МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

Часть 7

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач
для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Под редакцией М. А. Князева

Минск
БНТУ
2014

УДК 51(076.9)
ББК 22.1я7
В93

Издание выходит с 2008 года

Составители части:
Е. А. Глинская, А. Н. Мелешко

Рецензенты:
И. Н. Катковская, В. Ф. Бубнов

Данное издание содержит теоретические сведения, подробные решения типовых примеров и задач, задания для самостоятельной работы по разделу дисциплины «Элементы теории поля».

Ч. 6 : «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы» издана в БНТУ в

ISBN 978-985-550-271-6 (Ч. 7)
ISBN 978-985-479-903-2

1. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Говорят, что задано *скалярное поле*, если в каждой точке $M(x; y; z)$ пространства R^3 (или в некоторой его области *V*) определена скалярная функция

$$u = u(M) = u(x, y, z).$$

Поле называется *плоским*, если оно определено как функция двух переменных (в двумерном пространстве R^2), и *стационарным* (или установившимся), если не зависит от времени. Примеры скалярных полей: поля температуры, давления, плотности, электрического потенциала.

Для графического отображения скалярных полей используют *поверхности уровня* и *линии уровня*. *Поверхность уровня* – это множество точек пространства, в которых функция поля принимает постоянное значение: $u(x, y, z) = C$, где C – произвольная постоянная. Соответственно, *линия уровня* – это множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению вида $u(x, y) = C$. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность (линия) уровня. Семейство поверхностей (линий) уровня, соответствующих различным значениям *C*, дает наглядное представление о пространственном распределении поля. Например, полю электрического потенциала точечного электрического заряда соответствуют поверхности уровня в виде концентрических сфер:

$$u = \frac{q}{|\vec{r}|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C,$$

$$C \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2}.$$

Важнейшей характеристикой скалярного поля является *градиент* – вектор, координатами которого являются частные производные функции поля $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}.$$

В каждой точке поля $M(x; y; z)$ градиент показывает направление наибыстрейшего возрастания функции поля и направлен по нормали к проходящей через эту точку поверхности уровня. Если уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ неявно задает некоторую поверхность, то вектор $\operatorname{grad} F(x, y, z) = (F'_x, F'_y, F'_z)$ направлен по нормали к ней. Свойства градиента являются очевидными следствиями свойств производных:

1) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$

2) $\operatorname{grad}(\mathrm{c} \cdot u) = \mathrm{c} \cdot \operatorname{grad} u;$

3) $\operatorname{grad}(u \cdot v) = u \cdot \operatorname{grad} v + v \cdot \operatorname{grad} u;$

4) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot \operatorname{grad} u - u \cdot \operatorname{grad} v}{v^2};$

5) $\operatorname{grad} f(u) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u.$

Производная скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M(x; y; z)$ *по направлению вектора* $\vec{s} = |\vec{s}|\left(\cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}\right)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

и характеризует скорость изменения поля в данном направлении. Если поле $u(x, y)$ плоское, то $\cos\gamma = 0$, $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, и производная по направлению принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha .$$

Если $\dfrac{\partial u}{\partial s} > 0 \left(\dfrac{\partial u}{\partial s} < 0\right)$, то функция поля в данной точке возрастает (убывает) в направлении $\vec{s}$. Чем больше $\left|\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|$, тем быстрее изменяется функция поля.

Производная по направлению и градиент связаны соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \mathrm{grad}\,u \cdot \vec{s}_0 = |\mathrm{grad}\,u| \cos\varphi = \text{пр}_{\vec{s}}\ \mathrm{grad}\,u,$$

где φ – угол между векторами grad$u$ и $\vec{s}$ (или $\vec{s}_0$);

пр$_{\vec{s}}$ grad$u$ – проекция градиента на вектор $\vec{s}$ (или $\vec{s}_0$).

Видно, что, если $\vec{s}$ и grad$u$ сонаправлены (при $\varphi = 0$), производная по направлению принимает максимальное значение, равное модулю градиента:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\max} = |\mathrm{grad}\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Говорят, что задано *векторное поле*, если в каждой точке $M(x; y; z)$ пространства R^3 (или некоторой его области *V*) задана векторная функция

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k},$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – скалярные функции от координат.

Примеры векторных полей: электрическое и магнитное, сила тяжести, поле течения жидкости. Для наглядного представления векторного поля используют *векторные линии* и *векторные трубки*. *Векторная* (или *силовая*) *линия* поля $\vec{a}$ – это такая линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление вектора $\vec{a}$. Например, электрическому полю точечного заряда соответствуют силовые линии в виде прямых, проходящих через точку расположения заряда. Векторные линии находятся решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Векторная трубка поля – это поверхность, которая образована всеми векторными линиями, проходящими через произвольный замкнутый контур в поле. Так, векторными трубками поля точечного электрического заряда являются конусы с вершинами в точке расположения заряда.

Дивергенцией (или расхождением) векторного поля в точке называется скалярная величина, которая вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

и характеризует пространственное распределение и интенсивность (плотность) источников и стоков поля. Знак дивергенции указывает на наличие в точке M источника ($\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$) или стока ($\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$) поля, а абсолютная величина выражает их интенсивность (при этом нулевое значение дивергенции означает отсутствие как источников, так и стоков).

Основные свойства дивергенции:

1) $\operatorname{div}(\vec{c})=0,\ \vec{c}=\text{const};$

2) $\operatorname{div}(c\cdot\vec{a})=c\cdot\operatorname{div}\vec{a},\ c=\text{const};$

3) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b};$

4) $\operatorname{div}(u\cdot\vec{a})=u\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}u.$

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}$ в точке $M(x;\ y;\ z)$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

где частные производные вычисляются в точке M и использованы обозначения операторов дифференцирования $\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x},\ \partial_y=\dfrac{\partial}{\partial y},\ \partial_z=\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Свойства ротора:

$$1)\ \operatorname{rot}\vec{c}=\vec{0},\ \vec{c}=\text{const},$$

$$2)\ \operatorname{rot}(c\cdot\vec{a})=c\cdot\operatorname{rot}\vec{a},\ c=\text{const},$$

$$3)\ \operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b},$$

$$4)\ \operatorname{rot}(u\cdot\vec{a})=u\cdot\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}.$$

Для записи дифференциальных операций удобно использовать векторный оператор, называемый *оператором Гамильтона* (или оператором «набла»):

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

С его помощью рассмотренные выше дифференциальные характеристики скалярного и векторного полей представляются в компактном виде:

$$\operatorname{grad}u=\vec{\nabla}u,\quad \operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a},\quad \operatorname{rot}\vec{a}=\vec{\nabla}\times\vec{a}.$$

Часто используется также оператор Лапласа (или лапласиан):

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,.$$

Примеры

1. Найти линию уровня плоского скалярного поля $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$, проходящую через точку $M(2;\ 4)$.

Решение. В общем случае линии уровня плоского поля удовлетворяют уравнению вида $u(x,y)=C$, где C – произвольные постоянные, поэтому линии уровня заданного поля – это параболы вида $y=Cx^2$ с вершинами в точке $M(0;\,0)$. Чтобы найти C, в уравнение параболы подставим координаты точки

M(2; 4): $C=\frac{y}{x^2}=\frac{4}{2^2}=1$. Таким образом, искомая линия уровня описывается уравнением $y=x^2$.

2. Найти поверхность уровня скалярного поля $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, проходящую через точку $M(1;1;2)$. Найти линии уровня поля в плоскости $z=4$.

Решение. Поверхности уровня удовлетворяют уравнению $\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$, где C – постоянная. Взяв косинус от его левой и правой частей, получим уравнение $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos C=\frac{1}{C_1}$, из которого следует, что поверхности уровня – это конусы 2-го порядка вида $z^2C_1{}^2=x^2+y^2$ с вершинами в начале координат. Подставив в уравнения конусов координаты точки $M(1;1;2)$, получим $C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, искомая поверхность – конус $\frac{1}{2}z^2=x^2+y^2$.

Сечение поверхности уровня плоскостью $z=4$ есть окружность радиуса $2\sqrt{2}$: $x^2+y^2=\frac{1}{2}\cdot 4^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$.

3. Найти угол между градиентами скалярных функций $u=\frac{3}{2}x^2-3y^2$ и $v=x^2yz$ в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Чтобы найти градиент функции u в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, найдем значения частных производных функции в этой точке:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=3x|_M=6,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=-6y|_M=-2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=0.$$

Таким образом, вектор градиента равен $\operatorname{grad}u(M)=6\vec{i}-2\vec{j}$.

Найдем градиент функции v в заданной точке:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_M = 2xyz\big|_M = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_M = x^2 z\big|_M = 2\sqrt{3}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_M = x^2 y\big|_M = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{grad} v = \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k}.$$

Косинус угла между векторами градиентов найдем, используя их скалярное произведение:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} u(M)\cdot \operatorname{grad} v(M)}{|\operatorname{grad} u(M)||\operatorname{grad} v(M)|} = \frac{6\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\cdot 2\sqrt{3} + 0\cdot\frac{4}{3}}{\sqrt{6^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 0.$$

Таким образом, угол между градиентами функций u и v в точке M равен $\frac{\pi}{2}$.

4. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(1;-2;2)$ по направлению радиуса-вектора этой точки. Определить косинус угла между этим направлением и направлением наибыстрейшего возрастания функции в точке M.

Решение. Найдем единичный вектор в направлении радиуса-вектора точки $M(1;-2;2)$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_M}{|\vec{r}_M|} = \frac{1\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{1\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Определим значения частных производных в точке M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = yz\big|_M = -4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = xz\big|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = xy\big|_M = -2$$

и рассчитаем производную по направлению радиуса-вектора в этой точке:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cos\gamma = -4\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{(-2)}{3} - 2\cdot\frac{2}{3} = -4.$$

Видно, что в данном направлении функция убывает (производная отрицательна).

Направление наибыстрейшего возрастания функции определяется градиентом $\operatorname{grad} u(M) = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, поэтому косинус искомого угла равен:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} u(M)\cdot \vec{e}}{\left|\operatorname{grad} u(M)\right|} = \frac{\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_M}{\left|\operatorname{grad} u(M)\right|} = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}},$$

где учтено, что скалярное произведение градиента на орт направления равно производной по этому направлению: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_M = \operatorname{grad} u(M)\cdot \vec{e}$.

5. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = x\sin z + y\cos x$ в начале координат.

Решение. Найдем градиент функции в начале координат:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\sin z - y\sin x\right|_M = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\cos x\right|_M = 1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.x\cos z\right|_M = 0,\qquad \operatorname{grad} u = 1\vec{j}.$$

Таким образом, в начале координат наибыстрейшее возрастание функции происходит со скоростью $\left|\operatorname{grad} u\right| = 1$ в положительном направлении оси y.

6. Найти единичный вектор, который перпендикулярен поверхности уровня скалярного поля $u = xy + xz + yz$ в точке $M(1;1;1)$.

Решение. Так как в каждой точке поля градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через эту точку, для решения задачи достаточно найти единичный вектор в направлении градиента поля в точке $M(1;1;1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.y + z\right|_M = 2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.x + z\right|_M = 2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.x + y\right|_M = 2,\qquad \operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\operatorname{grad} u(M)}{\left|\operatorname{grad} u(M)\right|} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}.$$

7. Вычислить координаты единичного вектора, направленного по нормали к поверхности $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$ в точке $M\left(1;1;2\right)$.

Решение. По нормали к поверхности направлен вектор градиента, который при неявном задании поверхности уравнением вида $F(x,y,z)=0$ вычисляется по формуле $\operatorname{grad}F=(F'_x,F'_y,F'_z)$.

Найдем градиент и его орт:

$$F'_x\Big|_M=yz^3-3x^2yz\Big|_M=2,\;\; F'_y\Big|_M=xz(z^2-x^2)-5y^4\Big|_M=1,\;\; F'_z\Big|_M=3z^2xy-x^3y\Big|_M=11,$$

$$\operatorname{grad}F=2\vec{i}+1\vec{j}+11\vec{k},\quad \left|\operatorname{grad}F\right|=\sqrt{2^2+1^2+11^2}=\sqrt{9\cdot 14}=3\sqrt{14},$$

$$\vec{e}=\frac{\operatorname{grad}F}{\left|\operatorname{grad}F\right|}=\frac{2\vec{i}+1\vec{j}+11\vec{k}}{3\sqrt{14}}=\frac{2}{3\sqrt{14}}\vec{i}+\frac{1}{3\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{11}{3\sqrt{14}}\vec{k}.$$

Таким образом, существуют два взаимно противоположных единичных вектора, направленных по нормали к заданной поверхности: $\vec{n}_0=\pm\vec{e}$.

8. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a}(M)=4z\vec{j}-9y\vec{k}$. Найти поле дивергенции и поле ротора.

Решение. Для заданного векторного поля $P=0, Q=4z, R=-9y$, и его векторные линии определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{4z}=\frac{dz}{-9y}.$$

Из уравнения $\dfrac{\mathrm{d}y}{4z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{-9y}$ следует уравнение $4z\mathrm{d}z+9y\mathrm{d}y=0,$ интегрируя которое получим векторные линии в виде эллипсов, центры которых лежат на оси x:

$$\frac{z^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=C_1.$$

Из уравнения $\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{4z}$ следует $\mathrm{d}x=0$, что дает $x=C_2$. Таким образом, векторные линии данного поля – это эллипсы, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси x.

Найдем дивергенцию и ротор в произвольной точке поля:

$$\operatorname{div}\vec{a}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ 0 & 4z & -9y\end{vmatrix}=\left(-9-4\right)\vec{i}+\left(0-0\right)\vec{j}+\left(0-0\right)\vec{k}=-13\vec{i}.$$

Таким образом, дивергенция и ротор поля постоянны, причем дивергенция равна нулю.

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти линию уровня плоского скалярного поля, проходящую через заданную точку:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $M\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$.

2. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+3y^2}$, $M\left(1;1\right)$.

Найти поверхность уровня скалярного поля, проходящую через заданную точку:

3. $u=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2}$, $M\left(2;\,2;\,1\right)$.

4. $u=2x^2+y^2-z^2$, $A\left(1;\,0;\,1\right)$.

5. Найти градиент скалярного поля $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M\left(-1;1;1\right)$.

6. Показать, что в точках $M_1\left(1;\,0;\,1\right)$ и $M_2\left(1;\,1;\,0\right)$ градиенты скалярной функции $u=x^2yz+xy^2z+xyz^2$ ортогональны.

7. Определить точки, в которых градиент поля $u=\ln\left(x-\frac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i}+\vec{j}$.

8. Рассчитать производную скалярного поля $u = \dfrac{xy}{z}$ в точке $M_1(1; 1; 1)$ по направлению к точке $M_2(3; 2; 3)$.

9. Найти производную поля $u = \operatorname{arctg}\left(x^2 y^2\right)$ в точке $M(1; 1)$ в направлении четвертого координатного угла.

10. Найти угол между направлением скорости наибыстрейшего возрастания функции $u = \dfrac{x}{y}$ в точке $M(0; 1)$ и отрицательным направлением оси x.

11. Показать, что скорости наибольшего возрастания функции $u = \operatorname{arctg}(xy)$ в точках $M_1(1; -1)$ и $M_2(-1; 1)$ равны по модулю и противоположно направлены.

12. Найти единичные векторы нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = \ln(xy + xz + yz)$ в точке $M(1; 0; 1)$.

13. Определить направления векторов нормали к поверхности уровня плоского скалярного поля $u = 2x^2 + 3y^2 - 3x + 9y + 3$ в точке $M(0; 1)$.

14. Найти единичный вектор нормали к поверхности $\ln(1 + x^2) + yz = 0$ в точке $M(1; 0; 1)$, составляющий острый угол с положительным направлением оси x.

15. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} + 4z\vec{k}$.

16. Найти векторные линии поля $\operatorname{grad} u$, если $u = x + y^2$.

17. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 + yx\right)\vec{i} + \left(y^2 - yx\right)\vec{j}$.

18. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + zx\vec{k}$.

19. Найти $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$, где $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

20. Доказать, что для любого векторного поля справедливо равенство $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$.

Ответы

1) окружность $x^2+y^2=16$. 2) эллипс $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4/3}=1$. 3) сфера $(x-2)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=25$. 4) однополостный гиперболоид $2x^2+y^2-z^2=1$. 5) $\mathrm{grad}u=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 7) $M_1(2;1)$, $M_2(0;-1)$. 8) 1. 9) 0. 10) π. 12) $\vec{e}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 13) биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. 14) $\vec{n}=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. 15) $z=C_1x^4,\ y=C_2$. 16) $z=C_1,\ x=\frac{1}{2}\ln y+C_2$. 17) $x+3y$. 18) $-z\vec{j}$. 19) $6x\vec{i}+6y\vec{j}+6z\vec{k}$.

3. ПОТОК, РАБОТА И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА. ТЕОРЕМЫ СТОКСА И ГРИНА. ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Потоком векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ через выбранную сторону поверхности S называется интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля $\vec{a}(M)$ на единичный вектор нормали $\vec{n}_0(M)$ к поверхности, т. е. поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\Pi=\iint_S \vec{a}\vec{n}_0\mathrm{d}S.$$

При изменении стороны поверхности на противоположную, т. е. при замене $\vec{n}_0$ на $-\vec{n}_0$, поток изменяет знак. С учетом $\vec{n}_0=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ и $\cos\alpha\,\mathrm{d}S=\pm\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\cos\beta\,\mathrm{d}S=\pm\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\pm\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, поверхностный интеграл 2-го рода может быть записан в скалярной форме и вычислен с помощью двойных интегралов по проекциям D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} заданной поверхности на координатные плоскости yOz, xOz, xOy соответственно:

$$\Pi = \iint_S \vec{a}\vec{n}_0 \mathrm{d}S = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S =$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где функции $x(y,z), y(x,z), z(x,y)$ получены разрешением уравнения поверхности относительно соответствующей координаты. Если S задана в явном виде функцией $z = z(x,y)$, то справедлива формула

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \vec{a} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(-z'_x P(x,y,z(x,y)) - z'_y Q\big(x,y,z(x,y)\big) + R\big(x,y,z(x,y)\big)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где $\vec{n} = \left(-z'_x,\ -z'_y,\ 1\right)$ – вектор нормали к поверхности. Аналогичным образом поток может вычисляться по проекции на плоскости yOz (если поверхность явно задана функцией $x = x(y,z)$ и имеет нормаль $\vec{n} = (1, -x'_y, -x'_z)$) или xOz (при задании функцией $y = y(x,z)$ и нормали $\vec{n} = (-y'_x,\ 1,\ -y'_z)$).

Если S замкнута и ограничивает объем V, а функции координат P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка, то по *теореме Остроградского-Гаусса* поток вектора $\vec{a}$ через внешнюю сторону S равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V:

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}\vec{n}_0 \mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Заметим, что вычислить тройной интеграл часто оказывается значительно проще.

Напомним, что Π – скалярная величина. Если угол $\psi = (\vec{a}, \vec{n}_0) < \frac{\pi}{2}$, то $\Pi > 0$; если $\psi > \frac{\pi}{2}$, то $\Pi < 0$; если $\psi = \frac{\pi}{2}$, то $\Pi = 0$. В гидродинамике поток вектора скорости несжимаемой жидкости через заданную поверхность дает объем жидкости, протекающей через нее в единицу времени, $\Pi > 0$ означает, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает, т. е. внутри V имеются источники; $\Pi < 0$ означает, что из V вытекает меньше жидкости, чем втекает, т. е. внутри V имеются стоки; при $\Pi = 0$ в область V втекает столько же жидкости, сколько вытекает. В общем случае поток векторного поля пропорционален количеству векторных линий, пронизывающих поверхность в направлении вектора нормали в единицу времени.

Работой векторного поля $\vec{a}(M)$ *по пути* L называется криволинейный интеграл

$$A = \int\limits_L \vec{a}\vec{\tau}_0 \mathrm{d}l = \int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

где L – кусочно-гладкая кривая;

$\vec{\tau}_0(M)$ – единичный вектор в направлении касательной к ней.

С физической точки зрения данный интеграл равен работе переменной силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, действующей на материальную точку (физическое тело), при ее перемещении вдоль кривой L. Если кривая L замкнута, данный интеграл называется *циркуляцией поля* $\vec{a}$ *по контуру* L. Направление обхода контура либо указывается заранее, либо по умолчанию берется положительным, т. е. против часовой стрелки. Отметим, что вдоль замкнутых векторных линий циркуляция всегда отлична от нуля, так как на векторной линии скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{\tau}_0$ сохраняет знак: положительный, если направления вектора поля и обхода векторной линии совпадают, и отрицательный, если эти направления противоположны.

Согласно *теореме Стокса*, циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку вектора $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ через незамкнутую поверхность S, ограниченную этим контуром (или натянутую на этот контур):

$$\oint\limits_L \vec{a}\vec{\tau}_0 \mathrm{d}l = \iint\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{a} \cdot \vec{n}_0 \mathrm{d}S,$$

где $\vec{\tau}_0, \vec{n}_0$ – единичные векторы, направленные соответственно по касательной к контуру и по нормали к поверхности.

В скалярной форме:

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

В приведенных выше формулах при обходе контура выбранная сторона поверхности должна оставаться слева или, что то же самое, вектор нормали к поверхности должен быть направлен так, чтобы видимый из его конца обход контура совершался против часовой стрелки. Если контур плоский, то в качестве поверхности часто выбирают ограниченную им область на плоскости.

Как видим, интегральные и дифференциальные характеристики векторного поля взаимосвязаны: циркуляция по замкнутому контуру выражается через ротор этого же поля, а поток через замкнутую поверхность – через дивергенцию. Не вдаваясь в подробности, отметим, что строгие определения ротора и дивергенции векторного поля даются через его циркуляцию и поток соответственно.

Очевидно, что *формула Грина*

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

является частным случаем формулы Стокса, когда контур и ограниченная им область лежат в координатной плоскости xOy. Формула Грина позволяет вычислить площадь S плоской области D, ограниченной контуром L:

$$S_D = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L x\,\mathrm{d}y = -\oint_L y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим некоторые специальные виды векторных полей. Поле $\vec{a}$ называется *потенциальным* (или *градиентным*, или *безвихревым*), если в каждой точке $M(x, y, z)$ оно является градиентом некоторой скалярной функции $u(x, y, z)$:

$$\vec{a}(M) = \mathrm{grad}u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k},$$

которая называется *потенциалом поля*. Чтобы векторное поле $\vec{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках поля его ротор был равен нулю:

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Потенциальное векторное поле $\vec{a}$ обладает следующими свойствами:

1) работа поля $\vec{a}$ не зависит от формы пути или, что равносильно, циркуляция поля по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \vec{a}\vec{\tau}_0 \mathrm{d}l = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0;$$

2) работа поля при перемещении из точки A в точку B не зависит от пути и определяется приращением потенциала поля:

$$A = \int_{AB} \vec{a}\vec{\tau}_0 \mathrm{d}l = u(B) - u(A);$$

3) потенциал поля вычисляется с помощью криволинейного интеграла:

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} \vec{a}\vec{\tau}_0 \mathrm{d}l = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + C,$$

где точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ принадлежат полю;

C – произвольная постоянная.

Аналогичная ситуация имеет место, если векторное поле является плоским. В частности, если в поле $\vec{a}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ выполняется условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

означающее, что $\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$, то выражение $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ является полным дифференциалом потенциала $u(x,y)$, вычисляемого по формулам

$$u(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + C,$$

где точки $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$ и $M\left(x,\, y\right)$ принадлежат полю;

C – произвольная постоянная.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным* (или *трубчатым*), если в каждой точке поля его дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} = 0.$$

Свойства соленоидального векторного поля:

1) поток вектора поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Pi = \oiint\limits_{S} \vec{a}\vec{n}_0\,\mathrm{d}S = 0;$$

2) поле не содержит ни источников, ни стоков, векторные линии поля непрерывны и замкнуты;

3) поток вектора поля через любое сечение векторной трубки есть величина постоянная (отсюда название – «трубчатое»);

4) в каждой точке поля его вектор $\vec{a}(M)$ является ротором некоторой векторной функции $\vec{v}(M)$, называемой *векторным потенциалом*:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{rot}\vec{v}(M).$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим* (или *лапласовым*), если оно является одновременно потенциальным и соленоидальным. Обладая свойствами потенциального и соленоидального полей, гармоническое поле характеризуется одновременно скалярным $u(M)$ и векторным $\vec{v}(M)$ потенциалами, причем скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u(M) = 0.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими*.

Примеры

1. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ через часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, расположенную в 1-м октанте. Нормаль составляет острый угол с осью *Oz*.

Решение. Заданная плоскость $x + 2y + 3z = 1$ имеет вектор нормали $\vec{n} = (1;\, 2;\, 3)$ и пересекает оси координат в точках $A\left(1;\, 0;\, 0\right)$, $B\left(0;\, \frac{1}{2};\, 0\right)$, $C\left(0;\, 0;\, \frac{1}{3}\right)$. Проекцией треугольника *ABC* на плоскость *xOy* является треугольник *ABO* (точка *O* – начало координат), ограниченный прямыми $x = 0,\ y = 0,\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$. Поверхностный интеграл будем вычислять как двойной интеграл по проекции заданной поверхности на плоскость *xOy*:

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} \vec{a}\cdot\vec{n}_0 \mathrm{d}S = \iint\limits_{ABC} 8x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 11y dx dz + 17z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta ABO} (8x\cdot 1 + 11y\cdot 2 + 17z\cdot 3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\Delta ABO} (8x + 22y + 51z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta ABO} \left(8x + 22y + 51\cdot\frac{1}{3}(1 - x - 2y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\Delta ABO} (-9x - 12y + 17)\mathrm{d}x\mathrm{d}y..$$

Расставим пределы интегрирования и вычислим двойной интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_{\Delta ABO} (-9x - 12y + 17)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} \big((17 - 9x) - 12y\big)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \Big((17 - 9x)y - 6y^2\Big)\Big|_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} = \int\limits_0^1 (-3x^2 - 10x + 7)\Big|\mathrm{d}x =$$

$$= (-x^3 - 5x^2 + 7x)\Big|_0^1 = 1.$$

2. Используя теорему Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля $\vec{a} = y^2 z\vec{i} + 3x^2 z\vec{j} + 7z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$, где a = const.

Решение. Заданная поверхность – это сфера радиуса a, что нетрудно показать, выделив в ее уравнении полный квадрат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ay \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y - a)^2 + z^2 = a^2.$$

Так как поверхность является замкнутой, применим теорему Остроградского-Гаусса. Для этого найдем дивергенцию поля:

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(7z\right) = 0 + 0 + 7 = 7$$

и рассчитаем поток:

$$\Pi = \oiint\limits_S \vec{a}\vec{n}_0 \mathrm{d}S = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V 7\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 7\cdot V = 7\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{28}{3}\pi a^3.$$

Здесь учтено, что объем сферы равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

3. Вычислить работу, совершаемую силой $\vec{F} = yx\vec{i} + 2x\vec{j}$ при перемещении тела из начала координат в точку $A(1;3)$ по кривой L, если L представляет собой а) прямую; б) параболу.

Решение. Прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(1;3)$, описывается уравнением $y = 3x$. Работа силы $\vec{F} = yx\vec{i} + 2x\vec{j}$ по отрезку этой прямой есть криволинейный интеграл

$$A = \int\limits_L yx\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} y = 3x \\ y' = 3 \\ 0 \le x \le 1 \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \left(3x^2 + 6x\right)\mathrm{d}x = \left(3\cdot\frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1 + 3 = 4.$$

Проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;3)$ параболе соответствует уравнение $y = 3x^2$. Вычислим работу силы по участку этой параболы:

$$A = \int\limits_L yx\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} y = 3x^2 \\ y' = 6x \\ 0 \le x \le 1 \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \left(3x^3 + 12x^2\right)\mathrm{d}x = \left(3\cdot\frac{x^4}{4} + 12\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}.$$

4. Найти работу силы $\vec{F} = (yx-1)\vec{i} + \left(x^2 y\right)\vec{j}$ по дуге L_{AB} эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ из точки $A(1;0)$ в точку $B(0;2)$.

Решение. Перемещению из точки $A(1;0)$ в точку $B(0;2)$ соответствует изменение параметра от 0 до $\frac{\pi}{2}$: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Вычислим криволинейный интеграл по дуге эллипса:

$$A=\int\limits_{L_{AB}}(xy-1)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\begin{vmatrix}x=\cos t,\ x'=-\sin t\\ y=2\sin t,\ y'=2\cos t\\ 0\le t\le \pi/2\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(-2\sin^2 t\cos t+\sin t+4\sin t\cos^3 t\right)\mathrm{d}t=I_1+I_2+I_3,$$

$$I_1=-2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\ \mathrm{d}t=\left|\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin t\right|=-2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\ \mathrm{d}\sin t=-2\frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{\pi/2}=-\frac{2}{3},$$

$$I_2=\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\mathrm{d}t=-\cos t\big|_0^{\pi/2}=1,$$

$$I_3=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 t\sin t\ \mathrm{d}t=\left|\sin t\mathrm{d}t=-\mathrm{d}\cos t\right|=-4\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 t\ \mathrm{d}\cos t=-4\frac{\cos^4 t}{4}\bigg|_0^{\pi/2}=1.$$

Итак, работа силы по дуге эллипса

$$A=I_1+I_2+I_3=-\frac{2}{3}+1+1=\frac{4}{3}.$$

5. Исходя из определения, найти циркуляцию силы $\vec{F}=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ по контуру L пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=25$ и цилиндра $x^2+y^2=9, z>0$, обходимого против часовой стрелки.

Решение. Покажем, что контур L представляет собой окружность, и зададим ее параметрически:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x^2+y^2=9,\\ z>0;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}z^2=16,\\ x^2+y^2=9,\\ z>0;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}z=4,\\ x=3\cos t,\\ y=3\sin t,\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$$

Вычислим криволинейный интеграл по окружности, учитывая выражения для производных $x'=-3\sin t,\ y'=3\cos t,\ z'=0$:

$$\oint\limits_L z^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\left(-3\sin t\cdot 16 + 3\cos t\cdot 9\cos^2 t\right)\mathrm{d}t = -48\int\limits_0^{2\pi}\sin t\mathrm{d}t + 27\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 t\mathrm{d}t =$$

$$= 48\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\cos^3 t\,\mathrm{d}t = 0 + \int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}\sin t = \sin t\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Итак, циркуляция вектора силы по заданному контуру равна 0.

6. Решить задачу примера 5, используя теорему Стокса.

Решение. Как было показано, заданный контур L представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 9$, единичный вектор нормали к которой – $\vec{n}_0 = \vec{k}$. Найдем ротор вектора силы:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + 2x\vec{k}.$$

По теореме Стокса, циркуляцию вектора $\vec{F}$ по окружности L вычислим как поток его ротора через поверхность S круга, ограниченного этой окружностью. Получим двойной интеграл по кругу $x^2 + y^2 \le 9$, для вычисления которого удобно перейти в цилиндрическую систему координат:

$$\oint\limits_L z^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}z = \iint\limits_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}_0\mathrm{d}S = \iint\limits_S 2x(\vec{k}\cdot\vec{k})\mathrm{d}S = \iint\limits_S 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 3 \end{vmatrix} = 2\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^3\rho^2\mathrm{d}\rho = 2(\sin\varphi\Big|_0^{2\pi})\cdot\int\limits_0^3\rho^2\mathrm{d}\rho = 0.$$

Как и следовало ожидать, результат совпадает с полученным ранее.

7. Используя формулу Грина, вычислить интеграл $I = \oint\limits_{L_{ABC}} y^2\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(2;\,0)$, $B(2;\,2)$, $C(0;\,2)$.

Решение. Предложенный интеграл есть циркуляция вектора с координатами $P(x,y)=y^2, Q(x,y)=(x+y)^2$. Вычислим:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-2y=2x,$$

тогда по формуле Грина

$$I=\iint\limits_{\Delta_{ABC}} 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int\limits_0^2 x\mathrm{d}x\int\limits_{2-x}^2 \mathrm{d}y=2\int\limits_0^2 x(y\Big|_{2-x}^2)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{16}{3}.$$

8. С помощью криволинейного интеграла 2-го рода вычислить площадь области, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Решение. Площадь области D может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла по замкнутому контуру L, ограничивающему эту область, по формуле

$$S_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint\limits_L y\,\mathrm{d}x.$$

В данной задаче контур L образован двумя параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$, которые пересекаются в точках $O(0;0)$ и $A(1;1)$. Следовательно, искомый интеграл есть сумма двух интегралов:

$$S=-\oint\limits_L y\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{L1} y\,\mathrm{d}x-\int\limits_{L2} y\,\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

$$I_1=-\oint\limits_{L1} y\mathrm{d}x=\left|y=x^2\right|=-\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=-\frac{1}{3},$$

$$I_2=-\oint\limits_{L2} y\mathrm{d}x=\left|y=\sqrt{x}\right|=-\int\limits_1^0 \sqrt{x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^0=\frac{2}{3}.$$

Итак, площадь S равна $\frac{1}{3}$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x-3z)\vec{i}+(x+2y+z)\vec{j}+(4x+y)\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x+y+z=2$, расположенную в 1-м октанте.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}-x\vec{k}$ через верхнюю сторону плоскости $2x+2y+z=1$, вырезаемую координатными плоскостями.

3. Используя теорему Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

4. Используя теорему Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+3z\vec{k}$ через внешнюю сторону сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$.

5. Вычислить работу, совершаемую силой $\vec{F}=x^2\vec{i}+2x^2y\vec{j}$ на пути, соединяющем точки *A* и *B* по ломаной *AOB*, если $A(3;\,0)$, $O(0;\,0)$ и $B(2;\,1)$.

6. Вычислить работу, совершаемую силой $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ на отрезке кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(0;\,0)$ до точки $B(1;\,1)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$ на отрезке прямой от точки $A(1;\,-1;\,0)$ до точки $B(3;\,2;\,2)$.

8. Найти работу силы $\vec{F}=y^2\vec{i}+xy\vec{j}$ по дуге эллипса $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ при $0\le t\le\pi$.

9. Исходя из определения, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=-y\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ по линии *L* пересечения конуса $x^2+y^2-z^2=0$ с плоскостью $z=1$, обходимой в положительном направлении орта $\vec{k}$.

10. Исходя из определения, найти циркуляцию силы $\vec{F}=y\vec{i}-x^2\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ по кривой *L* пересечения цилиндра $x^2+y^2=4$ с плоскостью $z=x+y$.

11. Используя теорему Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ по линии L пересечения конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ с плоскостью $z = 1$, обходимой в положительном направлении орта $\vec{k}$.

12. Используя теорему Стокса, найти циркуляцию силы $\vec{F} = y\vec{i} - x^2\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ по кривой L пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $z = x + y$.

13. Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_L (-x^2 y)\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

14. Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_L (x + y)\mathrm{d}x - (x - y)\mathrm{d}y$, где L – эллипс $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и прямой $y = x$.

16. Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с помощью формулы Грина.

17. Показать, что выражение $\mathrm{d}u = (x + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

18. Найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу $\mathrm{d}u = 4(x^2 - y^2)(x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y)$.

19. Показать, что поле $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ является потенциальным и не является соленоидальным. Найти потенциал поля.

20. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = x^2 z\vec{i} + y^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$ гармоническим.

Ответы

1) $\frac{28}{3}$. 2) $\frac{13}{96}$. 3) $\frac{12}{5}\pi R^5$. 4) $4\pi R^3$. 5) $\frac{77}{3}$. 6) $\frac{4}{3}$. 7) $\frac{31}{2}$. 8) $-\frac{2}{3}ab^2$.

9) π. 10) -4π. 11) π. 12) -4π. 13) $\frac{1}{2}\pi R^4$. 14) -48π. 15) $\frac{9}{2}$. 16) πab.

17) $u = \frac{x^2}{2} + x\mathrm{e}^y + C$. 18) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 + C$. 19) $u = x^2y - y^2 + xz + C$.

20) Не является.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

**ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА**

Руководство к решению задач
для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Составители:
ГЛИНСКАЯ Евгения Алексеевна
МЕЛЕШКО Алексей Николаевич

Редактор *Т. А. Зезюльчик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 08.05.2014. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 1,36. Тираж 100. Заказ 670.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.