14 \cdot 12^4 / 32 = 2034,8 \text{ см}^4. \end{aligned} \quad (2)$$

② Строим на стержне от заданной внешней нагрузки *грузовые эпюры* изгибающих (рис. 1, а) и крутящих (рис. 1, б) моментов:

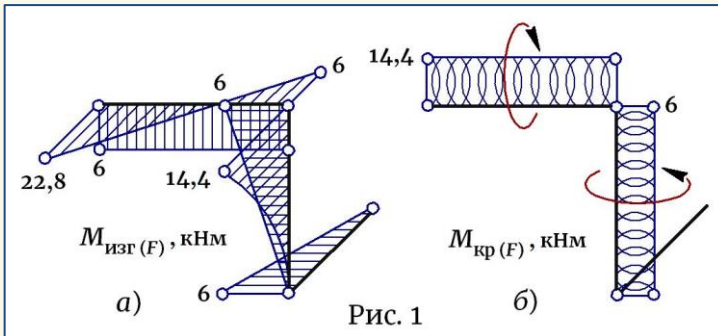
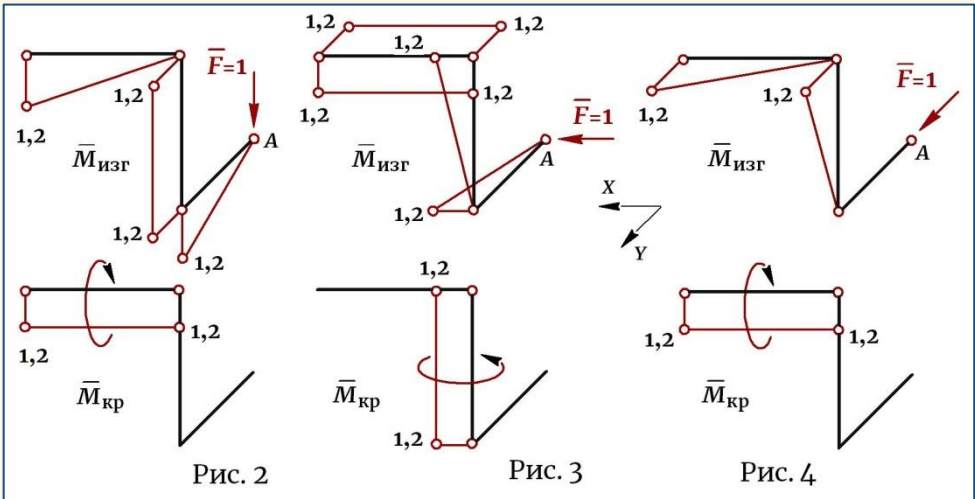


Рис. 1

Примечание.

На эпюре крутящих моментов следует указывать направление закручивания участка, что определит знак расчетной величины при перемножении эпюр.

③ Определяем вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли А. Для этого в заданной точке по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$ (при этом в горизонтальной плоскости рассматриваем два направления перемещений — по осям X и Y), строим *единичные эпюры* изгибающих и крутящих моментов, указывая на последней направление закручивания участка (рис. 2, 3, 4), и в соответствии с формулой (1) и значениями (2) перемножаем их с соответствующими *грузовыми эпюрами* (рис. 1, а, б):



$$\Delta_A^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 1,2^2}{2} \cdot 1,2 \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 6 \right) + \frac{1}{GI_\rho} (14,4 \cdot 1,2 \times 1,2) = \frac{11,23 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} + \frac{20,74 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,8 \cdot 10^4} = 5,5 + 12,7 = 18,2 \text{ мм};$$

$$\Delta_A^{\text{гориз}(X)} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + 6 \cdot 1,2 \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 22,8 \cdot 1,2 \right) + \frac{1}{GI_\rho} (6 \cdot 1,2 \cdot 1,2) = \frac{2,3 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} +$$

$$+ \frac{8,64 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,8 \cdot 10^4} = 1,1 + 5,3 = 6,4 \text{ мм};$$

$$\Delta_A^{\text{гориз}}(Y) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 1,2^2}{2} \cdot 1,2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 22,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \times \right. \\ \left. \times 1,2 \right) + \frac{1}{GI_p} (14,4 \cdot 1,2 \cdot 1,2) = \frac{14,69 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} + \frac{20,74 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,8 \cdot 10^4} = \\ = 7,2 + 12,7 = 19,9 \text{ мм}.$$

Окончательно перемещение точки А в горизонтальной плоскости произойдет в направлении, показанном на рис. 5, и определяется как:

$$\Delta_A^{\text{гориз}} = \sqrt{19,9^2 + 6,4^2} = 21 \text{ мм}.$$

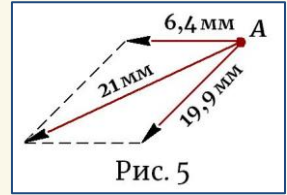


Рис. 5

④ Определяем угол поворота сечения А. В пространственных системах поворот сечения возможен в трех плоскостях (рис. 6, 7, 8):

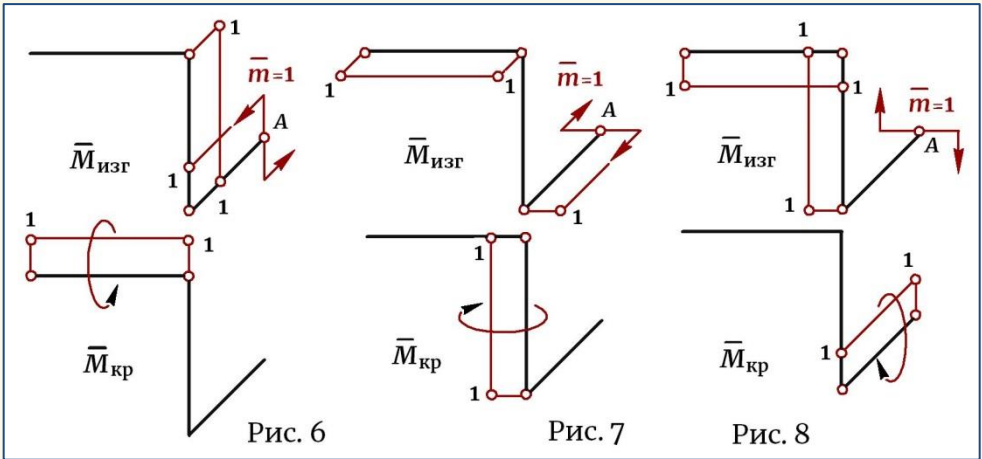


Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

$$\Theta_A (\text{рис. 6}) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 1,2^2}{2} \cdot 1,2 \cdot 1 \right) + \frac{1}{GI_p} (-14,4 \cdot 1,2 \cdot 1) = \\ - \frac{5,76 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} - \frac{17,28 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,8 \cdot 10^4} = -0,014 \text{ рад};$$

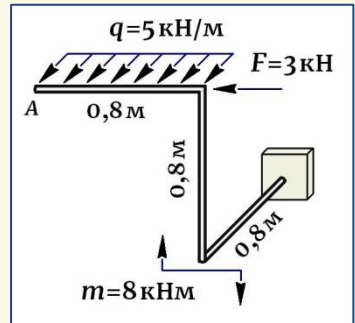
$$\Theta_A (\text{рис. 7}) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 22,8 \cdot 1 \right) + \frac{1}{GI_p} \times$$

$$\times (-6 \cdot 1,2 \cdot 1) = \frac{6,48 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} - \frac{7,2 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 2034,8 \cdot 10^4} = -0,001 \text{ рад};$$

$$\Theta_{A(\text{рис.8})} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1,2 \cdot 1 \right) = \frac{10,8 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1017,4 \cdot 10^4} = 0,005 \text{ рад}.$$

Задача 35

Для ломаного стержня круглого поперечного сечения, используя III-ю прочности, подобрать диаметр d , если для материала $[\sigma] = 130 \text{ МПа}$, и определить вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли А. Принять для стержня: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил на величину возникающих напряжений, рассматриваем только изгиб и кручение и строим на стержне *грузовые эпюры* изгибающих (рис. 1, а) и крутящих (рис. 1, б) моментов:

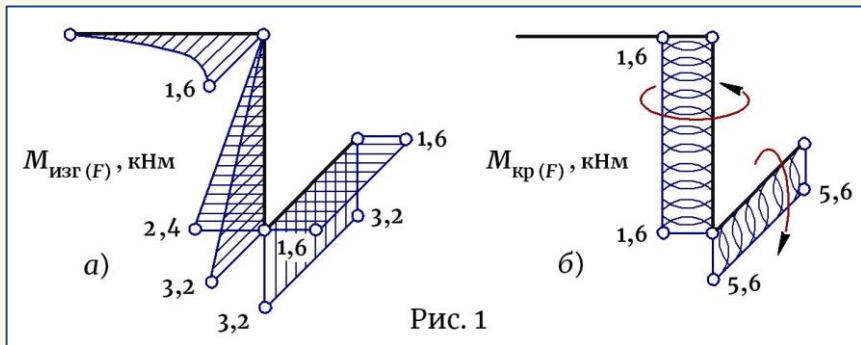


Рис. 1

② Подбираем диаметр стержня d . Наиболее нагруженными являются второй и третий участки, где возникает изгиб в двух плоскостях и кручение, а наиболее опасным является сечение в заделке. Определяем для опасного сечения суммарный изгибающий момент —

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{3,2^2 + 1,6^2} = 3,6 \text{ кНм}$$

и расчетный момент по III-ей теории прочности:

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{3,6^2 + 5,6^2} = 6,67 \text{ кНм.}$$

Записываем условие прочности при кручении с изгибом —

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma],$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,67 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 130}} = 80 \text{ мм.}$$

③ Определяем вертикальное и горизонтальное перемещения конца консоли А. По аналогии с предыдущей задачей здесь также пренебрегаем влиянием продольных и поперечных сил и рассматриваем только изгиб и кручение, выполняя расчет по формуле:

$$\Delta = \frac{1}{EI_x} (M_{\text{изг}(F)} \times \bar{M}_{\text{изг}}) + \frac{1}{GI_\rho} (M_{\text{кр}(F)} \times \bar{M}_{\text{кр}}), \quad (1)$$

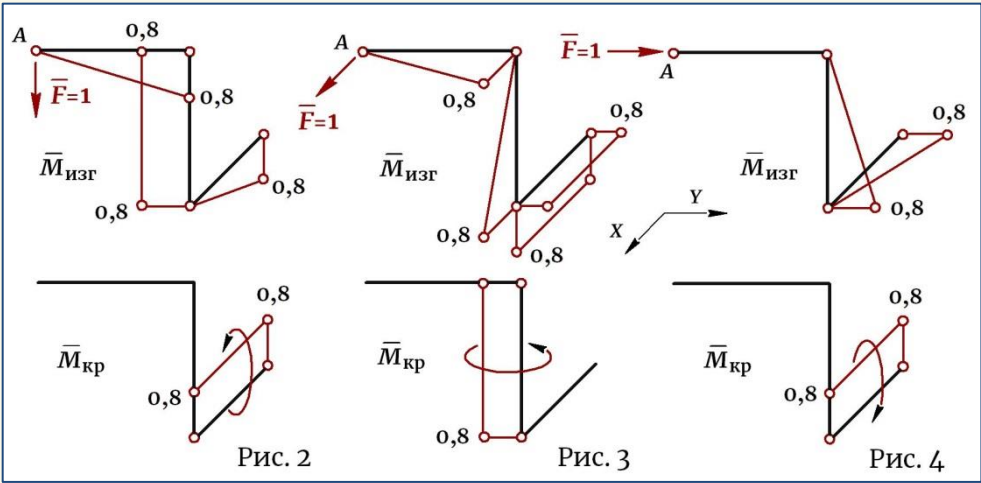
где для полученного сечения геометрические характеристики соответственно равны —

$$\begin{aligned} I_x &= \pi d^4 / 64 = 3,14 \cdot 8^4 / 64 = 200,96 \text{ см}^4; \\ I_\rho &= \pi d^4 / 32 = 3,14 \cdot 8^4 / 32 = 401,92 \text{ см}^4. \end{aligned} \quad (2)$$

Прикладываем в направлении искомого перемещения единичную силу $\bar{F} = 1$, строим *единичные эпюры* изгибающих и крутящих моментов и перемножаем их с соответствующими *грузовыми эпюрами* (рис. 1, а, б) в соответствии с формулой (1) и учетом значений (2):

★ Вертикальное перемещение точки А (рис. 2):

$$\begin{aligned} \Delta_A^{\text{верт}} &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 2,4 \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 3,2 \right) + \frac{1}{GI_\rho} (-5,6 \cdot 0,8 \cdot 0,8) = \\ &= \frac{1,792 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 200,96 \cdot 10^4} - \frac{3,584 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 401,92 \cdot 10^4} = 4,46 - 11,15 = -6,7 \text{ мм.} \end{aligned}$$



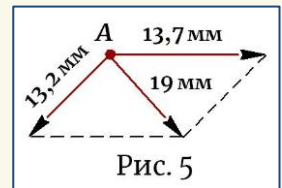
★ Горизонтальное перемещение точки А (рис. 3, 4):

$$\Delta_A^{\text{гориз}(X)} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 0,8^2 \cdot 0,8 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 3,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,8 + 3,2 \cdot 0,8 \times \right. \\ \left. \times 0,8 + 1,6 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \right) + \frac{1}{GI_\rho} (1,6 \cdot 0,8 \cdot 0,8) = \frac{4,011 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 200,96 \cdot 10^4} + \\ + \frac{1,024 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 401,92 \cdot 10^4} = 9,98 + 3,18 = 13,2 \text{ мм.}$$

$$\Delta_A^{\text{гориз}(Y)} = \frac{1}{EI_X} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 1,6 \right) + \frac{1}{GI_\rho} (5,6 \times \\ 0,8 \cdot 0,8) = \frac{1,024 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 200,96 \cdot 10^4} + \frac{3,584 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 401,92 \cdot 10^4} = 13,7 \text{ мм.}$$

Окончательно перемещение точки А в горизонтальной плоскости произойдет в направлении, показанном на рис. 5, и на основании полученных выше значений определяется как:

$$\Delta_A^{\text{гориз}} = \sqrt{13,2^2 + 13,7^2} = 19 \text{ мм.}$$



ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.