

УДК 624.426.5

*В.В. Надольский, Ф.А. Верёвка*

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь*

## **ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА**

*Аннотация: статья посвящена обзору современных методов определения вероятности отказа, основанных на положениях теории надежности строительных конструкций. Целью данной работы является предоставление обобщенной информации о дифференциации методов, применяемых в теории надежности, а также особенностях определения вероятности отказа.*

### **Введение**

Современные условия развития строительной отрасли диктуют такие условия, при которых главной целью становится достижение максимальной надежности конструктивного элемента при минимальной его себестоимости. В строительном проектировании такой «критерий» может быть удовлетворен различными способами: одним из основных направлений можно назвать совершенствование вероятностных методов расчета строительных конструкций. Перспективность данного направления отмечает и проф. В.Д. Райзер: «в проблеме обеспечения надежности строительных конструкций существенную роль играют правила расчета, представленные в строительных нормах и правилах, они определяют ожидаемый уровень надежности, который прямо связан с расходом материалов, а следовательно и со стоимостью конструкций» [10]. Учитывая случайную природу воздействий, физических и геометрических параметров конструкций, стоит отметить постоянную актуальность применения вероятностных методов расчета, которые лежат в основе теории надежности строительных конструкций.

Необходимо подчеркнуть, что в соответствии с положениями о обеспечении конструкционной надежности, изложенными в европейских [1] и международных [2] нормах, проектирование конструктивных элементов необходимо выполнять на основе целевых значений уровней надежности, выраженных в допустимых значениях индексов надежности или же эквивалентных им вероятностей отказа. Что вызывает необходимость нормативного закрепления методов определения вероятности отказа.

На современном этапе методы, применяемые для оценки надежности строительных конструкций, могут быть поделены на четыре уровня [3]:

*методы I уровня:* неопределенности базисных переменных учитываются с помощью нормативных (характеристических) значений и системой частных

коэффициентов безопасности, чем и обеспечивается целевой уровень надежности в современных нормах проектирования.

*методы II уровня:* неопределенные параметры моделируются с помощью математических ожиданий и стандартных отклонений, а также с помощью корреляционных коэффициентов между стохастическими переменными. Стохастические переменные неявно считаются нормально распределенными.

*методы III уровня:* неопределенные параметры моделируются с помощью совместных функций распределения. Вероятность отказа используется как мера надежности.

*методы IV уровня:* согласно данным методам последствия (стоимость) отказа также принимается во внимание и в качестве меры надежности используется понятие риска, рассматриваемого как последствия, связанные с разрушением или повреждением объекта, умноженные на вероятность отказа. Таким образом различные проектные решения могут быть сравнены на экономической основе, принимая во внимание, различные неопределенности, затраты и прибыль.

Описанные в настоящей статье методы определения вероятности отказа распространяются на предельные состояния, базисные переменные которых рассматриваются в качестве не зависящих от времени, или же в случаях, когда это считается допустимым. Также рассматриваемые методы подходят для случаев описания зависимых от времени процессов, описанных независимыми от времени базисными переменными (например, используя распределение экстремальных значений). Рекомендации по работе с зависимыми от времени задачами представлены в источниках [5,6].

Основной сложностью аналитических расчетов вероятности отказа можно назвать необходимость осуществления непосредственного интегрирования функции предельного состояния, что приводит к использованию приближенных аппроксимационных и имитационных методов определения вероятности отказа строительных конструкций таких как:

**а) Методы асимптотических приближений (аппроксимационные методы)**, к данным методам относятся методы теории надежности первого порядка (FORM – first order reliability methods) и методы теории надежности второго порядка (SORM – second order reliability methods).

**б) Методы имитационного моделирования**, к данным методам относятся следующие:

- грубое моделирование Монте-Карло;
- выборка по значимости;
- выборка по значимости на основе  $\beta$  – точки;
- моделирование методом Монте-Карло путем исключения части безопасной области;
- адаптивное моделирование;
- направленное моделирование;
- моделирование латинского гиперкуба и другие.

## 1 Аппроксимационные методы оценки надежности конструкций

Данные методы основаны на аппроксимации поверхности, описываемой уравнением предельного состояния (поверхности отказа) в некоторой точке ("расчетной точке"), поверхностями первого или второго порядка. Согласно теоретическим предпосылкам вероятностных методик, при линейной аппроксимации (метод FORM) поверхность отказа для случая с двумя базисными переменными преобразуется в касательную прямую, а в общем случае – в гиперплоскость. При квадратичной аппроксимации (метод SORM) поверхность отказа заменяют такими поверхностями, которые описываются уравнениями второго порядка [9]. После аппроксимации поверхности отказа аналитическим путем вычисляются индекс надежности или вероятность отказа.

Согласно теоретическим положениям методов FORM и SORM вероятность отказа рассчитывается с выполнением следующего перечня основных операций:

- Трансформируют вектор базисных переменных (вектор  $X$ ) в набор независимых нормализованных случайных переменных, обозначаемых как вектор  $U$ ;
- Производится аппроксимация линейной или квадратичной функцией  $g^*(U)$  поверхности отказа в нормализованном пространстве  $g(U)$ ;
- Производится анализ параметров распределения функции случайных аргументов  $g^*(U)$ , затем вычисляют соответствующий индекс надежности.

Таким образом, на основании вышесказанного, а также согласно положениям, изложенным в п. 10.3.3 [5] методы асимптотических приближений зависят от нескольких факторов, среди которых особо стоит выделить следующие:

**Методы преобразования**, посредством которых пространство базисных переменных (включая функцию предельного состояния) преобразуется в стандартное нормализованное пространство.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow U = (U_1, U_2, \dots, U_n) \quad (1)$$

где  $U_1, U_2, \dots, U_n$  являются независимыми базисными переменными со стандартным нормальным распределением (т.е. нормальное распределение с нулевым значением математического ожидания и единичным стандартным отклонением).

**Методы поиска:** основной задачей в стандартном нормализованном пространстве базисных переменных является определение подходящей контрольной точки, так называемой «расчетной точки», которая представлена точкой на поверхности предельного состояния, расположенной максимально близко к началу координат.

В стандартном нормализованном пространстве, симметричном относительно осей координат, расчетная точка представляет собой наиболее вероятную точку отказа, ее координаты соответствуют такому сочетанию переменных, которое вероятнее всего приведет к отказу. Для определения расчетной точки практически во всех случаях, за исключением простейших, необходимо выполнить процедуру поиска (как правило, используется алгоритм Раквитца - Физлера) [5]. После того как определена расчетная точка находится так называемый Hasofer&Lind индекс надежности [3-5,7]:

$$\beta_{HL} = \left( \sum_{i=1}^n u_i^{*2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

где  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$  – координаты расчетной точки.

Стоит отметить, что координаты точки  $u^*$  также могут быть записаны в следующем виде:

$$u^* = \beta_{HL} \alpha \quad (3)$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – единичный нормальный вектор к поверхности предельного состояния в точке  $u^*$ , таким образом, значения  $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$  представляют собой направляющие косинусы в расчетной точке. В теории надежности они также известны в качестве коэффициентов чувствительности, так как они указывают на относительную «значимость» неопределенности стохастической базисной переменной на надежность. Значения  $\alpha_i$  расположены в диапазоне между нулевым и единичным значением и чем ближе значение к единице, тем более значительно влияние соответствующей стохастической базисной переменной на результат расчета надежности [3,4].

**Методы аппроксимации (методы приближений):** после того как определена расчетная точка, становится возможным осуществление расчета приблизительного значения вероятности отказа. При приближении первого порядка (FORM) вероятность отказа выражается следующим образом [5]:

$$P_{fFORM} = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (4)$$

Необходимо отметить, что в некоторых случаях, несмотря на значительную большую трудоемкость вычислений, целесообразно использовать аппроксимирование поверхности предельного состояния более высокого порядка (SORM), в особенности данная процедура позволяет проверить точность метода надежности первого порядка.

## 2 Методы имитационного моделирования (симуляционные методы)

Данные методы относятся к точным методам оценки надежности строительных конструкций или же к методам III уровня. Сущность данных методов заключается в первоначальном генерировании выборки стохастических переменных и дальнейшем использовании близкого числа выборок, относящихся к состоянию отказа, для оценки вероятности отказа.

В литературе описано большое количество методов моделирования, для более детального изучения которых, рекомендуются следующие источники: [3,4,7,10-12]. Отметим основные особенности некоторых из наиболее используемых методов, а именно:

### **Грубое моделирование Монте-Карло**

Сущность метода заключается в формировании выборки значений стохастического вектора для получения ряда выборочных значений. После чего осуществляется анализ функции предельного состояния с той целью, чтобы убедиться, достигнуто ли состояние отказа (т.е.  $g(x) \leq 0$ ) для данного ряда значений. Данный эксперимент проводится множество раз, и вероятность разрушения определяется, на основании количества выполненных испытаний, результаты которых отражают достижение состояния отказа, деленных на общее количество проведенных испытаний [3-5,7,11]. Однако для решения большинства практических задач, данный метод едва ли может быть эффективно использован, поскольку для достаточно точного определения вероятности отказа необходимо выполнение большого числа испытаний [11]. Согласно методу грубого моделирования Монте Карло вероятность отказа оценивается в соответствии со следующим выражением:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\hat{u}_j)] \quad (5)$$

где  $N$  – количество проведенных моделирований;

$u_j$  – выборка номер  $j$  стандартного нормально распределенного стохастического вектора  $U$ .

$I[g(u)]$  – функция индикатор, определяется в соответствии со следующей системой неравенств:

$$I[g(u)] = \begin{cases} 0 & \text{при } g(u) > 0 \text{ (безопасное состояние)} \\ 1 & \text{при } g(u) \leq 0 \text{ (состояние отказа)} \end{cases} \quad (6)$$

### **Выборка по значимости**

Целью данного метода является концентрация распределения точек выборки в непосредственной близости от точек отказа (от расчетных точек), определенная с помощью методов надежности первого и второго порядка (FORM и SORM) [3,4]. Данную операцию можно осуществить, используя функцию выборки, выбор которой зависит от априори имеющихся данных, таких, как, например, координаты расчетной точки и/или любые значения вероятности отказа. Таким образом, вероятность отказа определяется в соответствии со следующей формулой:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\hat{y}_j)] \frac{f_X(\hat{y}_j)}{f_Y(\hat{y}_j)} \quad (7)$$

где  $f_Y(y)$  – функция плотности выборки, из которой генерируются вектора выборок  $\hat{y}_j$ ;

$f_X(y)$  – функция плотности  $X$ .

### **Метод Монте Карло с исключением безопасных областей**

Согласно теоретическим положениям данного метода пространство разделяется на две несовместные области  $D_1$  и  $D_2$ . Предполагается, что  $D_1$  выбирается таким образом, что внутри данной области отказ не происходит [11]. Вероятность нахождения в области  $D_1$  имеет следующий вид:

$$p_1 = P\left(\sum_{i=1}^N U_i^2 \leq \beta^2\right) = \chi^2(n, \beta^2) \quad (8)$$

где  $\chi^2(n, \beta^2)$  – функция распределения  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы.

Тогда вероятность отказа оценивается согласно следующей формуле:

$$\hat{P}_f = \frac{(1 - p_1)}{N} \sum_{j=1}^N I[g(\hat{u}_j)] \quad (9)$$

где  $f_U(u)$  – стандартизированная нормальная функция плотности;

$\hat{u}_j$  –  $j$ -ая выборка из области  $D_2$  (смоделированная из стандартного нормально распределенного стохастического вектора  $U = (U_1, \dots, U_n)$ , но только тех выборок, которые взяты вне области  $D_1$ ).

#### **Метод направленного моделирования**

Сущностью данного метода является формулировка задачи определения надежности в полярной системе координат. В данном методе используется специфический результат, относящийся к вероятности отказа, ограниченной гиперсферой, центр которой приходится на начало координат [3-5]. Эффективность этого метода заключается в том, что при каждом стохастическом испытании появляются точные данные о том, где находится граница между безопасностью и отказом. Данный метод также требует выполнения определенных итерационных вычислений. Он в частности подходит для решения такого типа задач, в которых достаточно трудно определить «значимые» области (возможно, из-за наличия множества локальных расчетных точек) [5].

#### **Метод моделирования с использованием латинского квадрата**

Основная идея этого метода состоит в том, чтобы обеспечить выборку всего диапазона каждой переменной, чтобы получить эффективную оценку вероятности отказа. Диапазон каждой переменной разделен на  $m$  интервалов. Вероятность результата в каждом интервале должна быть одинаковой [12].

Стоит отметить, что на современном этапе основной целью наиболее прогрессивных симуляционных методов, применяемых для оценки надежности строительных конструкций, является максимально возможное сокращение вариации определяемого значения вероятности отказа.

#### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Еврокод. Основы проектирования конструкций: ТКП EN 1990-2011. Введ. 01.07.12. – Минск: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2012. – 70 с.

2. ISO 2394-2007. Надёжность строительных конструкций. Общие принципы. – Введ. 01.07.2008.–Минск: Госстандарт Республики Беларусь, 2007. – 69с
3. Madsen, H.O. Methods of structural safety / H.O. Madsen, S. Krenk, N.C. Lind. – Prentice Hall, 1986. –416 p.
4. Ditlevsen, O. Structural Reliability Methods : Monograph / O. Ditlevsen, H.O. Madsen. – Technical University of Denmark : Department of Mechanical Engineering : Coastal, Maritime and Structural Engineering, July 2005. –363 p.
5. JCSS Probabilistic Model Code // Joint Committee of Structural Safety[Electronic resource].–2001.–Mode of access: <http://www.jcss.ethz.ch> . – Date of access: 15.05.2017.
6. Шпете, Г. Надёжность несущих строительных конструкций. Москва: Стройиздат.– 1994 г. – 288 с.
7. Sorensen, J.D. Notes in Structural Reliability Theory and Risk Analysis / J.D. Sorensen. –Aalborg : Institute of Building Technology and Structural Engineering : Aalborg University, February2004. –231 p.
8. Райзер, В.Д. Методы теории надёжности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций / В.Д. Райзер. – Москва : Стройиздат, 1986. –192 с. –(Надёжность и качество).
9. Марковский Д.М. Калибровка значений параметров безопасности железобетонных конструкций с учётом заданных показателей надёжности[Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Д.М. Марковский; Брестский государственный технический университет. – Брест, 2009. – 29с.
10. Statistical methods for quality control of building materials and components : ISO 12491:1997(E). – Genève : International Organization for Standardization. –30 p.
11. Hammersley, J.M. & D.C. Handscomb: Monte Carlo methods. John Wiley & sons, New York, 1964.
12. Deak, I.: Three digit accurate multiple normal probabilities.Numerical Mathematik, Vol. 35, 1980.