



*The mathematical model for simulation of process of the shrinkage porosity formation in castings, taking into account the flows convection in crystallizing metal, is offered. The numerical simulation of the temperatures fields and metal density in the process of its crystallization is carried out.*

А. Н. ЧИЧКО, С. Г. ЛИХОУЗОВ, В. Ф. СОБОЛЕВ, О. А. САЧЕК,  
Т. В. МАТЮШИНЕЦ, О. И. ЧИЧКО, БНТУ

УДК 621.74

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСАДОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ СТАЛИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И ФУРЬЕ–КИРХГОФА

Известно, что пористость – это следствие усадочных дефектов, образующихся при затвердевании в сплавах с объемной фазовой усадкой. Образование пористости связано с совместным протеканием процессов кристаллизации и течения расплавов в отливке. Известно, что образование пористости связано с недостатком давления в двух фазных зонах кристаллизации и усадкой. В данной статье рассматриваются два вида пористости: рассеянная и сосредоточенная.

Классическим методом определения пористости в сплаве являются уравнения, связывающие равенства гидравлической ( $V_r$ ) и усадочной ( $V_y$ ) скорости [1, 2]:

$$\frac{dy}{d\tau} = V_y = V_r. \quad (1)$$

В классических расчетах используется такая степень упрощения, которая не позволяет определять пористость в отливках сложной конфигурации. При этом предполагают, что объект является плоской отливкой. В этом случае вводят высоту  $H$  и толщину  $2R$  отливки, соединяя их через закон квадратного корня. При этом скорость усадки рассчитывается следующим образом [1]:

$$V_y = \frac{dh}{d\tau} = \frac{\alpha HK^2}{2(R-r)r}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент усадки при затвердевании;  $K$  – коэффициент затвердевания.

Используя целый ряд допущений, размеры образуемой пористости  $r$  определяем по формуле:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\alpha\eta K^2 H^2}{2(P_a + \rho g H)R}}, \quad (3)$$

где  $P_a$ ,  $\rho g H$  – соответственно атмосферное и гидростатическое давление;  $\eta$  – вязкость.

В порядке критического анализа отметим, что формула применима только к идеальной плоской отливке и зависит от эмпирического коэффициента затвердевания, который в данном случае не просто определять. При этом радиус поры является идеальным и его положение может существенно отличаться от реального. В то же время остается нерешенным главный вопрос, касающийся пространственного распределения пористости в отливке.

Развитие математического моделирования и компьютерных технологий открывает новые возможности в решении задач, связанных с объемной усадкой сплавов, кристаллизующихся в сложных пространственных формах, в которых трудно заранее найти пространственное распределение в пористости.

В данной работе развивается метод моделирования пористости, основанный на совместном решении уравнений теплопроводности и Навье–Стокса, позволяющих рассчитать динамику кристаллизующегося металла при кристаллизации и учесть перемешивание холодных и горячих гидродинамических потоков металла в областях, где формируется пористость отливки. Для математического описания конвекции тепловых потоков в кристаллизующемся металле использована система уравнений Навье–Стокса [3, 4]:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= \rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial x} + U \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Система (4) дополнена уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0, \quad (5)$$

где  $V, U, W$  – соответственно проекции скорости на оси  $X, Y, Z$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho$  и  $\eta$  – плотность и динамическая вязкость жидкости (расплава);  $t$  – время;  $P$  – давление в рассматриваемой точке потока.

Процесс кристаллизации моделировали на основе уравнения теплообмена Фурье-Кирхгофа:

$$\begin{aligned} c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} + U \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \\ \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q(x, y, z, T). \end{aligned} \quad (6)$$

Теплообмен на поверхности твердого тела с жидкостью описывали как:

$$\alpha \Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (7)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости (расплава);  $q(x, y, z, T)$  – функция, учитывающая теплоту кристаллизации;  $t$  – время;  $T$  – температура в рассматриваемой точке потока ( $x, y, z$ );  $\lambda$  и  $c$  – теплопроводность и теплоемкость расплава;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на граничной поверхности металл-форма.

Важным этапом вычислений является определение начальных и граничных условий (краевые условия). Чтобы не нарушать единообразия вычислений и не применять особые формулы для граничных ячеек, вдоль всех границ вводятся слои фиктивных ячеек, значения параметров в которых определяются типом границы. Число таких слоев определяется типом границы и порядком разностного уравнения (для первого порядка, например, один слой и т. д.). Введем следующие обозначения областей рассчитываемых сеточных пространств, участвующих в процессе моделирования:  $\Omega_1$  – жидкий металл;  $\Omega_2$  – форма или закристаллизовавшийся металл;  $\Omega_3$  – воздух;  $\Omega_4$  – ось симметрии;  $\Omega_5$  – источник ( $\rho(\Omega_5) = \text{const}$ ;  $T(\Omega_5) = \text{const}$ );  $\Omega_6$  – граница первого рода ( $T(\Omega_6) = \text{const}$ ).

В методе использованы следующие начальные условия для  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} V_x(\Omega_1) = 0; V_y(\Omega_1) = 0; V_z(\Omega_1) = 0; \rho(\Omega_1) = \rho_0(\Omega_1); P(\Omega_1) = 0; T(\Omega_1) = T_{\text{зал}}, \\ V_x(\Omega_2) = 0; V_y(\Omega_2) = 0; V_z(\Omega_2) = 0; \rho(\Omega_2) = \rho_0(\Omega_2); P(\Omega_2) = 0; T(\Omega_2) = T_2, \\ V_x(\Omega_3) = 0; V_y(\Omega_3) = 0; V_z(\Omega_3) = 0; \rho(\Omega_3) = \rho_0(\Omega_3); P(\Omega_3) = 0; T(\Omega_3) = T_3, \\ V_x(\Omega_4) = 0; V_y(\Omega_4) = 0; V_z(\Omega_4) = 0; \rho(\Omega_4) = \rho_0(\Omega_1); P(\Omega_4) = 0; T(\Omega_4) = T(\Omega_1), \\ V_x(\Omega_5) = 0; V_y(\Omega_5) = 0; V_z(\Omega_5) = 0; \rho(\Omega_5) = \rho_0(\Omega_1); P(\Omega_5) = 0; T(\Omega_5) = T_{\text{зал}}, \\ V_x(\Omega_6) = 0; V_y(\Omega_6) = 0; V_z(\Omega_6) = 0; \rho(\Omega_6) = \rho_0(\Omega_2); P(\Omega_6) = 0; T(\Omega_6) = T_6. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $t \neq 0$  используются граничные условия:

$$\begin{aligned} V_x(\Omega_1) = V_x(\Omega_{1n}); V_y(\Omega_1) = V_y(\Omega_{1n}); V_z(\Omega_1) = V_z(\Omega_{1n}); \rho(\Omega_1) = \rho(\Omega_{1n}); P(\Omega_1) = P(\Omega_{1n}); T(\Omega_1) = T(\Omega_{1n}); \\ V_x(\Omega_2) = 0; V_y(\Omega_2) = 0; V_z(\Omega_2) = 0; \rho(\Omega_2) = \rho_0(\Omega_2); P(\Omega_2) = P(\Omega_1); T(\Omega_2) = T(\Omega_{2n}); \\ V_x(\Omega_3) = V_x(\Omega_1); V_y(\Omega_3) = V_y(\Omega_1); V_z(\Omega_3) = V_z(\Omega_1); \rho(\Omega_3) = \rho(\Omega_{3n}); P(\Omega_3) = 0; T(\Omega_3) = T(\Omega_{3n}), \\ V_x(\Omega_4) = -V_x(\Omega_1); V_y(\Omega_4) = V_y(\Omega_1); V_z(\Omega_4) = V_z(\Omega_1); \rho(\Omega_4) = \rho(\Omega_1); P(\Omega_4) = P(\Omega_1); T(\Omega_4) = T(\Omega_1); \end{aligned}$$

если граница перпендикулярна оси  $X$

$$V_x(\Omega_4) = V_x(\Omega_1); V_y(\Omega_4) = -V_y(\Omega_1); V_z(\Omega_4) = V_z(\Omega_1); \rho(\Omega_4) = \rho(\Omega_1); P(\Omega_4) = P(\Omega_1); T(\Omega_4) = T(\Omega_1);$$

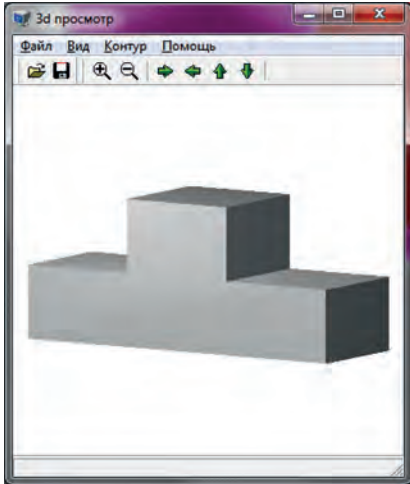


Рис. 1. Трехмерная модель исследуемой отливки

если граница перпендикулярна оси  $Y$

$$V_x(\Omega_4) = V_x(\Omega_1); V_y(\Omega_4) = V_y(\Omega_1); V_z(\Omega_4) = -V_z(\Omega_1); \rho(\Omega_4) = \rho(\Omega_1), \\ P(\Omega_4) = P(\Omega_1); T(\Omega_4) = T(\Omega_1);$$

если граница перпендикулярна оси  $Z$

$$V_x(\Omega_5) = V_x(\Omega_{5n}); V_y(\Omega_5) = V_y(\Omega_{5n}); V_z(\Omega_5) = V_z(\Omega_{5n}); \rho(\Omega_5) = \rho_0(\Omega_1), \\ P(\Omega_5) = 0; T(\Omega_5) = T_{\text{зал}}; V_x(\Omega_6) = 0; V_y(\Omega_6) = 0; V_z(\Omega_6) = 0, \\ \rho(\Omega_6) = \rho_0(\Omega_2); P(\Omega_6) = 0; T(\Omega_6) = T_6. \quad (9)$$

*Алгоритм для моделирования усадочной пористости*

Пространство моделирования представляет собой трехмерный массив ячеек с размерами  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  и координатами  $(i, j, k)$ , где  $i = 0, \dots, I$  – номер ячейки вдоль координатной оси  $X$ ,  $j = 0, \dots, J$  – номер ячейки вдоль координатной оси  $Y$ ,  $k = 0, \dots, K$  – номер ячейки вдоль координатной оси  $Z$ . Состояние каждой ячейки описывается величинами  $V_x, V_y, V_z, \rho, P, T, U_p$ .

*Шаг 0.* Устанавливаются начальные значения параметров состояния каждой ячейки в соответствии с конфигурацией отливки и начальными условиями. Время расчета  $t$  устанавливается в  $t_{\text{зап}}$ , а шаг расчета для течения жидкости определяется как шаг расчета для течения жидкости  $\tau_V = \tau_{V_{\text{зап}}}$ . Шаг расчета для теплообмена в  $k_T$  раз больше шага расчета для течения  $\tau_T = k_T \tau_V$ .

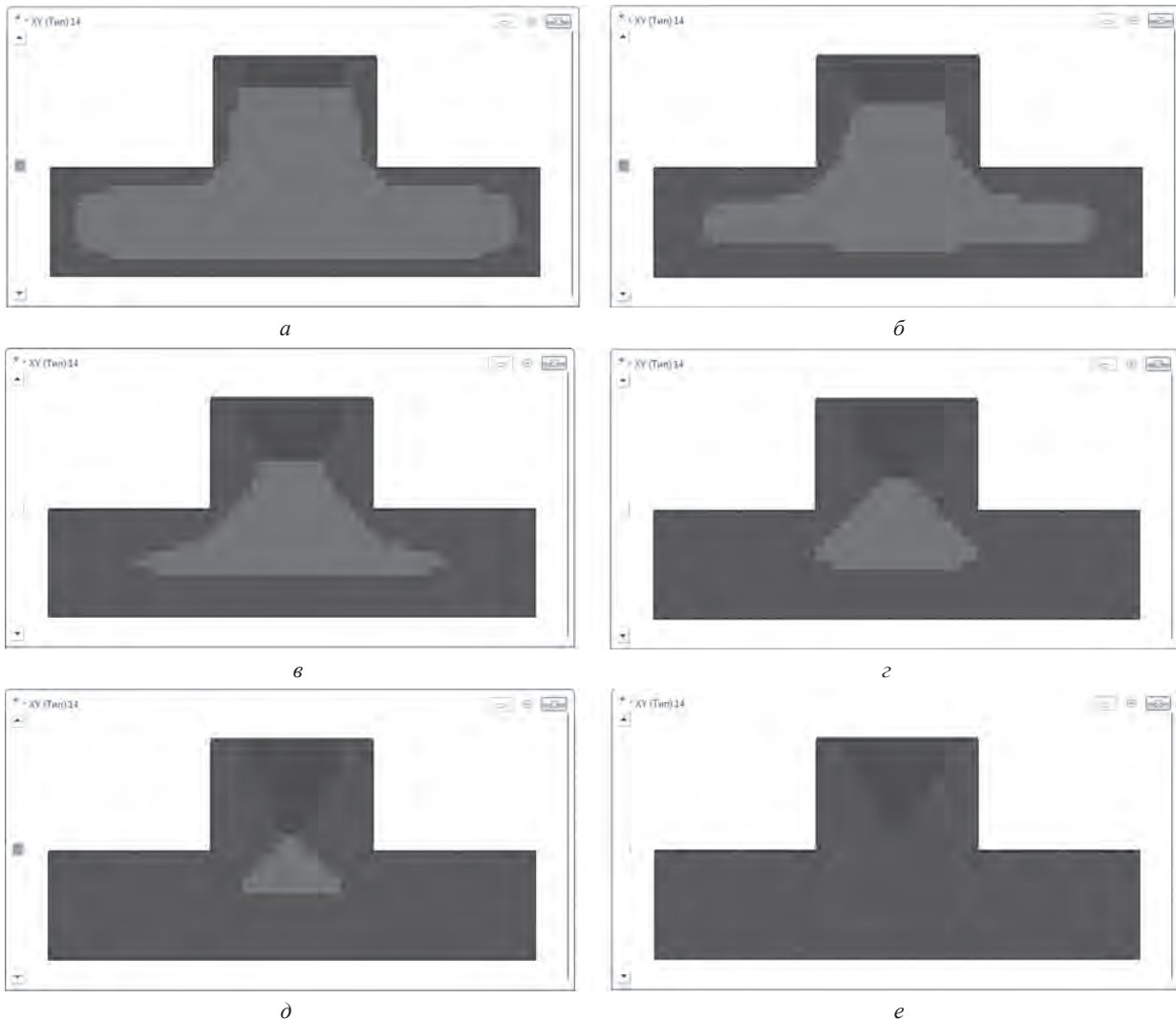


Рис. 2. Моделирование. Динамика заполнения исследуемой отливки (вариант А) для различных моментов времени: а – 30 с; б – 60; в – 90; г – 120; д – 150; е – 180 с

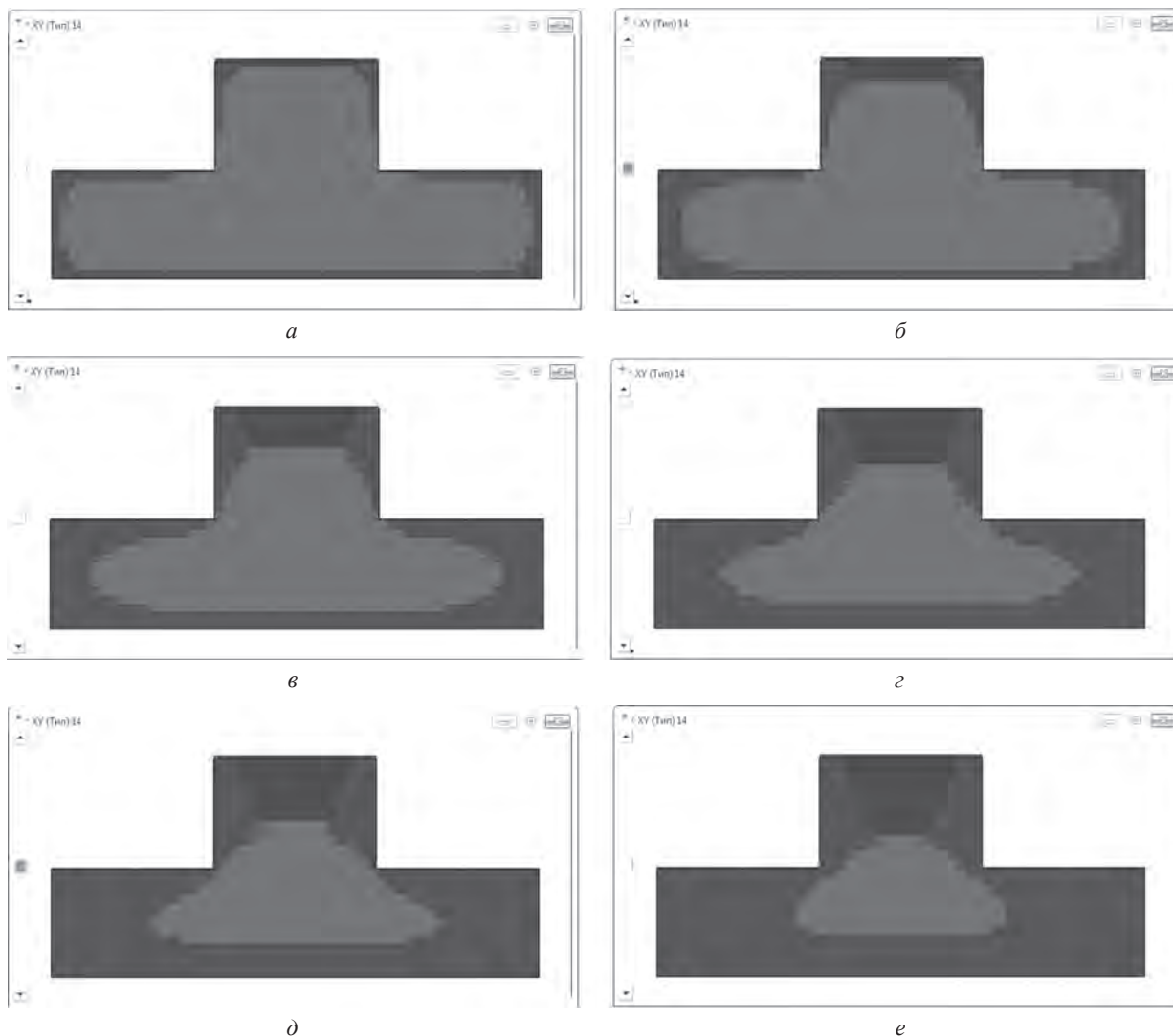


Рис. 3. Моделирование. Динамика заполнения исследуемой отливки (вариант Б) для различных моментов времени: а – 30 с; б – 60; в – 90; г – 120; д – 150; е – 180 с

*Шаг 1.* Для всего пространства расчета  $(0, \dots, I, 0, \dots, J, 0, \dots, K)$  выполняются следующие операции для вычисления процесса движения жидкости:

- вычисляются значения проекций скорости на оси координат  $V_x^{n+1}, V_y^{n+1}, V_z^{n+1}$ ;
- если существует ось симметрии, то происходит замена проекций скоростей в соответствии с граничными условиями;
- по формулам определяются перенос вещества и перераспределение проекций скоростей на оси координат  $V_x^{n+1}, V_y^{n+1}, V_z^{n+1}$  и температур  $T^{n+1}$  в ячейках;
- просматриваются все ячейки, в которых значение плотности достигло критического значения  $\rho_{кр}$ . Для этих ячеек изменяется тип ячейки с жидкости на воздух, что означает появление раковины;
- для новых значений плотностей в ячейках рассчитываются значения давлений в ячейках;
- если существует ось симметрии, то происходит замена проекций скоростей в соответствии с граничным условием.

*Шаг 2.* Если выполнено  $k_T$  расчетов для вычисления движения жидкости, для всего пространства расчета  $(0, \dots, I, 0, \dots, J, 0, \dots, K)$  выполняются следующие операции для вычисления теплообмена.

*Шаг 3.* Если вычисляется усадка вещества в процессе кристаллизации, корректируется значение плотности в клетке с учетом изменения температуры, а значит, процентного соотношения закристаллизованного вещества в этой клетке.

*Шаг 4.* Вычисляется значение усадочной пористости  $U_p$  в процентах.

*Шаг 5.* Значение времени расчета увеличивается  $t = t + \tau_V$ .

*Шаг 6.* Шаг расчета по времени для течения жидкости  $\tau_V$  определяется из критерия устойчивости для течения жидкости. Шаг расчета для теплообмена в  $k_T$  раз больше шага расчета для течения  $\tau_T = k_T \tau_V$ .

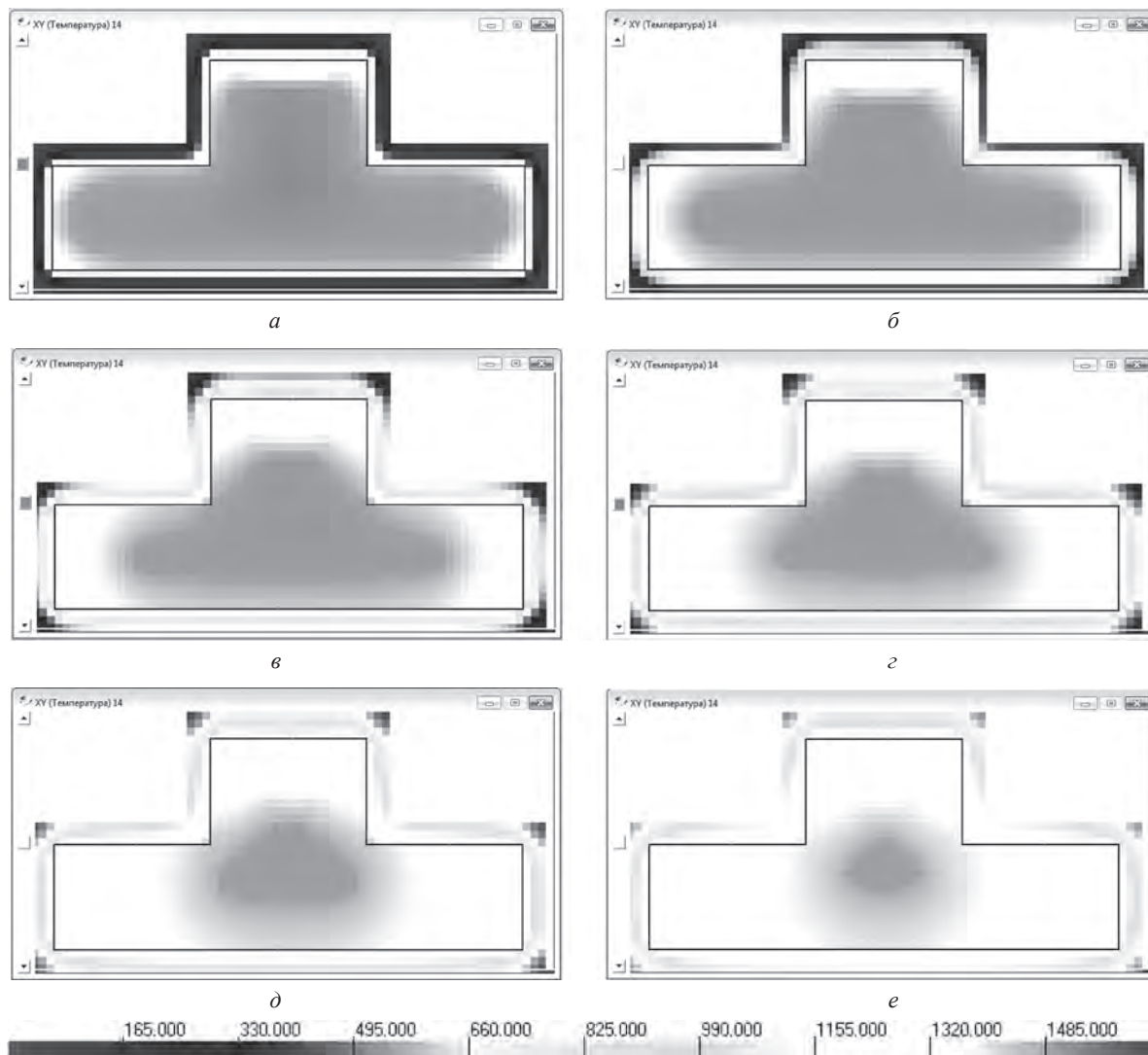


Рис. 4. Моделирование. Температурные поля исследуемой отливки (вариант А) для различных моментов времени: а – 30 с; б – 60; в – 90; г – 120; д – 150; е – 180 с

*Шаг 7.* Если в пространстве моделирования существуют области жидкости (не закристаллизовавшегося металла), то выполняется переход на *Шаг 1*, иначе конец расчета.

На основе представленного алгоритма было разработано программное обеспечение, на основе которого проводили моделирование распределения пористости в отливке (рис. 1).

Данный алгоритм был использован для решения задачи распределения пористости в отливке в приближении мгновенной заливки (все ячейки отливки в начальный момент времени были заполнены расплавом с одинаковыми значениями температуры).

В качестве расплава была использована сталь 20 ФЛ, имеющая следующий химический состав и характеристики:  $[C] = 0,14-0,25\%$ ;  $[Mn] = 0,7-1,2\%$ ;  $[Si] = 0,2-0,52\%$ ;  $T_{лик} = 1521\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $T_{сол} = 1487\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $T_{зал} = 1550\text{ }^{\circ}\text{C}$  (вариант А) и  $T_{зал} = 1650\text{ }^{\circ}\text{C}$  (вариант Б).

В качестве формы использовали песчаную смесь со следующими характеристиками: начальная температура  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; удельная теплоемкость  $c_2 = 120\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda_2 = 0,8\text{ Вт}/(\text{м}\cdot^{\circ}\text{C})$ ; плотность  $\rho_2 = 1600\text{ кг}/\text{м}^3$ .

В качестве модельной системы использовали 3d-отливку (рис. 1), которая была построена с помощью системы Solid Works.

#### Результаты моделирования

На рис. 2, 3 показана динамика заполнения (расчетные данные) исследуемой отливки для вариантов А и Б соответственно. Как видно из рисунков, в процессе заливки происходит усадка с образованием раковины в верхней части отливки, причем отливка в варианте А кристаллизуется быстрее. Так, на момент времени 180 с для варианта А произошла полная кристаллизация, тогда как для варианта Б имеется зна-

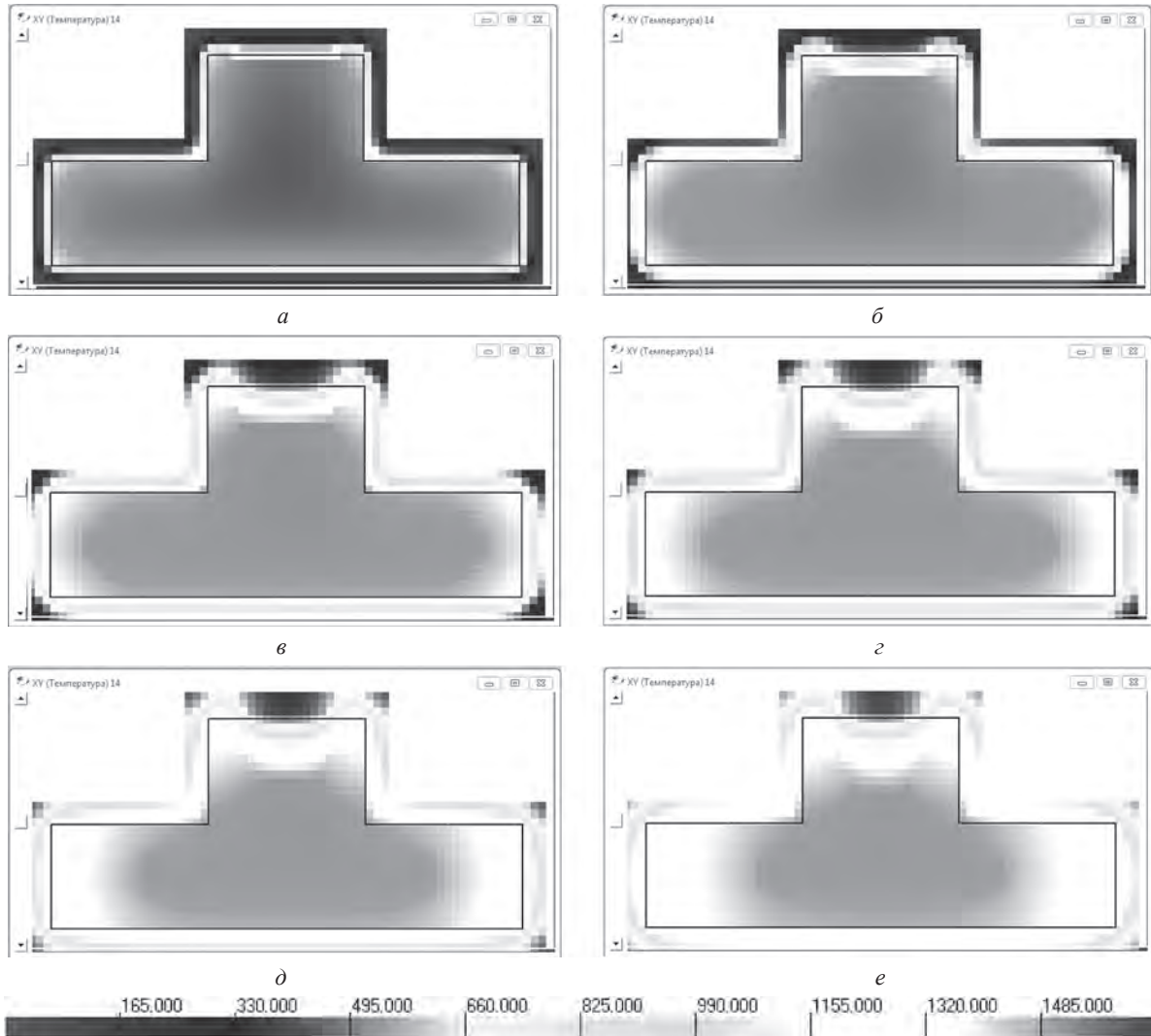


Рис. 5. Моделирование. Температурные поля исследуемой отливки (вариант *Б*) для различных моментов времени: *а* – 30 с; *б* – 60; *в* – 90; *г* – 120; *д* – 150; *е* – 180 с

чительный объем жидкого металла. Момент времени, соответствующий полной кристаллизации металла для варианта *Б*, составляет 290 с. Следует отметить, что для варианта *А* усадочная раковина является закрытой сверху слоем металла (рис. 2, *а*) в отличие от варианта *Б* (рис. 3, *а*).

На рис. 4, 5 представлены температурные поля исследуемой отливки для вариантов *А* и *Б* соответственно. Как видно из рисунков, центральная часть отливки является наиболее разогретой. Температуры граничных ячеек формы разогреты до больших значений для варианта *Б* по сравнению с вариантом *А*, что препятствует дальнейшему теплоотводу и обеспечивает более плавный ход кристаллизации для варианта *Б*.

На рис. 6 представлены трехмерные изображения усадочной раковины в верхней части отливки для двух вариантов *А* и *Б*, полученные с использованием компьютерного моделирования. Как видно из рисунков, усадочные раковины расположены в верхней части отливки. Однако геометрические формы дефектов отличаются, что связано с различным характером кристаллизации для рассматриваемых вариантов из-за различия начальных температурных условий мгновенной заливки.

На рис. 7 представлены поля плотностей исследуемой отливки для двух вариантов *А* и *Б*. Как видно из рисунка, кристаллизация отливки с начальной температурой 1550 °С проходит с образованием в наружной части отливки слоя с пониженной плотностью, который образуется в результате наличия высокой скорости кристаллизации, связанной с большой разностью температур между температурами отливки и формы. В то же время для варианта *Б* (начальная температура  $T = 1650$  °С) такого эффекта не наблюдается. Это связано с тем, что форма успевает прогреться к моменту начала кристаллизации и разность температур между отливкой и формой значительно ниже, чем для варианта *А*.

В результате моделирования кристаллизации с двумя вариантами начальной температуры металла 1550 и 1650 °С было установлено, что в теле отливки возникает усадочная раковина, причем для вариан-

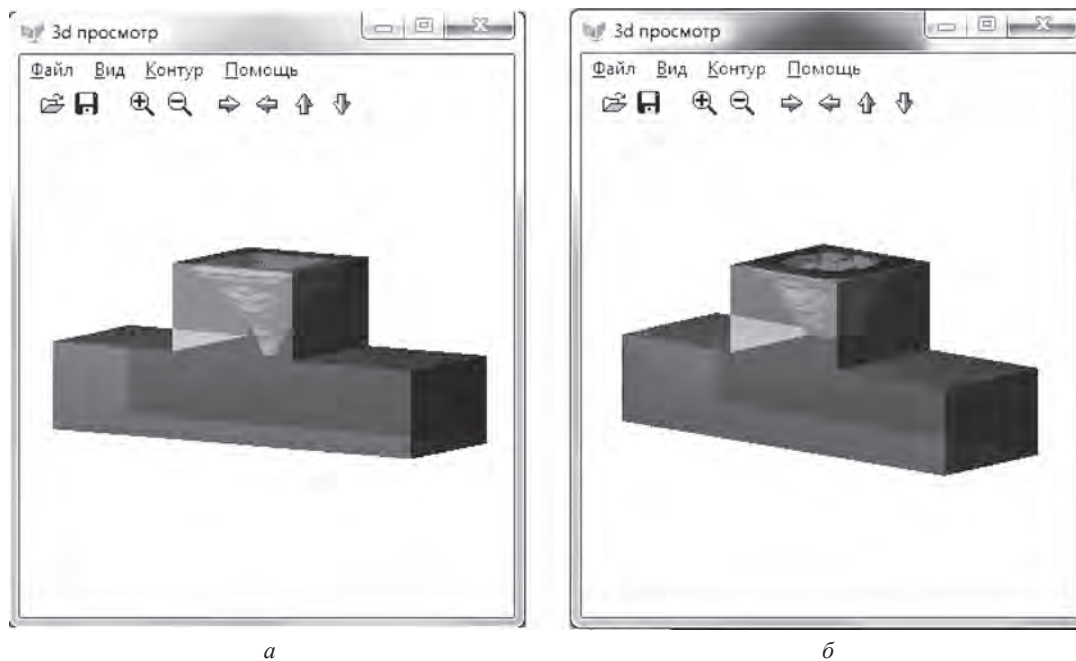


Рис. 6. Трехмерные изображения усадочной раковины в исследуемой отливке для двух вариантов: *a* – вариант *A*; *b* – вариант *B*

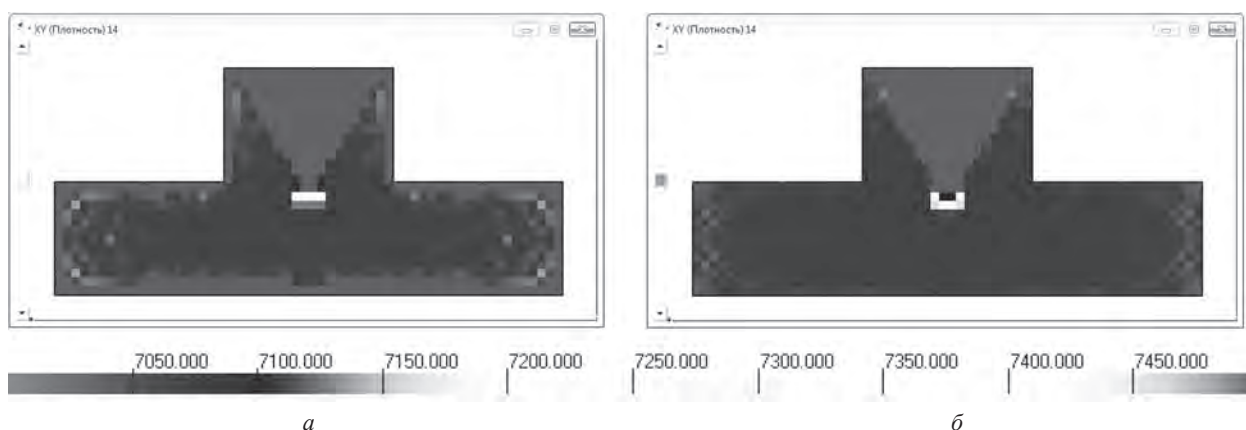


Рис. 7. Моделирование. Поля плотностей исследуемой отливки для двух вариантов: *a* – вариант *A*; *b* – вариант *B*

та *A* раковина является закрытой, в то время как для варианта *B* она открытая, что связано с более высокой скоростью кристаллизации поверхностного слоя.

### Выводы

Проведено моделирование усадочных процессов в стальной отливке без прибыли для различных режимов мгновенной заливки при изотропном отводе тепла с различной начальной температурой металла  $T = 1550, 1650$  °С. Показано, что в отливке образуется усадочная раковина значительного объема. Характер кристаллизации для двух вариантов температуры заливки различен. Для варианта с начальной температурой металла  $T = 1550$  °С раковина является закрытой, в то время как для варианта с начальной температурой металла  $T = 1650$  °С она открытая, что связано с более высокой скоростью кристаллизации поверхностного слоя.

### Литература

1. Гуляев В. Б. Теория литейных процессов / В. Б. Гуляев. Л.: Машиностроение, 1976.
2. Рыжиков А. А. Теоретические основы литейного производства / А. А. Рыжиков. М.: МАШГИЗ, 1951.
3. Чичко А. Н. Компьютерные системы моделирования физических процессов / А. Н. Чичко // Вестник БНТУ. 2003. № 2. С. 42–48.
4. Чичко А. Н. Компьютерное моделирование усадочной пористости отливок с различным подводом металла на основе уравнений Навье-Стокса / А. Н. Чичко, С. Г. Лихоузов, Ю. В. Яцкевич, О. И. Чичко // Литье и металлургия. 2003. № 2. С. 9–14.