https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195
УДК 539.3

К уточнению решения о действии сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство при произвольном коэффициенте Пуассона

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Ранее автором получено аналитическое решение для определения вертикальных перемещений грани однородного изотропного четвертьпространства, на которую действует вертикальная сосредоточенная сила. Это выражение давало точное решение для определения вертикальных перемещений грани четвертьпространства из несжимаемого материала и приближенное – при коэффициенте Пуассона, отличном от 0,5. Позднее в опубликованной статье С. В. Босакова и П. Д. Скачека «Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства» было показано, что, комбинируя решения для определения вертикальных перемещений четвертьпространства и полупространства от действия сосредоточенных сил, можно найти вертикальные перемещения для одной восьмой грани однородного изотропного пространства. Полученные выражения позволяют решать контактные задачи для неклассических областей в виде четвертьпространства и одной восьмой пространства. В настоящей статье автор приводит первое приближение для определения вертикальных перемещений грани четвертьпространства от действия вертикальной сосредоточенной силы, широко используя метод специальной аппроксимации, развитый в трудах В. М. Александрова и позволяющий успешно вычислять несобственные интегралы. Построенные графики показывают близкие результаты при определении перемещений с коэффициентом Пуассона, отличном от 0,5 и равном 0,5. Следует отметить, что указанный в статье С. В. Босакова и П. Д. Скачека подход может быть успешно использован при определении всех перемещений граней одной восьмой грани однородного изотропного пространства от действия сосредоточенных сил, касательных к грани четвертьпространства. Это даст возможность решать контактные задачи с учетом сил трения в контактной зоне балки или пластинки.

Ключевые слова: четвертьпространство, коэффициент Пуассона, решение Буссинеска, перемещения, сосредоточенная сила

Для цитирования: Босаков, С. В. К уточнению решения о действии сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство при произвольном коэффициенте Пуассона / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 191–195. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195

To Clarify Decision on Action of Concentrated Force to Elastic Quarter-Space for Arbitrary Poisson’s Ratio

S. V. Bosakov[1)]

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Previously, the author obtained an analytical solution for determining the vertical displacements of the homogeneous isotropic quarter-space face, which is affected by a vertical concentrated force. This expression gave an exact solution for determining the vertical displacements of a quarter-space face made of incompressible material and an approximate solution for a Poisson ratio different from 0.5. Later, in the published paper by S. V. Bosakov and P. D. Skachek “Action of Concentrated Force on 1/8 of Homogeneous Isotropic Space”, it was shown that by combining solutions for determining

Адрес для переписки
Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

Address for correspondence
Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

the vertical displacements of a quarter-space and a half-space from the action of concentrated forces, one can find vertical displacements for one-eighth face of a homogeneous isotropic space. The resulting expressions allow solving contact problems for non-classical domains in the form of a quarter of a space and one eighth of a space. Below, the author obtains the first approximation for displacements of a quarter-space face from the action of a vertical concentrated force. In this paper, the author gives the first approximation for determining the vertical displacements of a quarter-space face from the action of a vertical concentrated force, widely using the special approximation method developed in the works of V. M. Alexandrov and allowing to calculate successfully improper integrals. The constructed graphs show good results when determining displacements with a Poisson's ratio different from 0.5 and equal to 0.5. It should be noted that the approach indicated in the paper by S. V. Bosakov and P. D. Skachek can be successfully used in determining all displacements of the faces of one-eighth face of a homogeneous isotropic sharpened forces tangent to the edge of a quarter-space and this will allow to solve contact problems taking into account friction forces in the contact zone of the beam or plate.

Keywords: quarter-space, Poisson's ratio, Boussinesq decision, displacements, concentrated force

For citation: Bosakov S. V. (2022) To Clarify Decision on Action of Concentrated Force to Elastic Quarter-Space for Arbitrary Poisson's Ratio. *Science and Technique*. 21 (3), 191–195. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195 (in Russian)

В [1] на основании результатов Я. С. Уфлянда [2] получено точное выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредоточенной вертикальной силы в виде тройного несобственного интеграла. Надо отметить, что в научной литературе это выражение носит название задачи Хетени [3], который предложил вычислять ее методом наложения решений для полупространства. В [4, 5] делались попытки упростить полученное выражение для перемещений при произвольном коэффициенте Пуассона при решении задач расчета фундаментных конструкций на грунтовом основании вблизи откосов. Д. А. Пожарский [6] опубликовал монографию, где в интегральном виде приводятся формулы для перемещений границы упругого четвертьпространства от различно приложенных внешних сил.

Рассмотрим выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредоточенной вертикальной силы (рис. 1):

$$V(r,z)=\frac{2P\left(1-\nu^2\right)}{\pi^3 E}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2\pi\tau}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}-\tau^2}\times$$

$$\times L(\sigma,\tau,t)\,dt\,d\sigma\,d\tau; \qquad (1)$$

$$L(\sigma,\tau,t)=\frac{e^{-\sigma a}\cos\tau t\,K_{i\tau}(\sigma r)\cos\sigma z}{1+\frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}2t}\frac{4\tau\operatorname{th}(\pi\tau/4)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}-\tau^2}-\frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2 2t}\frac{4\operatorname{th}^2(\pi\tau/4)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}-\tau^2}};$$

$$\varepsilon=1-2\nu,$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона четвертьпространства; $K_{i\tau}(x)$ – функция Бесселя [7].

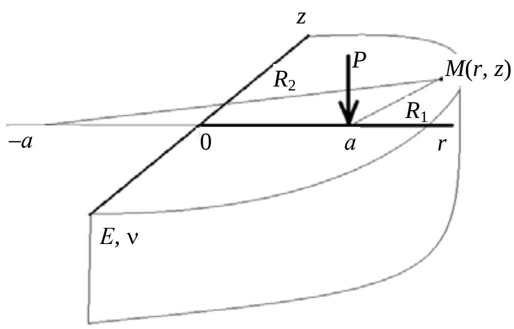

Рис. 1. Действие сосредоточенной силы на четвертьпространство

Fig. 1. Action of concentrated force on quarter-space

Рассмотрим

$$x=\frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}2t}\frac{4\tau\operatorname{th}\left(\pi\tau/4\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}-\tau^2}-\frac{\varepsilon^2}{\operatorname{ch}^2 2t}\frac{4\operatorname{th}^2\left(\pi\tau/4\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi\tau}{2}-\tau^2}<1$$

при любых $0\le t,\ \tau\le\infty$.

Принимаем разложения [7]:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots,\quad |x|\le 1;$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}2t}=1-2t^2+\frac{10}{3}t^4-\ldots;$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 2t}=1-4t^2+\frac{32}{3}t^4-\ldots.$$

Также представим:

$$\frac{\tau\operatorname{th}\left(\pi\tau/4\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\pi\tau/2\right)-\tau^2}\approx\frac{\pi}{\pi^2-4}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\pi/2\right)}; \qquad (2)$$

$$\frac{\operatorname{th}^2\left(\pi\tau/4\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\pi\tau/2\right)-\tau^2}\approx\frac{\pi^2}{4\pi^2-16}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\pi/2\right)}; \qquad (3)$$

$$\frac{4\mathrm{sh}^2(\pi\tau)}{\mathrm{sh}^2(\pi\tau/2)-\tau^2}=2(1+\mathrm{ch}\pi\tau)\times$$
$$\times\left(1+\frac{0,6815+2,4205\tau^2-0,8916\tau^4}{\mathrm{ch}\pi\tau}\right). \qquad (4)$$

Выражения (2)–(4) получены исходя из асимптотических свойств функций на нуле и бесконечности. Точность принятой аппроксимации можно оценить по рис. 2, 3.

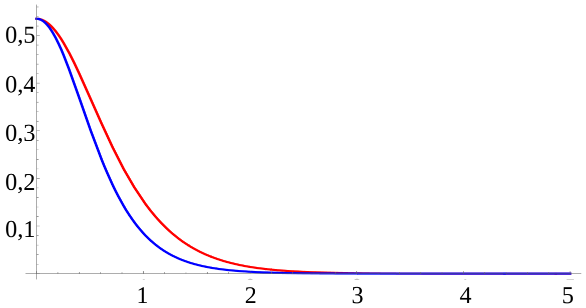

Рис. 2. Точность аппроксимации выражения (2)

Fig. 2. Expression approximation accuracy (2)

Подчеркнем, что наличие осциллирующих функций в (1) говорит о незначительном влиянии различий в значениях точных и аппроксимирующих выражений в (2) и (3). Точность аппроксимации (4) рассмотрена в [8].

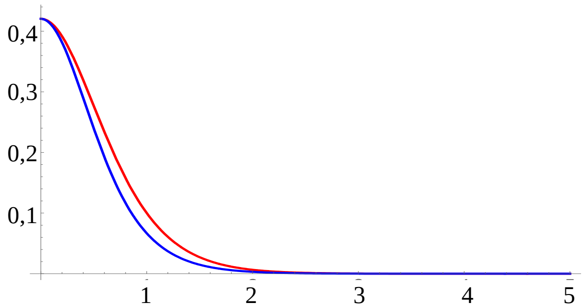

Рис. 3. Точность аппроксимации выражения (3)

Fig. 3. Expression approximation accuracy (3)

Используя принятые аппроксимации и опуская промежуточные вычисления, получаем:

$$L(\sigma,\ \tau,\ t)=1+\frac{A_0(\nu)}{\mathrm{ch}^2(\pi/2)}+\frac{A_2(\nu)}{\mathrm{ch}^2(\pi/2)}t^2+\ldots;$$
$$A_0(\nu)=1,68148\varepsilon^2-2,14092\varepsilon; \qquad (5)$$
$$A_2(\nu)=4,28185\varepsilon-6,72591\varepsilon^2;$$
$$\ldots\ .$$

Далее используем формулы интегралов [1, 8, 9]:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma a\,\mathrm{ch}t}\cos\tau t\,dt=K_{i\tau}(\sigma a);$$
$$\int_0^\infty \cos(\sigma z)K_{i\tau}(\sigma a)K_{i\tau}(\sigma r)d\sigma=\frac{\pi^2}{4\mathrm{ch}\pi\tau\sqrt{ar}}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu); \qquad (6)$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\beta\tau}{\mathrm{ch}\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=\frac{1}{\sqrt{2(\mathrm{ch}\mu+\cos\beta)}};$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau^2}{\mathrm{ch}\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(\mathrm{ch}\mu+1)^{3/2}};$$
$$\int_0^\infty \frac{\tau^4}{\mathrm{ch}\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=\frac{224-8\cos h[\mu](-12\cos h[\mu]+2(-22+2\cos h[2\mu]))}{128\sqrt{2}(1+\cos h[\mu])^{9/2}};$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\beta\tau}{\mathrm{ch}^2\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\mu-\cos\beta}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\mu-\cos\beta}{1+\cos\beta}};$$
$$\int_0^\infty \frac{\tau^2}{\mathrm{ch}^2\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\mu-1}-\frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{ch}\mu-1)^{3,2}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\mu-1}{2}}\right];$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau^4}{\mathrm{ch}^2\pi\tau}P_{i\tau-1/2}(\mathrm{ch}\mu)d\tau=-\left(\left(\mathrm{ch}^2\frac{\mu}{2}\left(58+64\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{sh}\frac{\mu}{2}\right]\sqrt{-1+\mathrm{ch}\,\mu}+\right.\right.\right.$$

$$+\left(47-72\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{sh}\frac{\mu}{2}\sqrt{-1+\mathrm{ch}\,\mu}\right)\right)\mathrm{ch}\,\mu+2\left(-5+4\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{sh}\frac{\mu}{2}\sqrt{-1+\mathrm{ch}\,\mu}\right)\right)\mathrm{ch}\,2\mu+$$

$$+\,\mathrm{ch}\,3\mu\Big)\mathrm{sh}^4\frac{\mu}{2}\Big)\Big/\left(4\pi\left(-1+\mathrm{ch}\,\mu\right)^{7/2}\left(1+\mathrm{ch}\,\mu\right)^{7/2}\right)\Big),$$

где $\mathrm{ch}\mu=\dfrac{a^2+r^2+z^2}{2ar}$; $P_{i\tau-1/2}\left(\mathrm{ch}\mu\right)$ – функция конуса [7].

В итоге получаем выражение для вертикальных перемещений грани четвертьпространства от вертикальной силы в следующем виде:

$$\frac{P\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1+a_0+a_0A_0}{R_2}+2a_0\frac{1+A_0}{\pi R_1}\mathrm{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ar}}+\left(a_2+a_2A_0\right)\frac{ar}{R_2^3}+\right.$$
$$+\frac{a_2\left(1+A_0\right)}{\pi R_1}\left(\frac{\sqrt{ar}}{R_1}-\frac{2ar}{R_1^3}\mathrm{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{ar}}\right)-a_4\left(1+A_0\right)\frac{ar}{R_2^5}\left(a^2-7ar+r^2+z^2\right)-\frac{a_4}{\sqrt{ar}}\left(1+A_0\right)\frac{(ar)^4}{32\pi R_1^3R_2^5}\times$$
$$\times\left(\frac{R_2^2}{a^3r^3}\left(a^4-12a^3r-12ar\left(r^2+z^2\right)+\left(r^2+z^2\right)^2+3a^2\left(35r^2+z^2\right)\right)\right)+ \qquad (7)$$
$$\left.+\frac{8R_1^3}{(ar)^{5/2}}\left(a^2-7ar+r^2+z^2\right)\mathrm{arctg}\frac{R_1}{2\sqrt{2ar}}\right].$$

Первое слагаемое в полученном выражении для перемещений (7) – это известное решение Буссинеска [10] для упругого однородного изотропного полупространства и является сингулярным. Также можно заметить, что наибольшее влияние на величины перемещений (7) учет коэффициента Пуассона оказывает вблизи ребра четвертьпространства, что подтверждают данные рис. 4, 5.

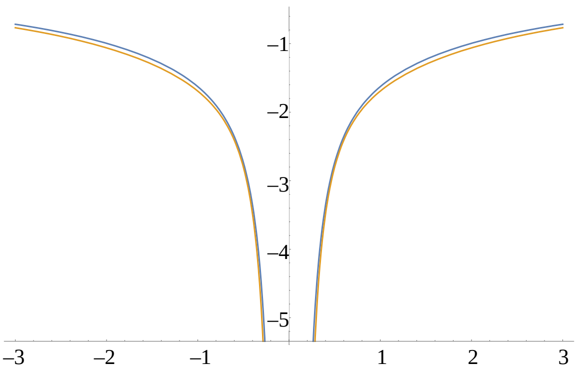

Рис. 4. Перемещения при ν = 0,5 (желтый цвет) и ν = 1/3 (синий цвет) вдоль оси z при $r = a = 1$

Fig. 4. Movements at ν = 0.5 (yellow) and ν = 1/3 (blue) along axis z at $r = a = 1$

В (7) перемещения ограничены на ребре четвертьпространства, на бесконечности стремятся к нулю, как $1/R_1$. Полученные результаты также дают возможность уточнить формулу перемещений грани 1/8 однородного изотропного пространства, опубликованной в [9].

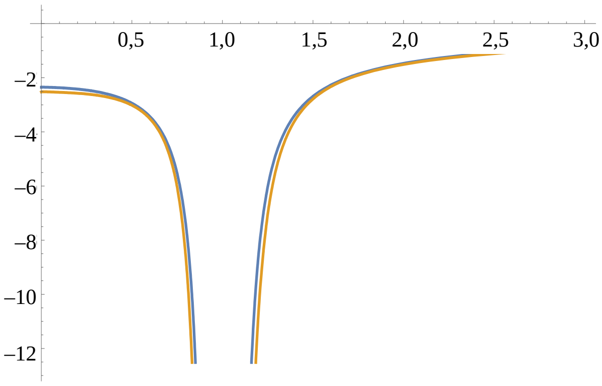

Рис. 5. Перемещения при $1/R_1$ (желтый цвет) и ν = 1/3 (синий цвет) вдоль оси R при z = 0

Fig. 5. Movements at $1/R_1$ (yellow) and ν = 1/3 (blue) along axis R at z = 0

ВЫВОД

Получено уточненное аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредоточенной вертикальной силы, справедливое при любых значениях коэффициента Пуассона. Следует отметить, что указанный подход при определении перемещений может быть использован в решении задачи о действии сосредоточенных сил, касательных к грани четвертьпространства. Это позволит решать контактные задачи с учетом сил трения в контактной зоне балки или пластинки. Полученные результаты также дают возможность уточнить формулу для определения вертикальных перемещений грани одной восьмой однородного изотропного пространства, ранее опубликованной в статье С. В. Босакова и П. Д. Скачека «Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства».

ЛИТЕРАТУРА

1. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С. В. Босаков // Теоретическая и прикладная механика: республиканский межведомственный сборник. Минск, 1988. Вып. 15. С. 100–108.
2. Уфлянд, Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина / Я. С. Уфлянд // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 549–553.
3. Heteny, M. A General Solution for the Elastic Quarter-spase / M. Heteny // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37, No 70. P. 75–80.
4. Босаков, С. В. Изгиб балок, расположенных вблизи откоса / С. В. Босаков, Н. М. Фомичева // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1988. № 2. С. 26–28.
5. Босаков, С. В. Расчет системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании / С. В. Босаков, С. Д. Семенюк // Материалы, технологии, инструменты. 2000. Т. 5, № 4. С. 17–20.
6. Пожарский, Д. А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения / Д. А. Пожарский. Ростов н/Д: ООО «ДГТУ-ПРИНТ», 2019. 306 с.
7. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1953. 1100 с.
8. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. М.–Л.: Наука, 1968. 402 с.
9. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачек // Наука и техника. 2020. Т. 19, № 5. С. 372–376. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376.
10. Александров, А. В. Теория упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.

Поступила 21.02.2022
Подписана в печать 26.04.2022
Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Bosakov S. V. (1988) The Action of a Concentrated Force on an Elastic Quarter-Space. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika: Respublikanskii Mezhvedomstvennyi Sbornik* [Theoretical and Applied Mechanics: Republican Interdepartmental Collection]. Minsk, (15), 100–108 (in Russian).
2. Uflyand Ya. S. (1972) Some Spatial Problems of Elasticity Theory for a Wedge. *Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis*. Moscow, Nauka Publ. 549–553 (in Russian).
3. Heteny M. (1970) A General Solution for the Elastic Quarterspase. *Journal of Applied Mechanics*, 37 (70), 75–80.
4. Bosakov S. V., Fomicheva N. M. (1988) Bending of Beams Located Near the Slope. *Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Gruntov = Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (2), 26–28 (in Russian).
5. Bosakov S. V., Semenyuk S. D. (2000) Calculation of a System of Cross Beams on an Elastic Wedge-Shaped Foundation. *Materialy, Tekhnologii, Instrumenty* [Materials, Technologies, Tools], 5 (4), 17–20 (in Russian).
6. Pozharsky D. A. (2019) *Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and their Applications*. Rostov-on-Don: Don State Technical University-PRINT. 306 (in Russian).
7. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. (1953) *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 1100 (in Russian).
8. Uflyand Ya. S. (1968) *Integral Transformations in Problems of Elasticity Theory*. Moscow–Leningrad, Nauka Publ. 402 (in Russian).
9. Bosakov S. V., Skachek P. D. (2020) Concentrated Force Action on 1/8 Homogeneous Isotropic Space. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 19 (5), 372–376. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376 (in Russian).
10. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).

Received: 21.02.2022
Accepted: 26.04.2022
Published online: 31.05.2022