

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Геотехника и строительная механика»

К. В. Юркова

ПРАКТИКУМ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
СТАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие
для студентов направления специальности
1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства
(строительство)» в рамках специальности 1-27 01 01
«Экономика и организация производства (по направлениям)»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области экономики и организации производства*

Минск
БНТУ
2022

УДК 624.072.2.04 (075.8)

ББК 38.112я7

Ю75

Р е ц е н з е н т ы:

главный научный сотрудник РУП «БелНИИС»,
доктор техн. наук, профессор *С. В. Босаков*;
кафедра «Архитектура и строительство»
Белорусского государственного университета транспорта
(зав. каф., доктор архитектуры, профессор *И. Г. Малков*)

Юркова, К. В.

Ю75 Практикум по технической механике. Статические расчеты стержневых систем : учебно-методическое пособие для студентов направления специальности 1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства (строительство)» в рамках специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направлениям)» / К. В. Юркова. – Минск : БНТУ, 2022. – 111 с.
ISBN 978-985-583-451-0.

В учебно-методическом пособии кратко изложены основные сведения о статических расчетах из разделов строительной механики. Показаны примеры решения задач по определению внутренних сил и перемещений в статически определимых балках, рамах и фермах. Даны теоретические основы и практические рекомендации по расчету статически неопределимых стержневых систем по методу сил и методу перемещений.

Пособие может служить руководством к практическим занятиям по дисциплинам «Техническая механика» и «Строительная механика» для студентов строительных специальностей.

УДК 624.072.2.04 (075.8)

ББК 38.112я7

ISBN 978-985-583-451-0

© Юркова К. В., 2022

© Белорусский национальный
технический университет, 2022

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие является непосредственным продолжением учебного пособия «Техническая механика: практикум» для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направлениям)», содержащего базовые понятия из разделов теоретической механики и сопротивления материалов. Сведения, содержащиеся в первой части пособия (разделы 1, 2 и 3), ориентированы на изучение теоретических основ механики и на применение их при решении простейших задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость элементов сооружений.

В учебно-методическом пособии «Практикум по технической механике. Статические расчеты стержневых систем» нумерация разделов продолжается: в разделе 4 изложены алгоритмы и практические приемы по определению внутренних сил и перемещений методами строительной механики для других, более сложных видов статически определимых плоских стержневых систем: ферм, составных балок и рам; в разделе 5 освещаются основные классические методы расчета статически неопределимых рам.

Как показывает работа со студентами, основной проблемой при освоении курса технической механики является применение полученных теоретических знаний при решении конкретных инженерных задач. Поэтому логически структура пособия выстроена так, чтобы необходимые сведения из теории подкреплялись практическими примерами расчета. Решения типовых задач сопровождаются всеми необходимыми комментариями и указаниями, в том числе и некоторыми сведениями из алгебры и геометрии, которые порой вызывают затруднения при расчетах «вручную». Условия задач подобраны таким образом, чтобы показать различные особенности и частные случаи, возникающие при расчете стержневых плоских систем.

Пособие будет полезным также для студентов строительной и архитектурной специальностей, в том числе обучающихся заочно.

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

4.1. Общие сведения о статически определимых системах

Статически определимыми (СО) называют геометрически неизменяемые стержневые системы, которые не имеют «лишних» связей. Под «лишними» связями, понимаются такие связи (соединяющие диски системы между собой или с основанием), удаление которых из системы не обращает ее в механизм, подвижную систему. Количественно, как было указано во второй части пособия, степень статической неопределимости можно оценить, подсчитав степень ее свободы W . Для статически определимых систем степень свободы является нулевой ($W = 0$). Можно сказать, что статически определимые системы занимают промежуточное, «критическое», состояние между системами статически неопределимыми и геометрически изменяемыми. Удаление хотя бы одной связи у СО системы обращает ее в ГИ систему, а любая «лишняя» связь делает из системы статически определимой систему *статически неопределимую*.

Статическая определимость системы означает, что для определения опорных реакций и внутренних усилий в ней достаточно использовать только статические уравнения (уравнения равновесия), в отличие от статически неопределимой системы, для расчета которой уравнений статики недостаточно. Для определения усилий в «лишних» связях необходимы дополнительные уравнения (по количеству неизвестных), что делает расчет статически неопределимых систем более трудоемким. В методе сил, например, в качестве таких дополнительных уравнений записываются уравнения совместности деформаций системы.

Еще одним важным свойством статически определимых систем является независимость распределения усилий в них от свойств материала и геометрических характеристик поперечных сечений их элементов.

В статически определимых системах температурные и кинематические воздействия, неточности при монтаже не вызывают появления дополнительных усилий в элементах системы.

В зависимости от характера работы под нагрузкой различают статически определимые:

- балки (стержни, которые преимущественно испытывают поперечный или чистый изгиб);
- рамы (стрелневые системы, которые испытывают деформации не только изгиба, но и центрального сжатия / растяжения);
- арки (в таких системах стержни криволинейного очертания испытывают изгиб вместе с внецентренным сжатием);
- фермы (их элементы работают в условиях центрального сжатия / растяжения);
- комбинированные системы.

4.2. Виды статически определимых балок. Понятие о расчете многопролетных балок

Статически определимые балки бывают следующих видов:

- *консольные балки (консоли)* – балки, защемленные одним концом (пример расчета продемонстрирован на примере задачи 3.10*);
- *простые балки* – балки на двух опорах по концам (см. задачу 3.11*);
- *простые балки с консолями* – балки на двух опорах с выступающими за них консолями (см. задачи 3.12 и 3.13*);
- *многопролетные, или составные, балки* – системы, состоящие из двух и более простых или консольных балок, последовательно соединенных между собой шарнирами (рис. 4.1).

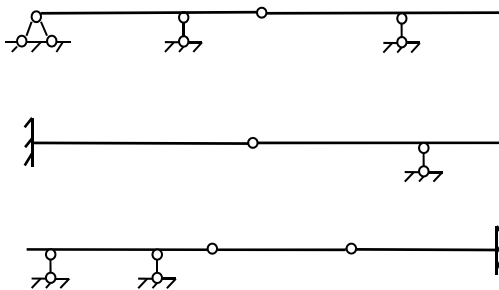


Рис. 4.1

При ручном, не автоматизированном, расчете многопролетных балок удобно использовать методику, суть которой состоит в разде-

* Решение задач 3.10–3.13 подробно изложено в первой части пособия [1].

лении сложных, составных балок на ряд простых, которые могут быть легко рассчитаны по отдельности, но с учетом их взаимодействия между собой в составе многопролетной балки. Кинематический анализ (см. раздел 2 [1]) позволяет выявить *главные* (могут самостоятельно нести внешнюю нагрузку) и *второстепенные* (могут нести нагрузку только при опирании на главные) простые балки в составе сложной. Их взаимодействие удобно показывать в виде так называемых *этажных схем*.

На этажной схеме все главные балки изображаются на нижнем этаже, так как они являются «самодостаточными» в плане геометрической неизменяемости. Второстепенные балки изображаются этажом выше, причем шарнир, прикрепляющий второстепенную балку к главной, заменяется эквивалентной ему опорной связью – *шарнирно-неподвижной опорой*. Опорные реакции в таких опорах второстепенных балок являются внешними силами для той главной балки, к которой примыкает второстепенная.

Таким образом, расчет многопролетных балок можно вести по следующему алгоритму:

1. Определяется степень свободы системы.

2. Анализируется геометрическая неизменяемость системы. Для того, чтобы понять, какая из балок является главной, а какая второстепенной, можно использовать следующий практический прием. Мысленно вырезаются шарниры, соединяющие отдельные элементы балки. Образующиеся при этом главные и второстепенные части могут быть следующих типов: *главные* и *второстепенные* (рис. 4.2).

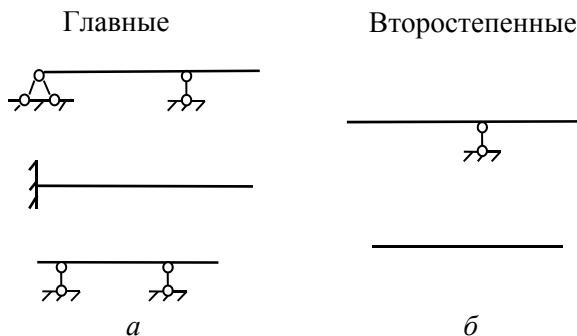


Рис. 4.2

3. Строится схема взаимодействия элементов многопролетной балки, то есть этажная схема (рис. 4.3).

Замечание: допускается одну из «лишних» опорных связей второстепенной балки перенести в ту опору главной балки, где ее не хватает для обеспечения геометрической неизменяемости, при условии, что геометрическая неизменяемость всей балки обеспечена (например, рис. 4.3).

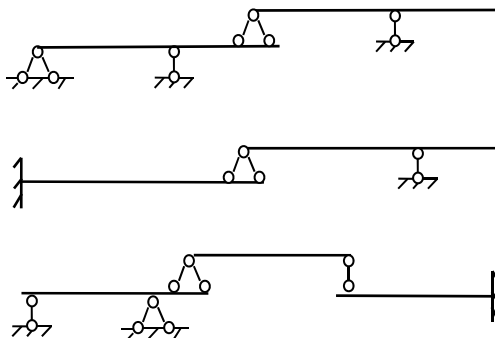


Рис. 4.3

4. Определение опорных реакций и внутренних усилий начинается со второстепенной балки самого верхнего этажа. Строятся эпюры изгибающихся моментов и поперечных сил для этой балки. Реакции опор передаются на нижележащую балку с обратным направлением. Далее расчет повторяется, но уже для нижележащих балок. Переход от балки к балке осуществляется в направлении «сверху-вниз» по этажной схеме. Последними рассчитываются главные балки самого нижнего этажа.

5. Построенные для отдельных балок эпюры объединяются в одном масштабе под всей многопролетной балкой. Полученный результат анализируется. Дифференциальные зависимости между изгибающимися моментами и поперечными силами на эпюрах обязательно должны соблюдаться.

Продемонстрируем указанный подход на примерах.

Задача 4.1. Для многопролетной балки, изображенной на рис. 4.4, построить эпюры внутренних сил.

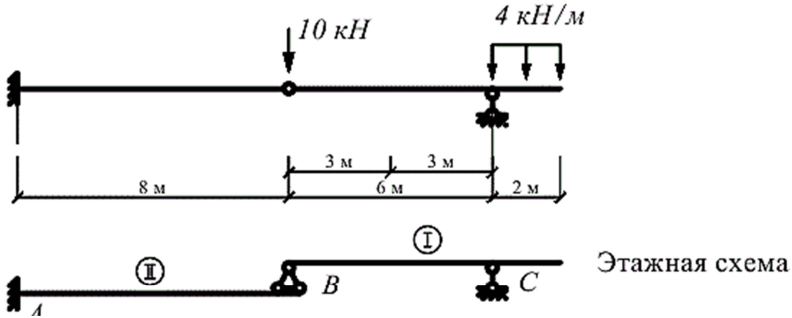


Рис. 4.4

Решение:

1. Степень свободы

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - (1 + 3) = 0.$$

2. Заданная балка состоит из двух частей, соединенных между собой шарниром. Мысленно удаляем этот шарнир. Стержень, находящийся слева от шарнира и защемленный в основании, является главной балкой. Стержень, находящийся справа от шарнира, опирается на основание только посредством шарнирно-подвижной опоры (стерженька). Второй точкой опоры должен служить шарнир *B*. Следовательно, правую часть назовем второстепенной балкой. Отообразим указанное взаимодействие в виде этажной схемы (рис. 4.4). На этой схеме римскими цифрами показан порядок расчета простых балок в составе сложной.

3. Расчет балки *I*. Определяем опорные реакции и находим внутренние силы в характерных сечениях (рис. 4.5, *a*):

$$\begin{cases} \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -V_C \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 7 = 0; \\ V_B \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_C = 9,33 \text{ кН}; \\ V_B = -1,33 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$Q_1 = 0 \text{ кН}; \quad Q_2 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кН}; \quad Q_3 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН};$$

$$M_1 = 4 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; \quad M_2 = -4 \cdot 1 \cdot 0,5 = -2 \text{ кНм}; \quad M_3 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кНм}.$$

$$Q_5 = Q_4 = -1,33 \text{ кН}; \quad M_5 = -1,33 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; \quad M_4 = -1,33 \cdot 6 = -8 \text{ кНм}.$$

Замечание: сосредоточенная сила в 10 кН, приложенная к шарниру B , может быть отнесена как к второстепенной балке, так и к главной. В примере эта сила учитывается при расчете балки II.

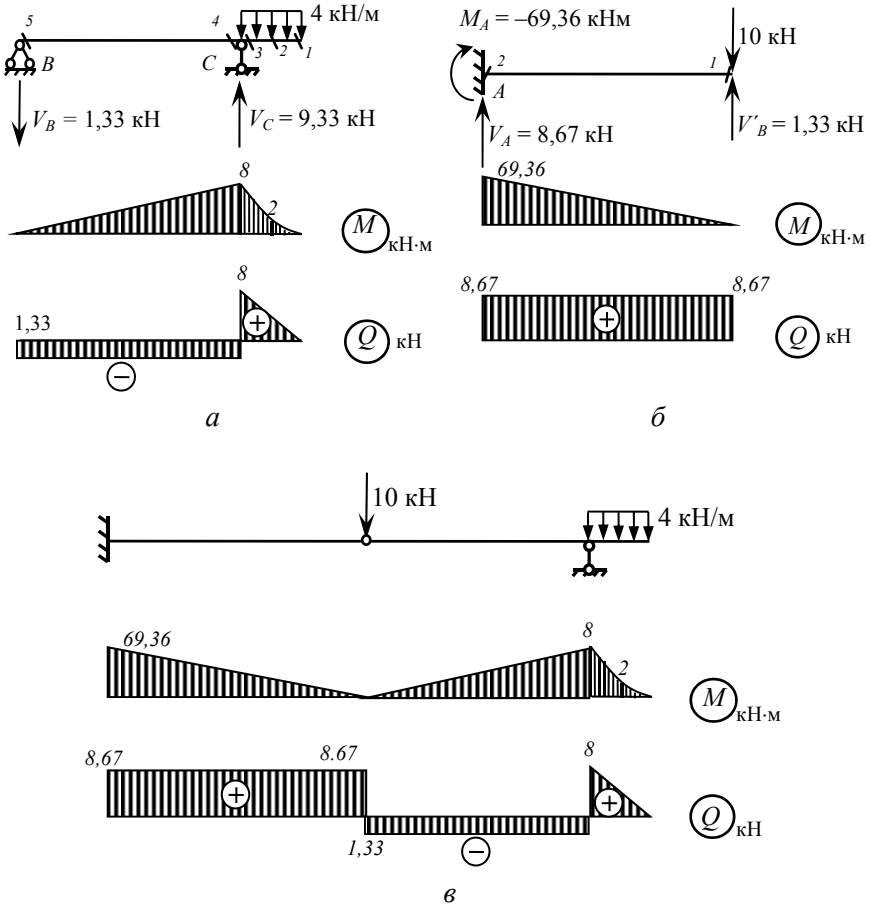


Рис. 4.5

Расчет балки II. Определяем опорные реакции и находим внутренние силы в характерных сечениях (рис. 4.5, б):

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum M_A = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10 + V_A + 1,33 = 0; \\ M_A - 1,33 \cdot 8 + 10 \cdot 8 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = 8,67 \text{ кН}; \\ M_A = -69,36 \text{ кНм}. \end{cases}$$

$Q_1 = 10 - 1,33 = 8,67 \text{ кН}; Q_2 = 8,67 \text{ кН};$
 $M_1 = -(10 - 1,33) \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; M_2 = -(10 - 1,33) \cdot 8 = -69,36 \text{ кНм}.$

4. Совмещаем построенные эпюры (рис. 4.5, в).

4.3. Виды статически определимых рам. Расчет консольных ломаных стержней

Статически определимые рамы, в отличие от балок, состоят из дисков, стержни которых могут соединяться в узлах жестко или шарнирно и располагаются в произвольном по отношению друг к другу направлении. Статически определимые плоские рамы могут быть поделены на следующие виды:

– *консольно защемленный ломаный стержень* – система жестко соединенных прямолинейных стержней, защемленных одним концом в основание (см. задачу 4.2);

– *простая рама* – стержневая система, крепящаяся к основанию при помощи шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор или трех шарнирно-подвижных опор (см. задачу 4.3);

– *трехшарнирная рама* – система из двух стержневых неизменяемых дисков, связанных между собой и основанием посредством простых шарниров (см. задачу 4.4);

– *составная рама* – система, состоящая из двух и более простых / консольных / трехшарнирных рам, взаимодействующих между собой в составе сложной системы (например, рис. 4.6).

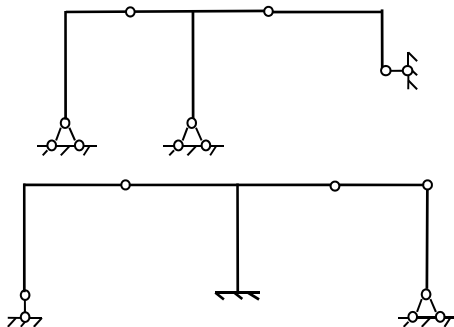


Рис. 4.6

При плоском поперечном изгибе в рамах возникают три составляющих внутренних усилий: продольная N и поперечная Q силы, изгибающий момент M .

Метод сечений для определения внутренних усилий в плоских стержневых системах подробно продемонстрирован в п. 3.1 и 3.10 [1]. Для запоминания метода удобно использовать аббревиатуру РОЗУ:

1. Разрезаем (мысленно) сооружение по исследуемому сечению, при этом образуются две отдельные части (рис. 4.7, а).
2. Отбрасывается (условно) одна из частей (например, часть II).
3. Заменяем действие отброшенной части II на оставшуюся часть I положительно направленными внутренними силами (рис. 4.7, б, рис. 4.8).
4. Уравновешиваем оставшуюся часть системы, т. е. из уравнений статики определяем искомые усилия.

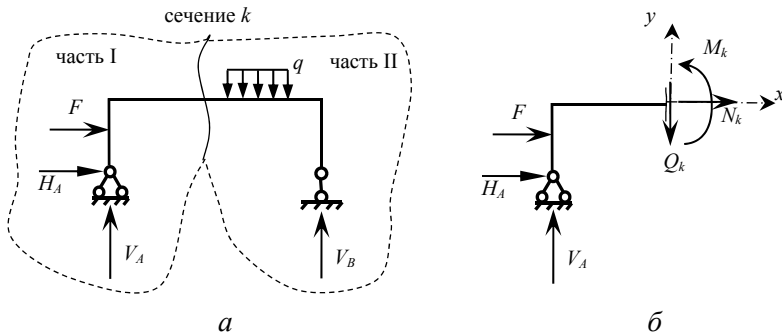


Рис. 4.7

Очевидно, и подтверждено опытом, что стержень при изгибе деформируется таким образом, что волокна, расположенные в выпуклой части, растягиваются, а в вогнутой – сжимаются. Между ними лежит поверхность, которая лишь искривляется, не изменяя своей первоначальной длины (рис. 4.9). Эта поверхность называется *нейтральной*, или *нулевой*, а ее след на плоскости поперечного сечения – *нейтральной (нулевой) линией*, или *осью*.

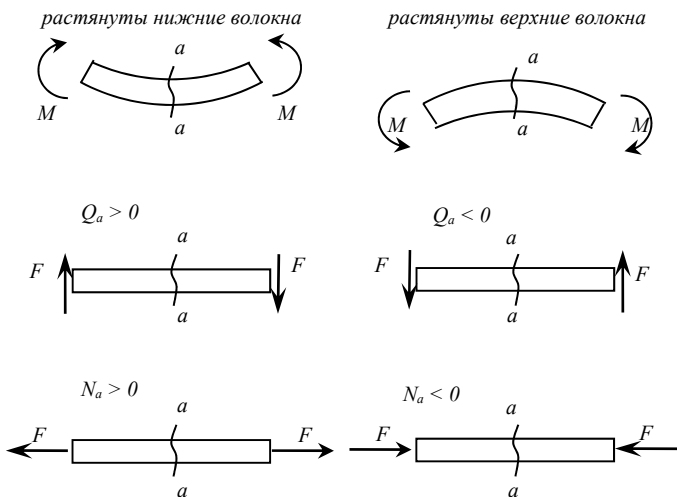


Рис. 4.8

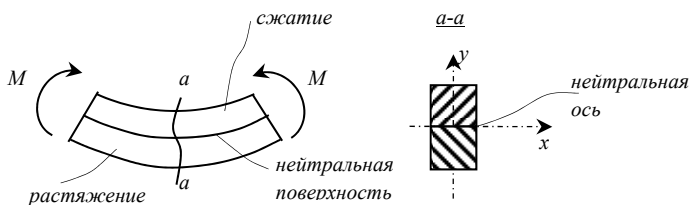


Рис. 4.9

При построении эпюр усилий договоримся на эпюре Q положительные значения откладывать сверху нулевой линии. На эпюре M принято значения изгибающих моментов откладывать со стороны растянутых волокон. На эпюре N не принципиально, по какую сторону от нулевой линии строятся значения, необходимо лишь корректно указать знак на графике.

Практический прием определения внутренних сил, основанный на методе сечений, заключается в следующем. Поперечную Q и продольную N силы в сечениях рамы удобно определять через уравнения проекций внешних сил, действующих на отсеченную часть:

– на ось перпендикулярную оси бруса

$$Q = \sum_{\text{лев}} F_{\perp}^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} F_{\perp}^{\text{внеш}},$$

– на ось параллельную оси бруса

$$N = \sum_{\text{лев}} F_{\parallel}^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} F_{\parallel}^{\text{внеш}}. \quad (4.1)$$

Изгибающий момент M , действующий в поперечном сечении балки, удобно определять как сумму моментов всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части бруса, относительно этого сечения:

$$M = \sum_{\text{лев}} M^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} M^{\text{внеш}}. \quad (4.2)$$

Условимся при решении задач:

– изгибающий момент в сечении записывать с положительным знаком, если внешняя сила в данном сечении растягивает нижние волокна балки;

– изгибающий момент в сечении записывать с отрицательным знаком, если растягиваются верхние волокна балки.

Рассмотрим особенности расчета каждого вида рам из перечисленных выше на примерах.

Задача 4.2. Для консольной рамы (консольно защемленного ломаного стержня), изображенной на рис. 4.10, а, построить эпюры внутренних сил.

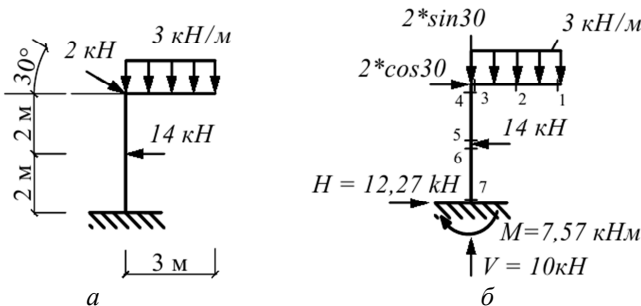


Рис. 4.10

Решение:

1. Опорные реакции в заземляющей опоре можно не определять, так как при построении эпюр внутренних усилий расчет будем вести со стороны свободного конца консоли. Однако, читателям предлагается самостоятельно определить эти опорные реакции и сопоставить с вычисленными на рис. 4.10, б.

Для удобства расчета сосредоточенную силу, приложенную к жесткому узлу под наклоном, раскладываем на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 4.10, б).

2. Показываем характерные сечения (рис. 4.10, б) и определяем внутренние усилия по методу сечений:

$$M_1 = 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; \quad Q_1 = 3 \cdot 0 = 0 \text{ кН}; \quad N_1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_2 = -3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -3,375 \text{ кНм}; \quad Q_2 = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ кН}; \quad N_2 = 0 \text{ кН};$$

$$M_3 = -3 \cdot 3 \cdot 1,5 = -13,5 \text{ кНм}; \quad Q_3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН}; \quad N_3 = 0 \text{ кН};$$

$$M_4 = -3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cos 30^\circ \cdot 0 = -13,5 \text{ кНм}; \quad Q_4 = 2 \cos 30^\circ = 1,73 \text{ кН};$$

$$N_4 = -2 \sin 30^\circ - 3 \cdot 3 = -10 \text{ кН};$$

$$M_5 = -3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cos 30^\circ \cdot 2 = -16,96 \text{ кНм}; \quad Q_5 = 2 \cos 30^\circ = 1,73 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_4 = -10 \text{ кН};$$

$$M_6 = M_5 = -16,96 \text{ кНм}; \quad Q_6 = 2 \cos 30^\circ - 14 = -12,27 \text{ кН};$$

$$N_6 = N_5 = -10 \text{ кН};$$

$$M_7 = -3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 2 \cos 30^\circ \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 7,57 \text{ кНм}; \quad Q_7 = Q_6 = -12,27 \text{ кН};$$

$$N_7 = N_6 = -10 \text{ кН}.$$

Полученные значения внутренних усилий графически отображаются в виде эпюр (рис. 4.11). Здесь, при определении изгибающих моментов, положительные значения имеют изгибающие моменты, которые растягивают волокна снизу и справа на расчетной схеме.

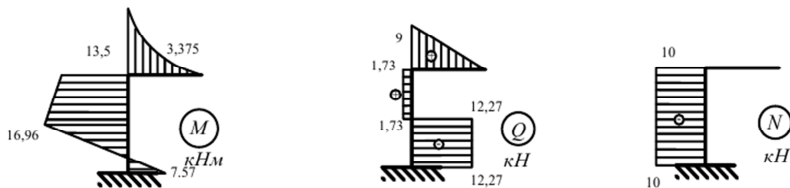


Рис. 4.11

4.4. Расчет простых и трехшарнирных рам

Простые и трехшарнирные рамы – это статически определимые стержневые системы, работающие на изгиб и растяжение / сжатие. Расчет простых и трехшарнирных рам необходимо начинать с определения опорных реакций, которые являются внешними силами по отношению к стержневой системе. Рассмотрим особенности расчета таких рам на примерах.

Задача 4.3. Для простой рамы, изображенной на рис. 4.12, построить эпюры внутренних сил.

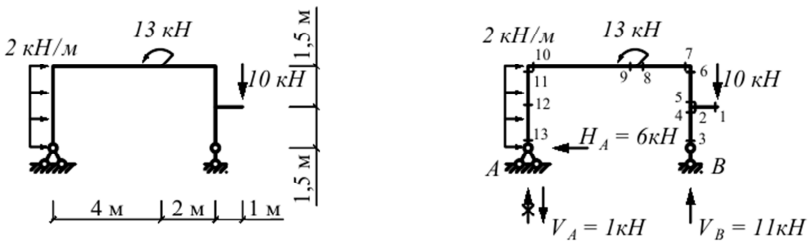


Рис. 4.12

Решение:

1. Показываем предположительное направление опорных реакций (рис. 4.12).

Составляются уравнения равновесия:

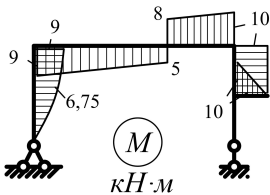
$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -H_A + 2 \cdot 3 = 0; \\ -V_B \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 13 + 10 \cdot 7 = 0; \\ V_A \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 13 + 10 \cdot 1 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 6 \text{ кН}; \\ V_B = 11 \text{ кН}; \\ V_A = -1 \text{ кН}. \end{cases}$$

Знак минус для реакции V_A обозначает, что ее первоначальное направление было выбрано неверно. Покажем на рисунке верное направление, зачеркнув неверное, и подпишем положительное значение (рис. 4.12).

2. Показываем характерные сечения и определяем внутренние силы в них

– справа:

$$\begin{aligned}
M_1 &= 10 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; & Q_1 &= 10 \text{ кН}; & N_1 &= 0 \text{ кН}; \\
M_2 &= -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}; & Q_2 &= 10 \text{ кН}; & N_2 &= 0 \text{ кН}; \\
M_3 &= 0 \text{ кНм}; & Q_3 &= 0 \text{ кН}; & N_3 &= -11 \text{ кН}; \\
M_4 &= 0 \text{ кНм}; & Q_4 &= 0 \text{ кН}; & N_4 &= -11 \text{ кН}; \\
M_5 &= -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}; & Q_5 &= 0 \text{ кН}; & N_5 &= -11 + 10 = -1 \text{ кН}; \\
M_6 &= M_5 = -10 \text{ кНм}; & Q_6 &= 0 \text{ кН}; & N_6 &= N_5 = -1 \text{ кН}; \\
M_7 &= M_6 = -10 \text{ кНм}; & Q_7 &= -11 + 10 = -1 \text{ кН}; & N_7 &= 0 \text{ кН}; \\
M_8 &= -10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 = -8 \text{ кНм}; & Q_8 &= Q_7 = -1 \text{ кН}; & N_8 &= 0 \text{ кН};
\end{aligned}$$



– слева:

$$\begin{aligned}
M_{13} &= 6 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; & Q_{13} &= 6 \text{ кН}; \\
N_{13} &= 1 \text{ кН}; \\
M_{12} &= 6 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 6,75 \text{ кНм}; \\
Q_{12} &= 6 - 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ кН}; & N_{12} &= 1 \text{ кН}; \\
M_{11} &= 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 9 \text{ кНм}; \\
Q_{11} &= 6 - 2 \cdot 3 = 0 \text{ кН}; & N_{11} &= 1 \text{ кН}; \\
M_{10} &= 9 \text{ кНм}; & Q_{10} &= -1 \text{ кН}; \\
N_{10} &= 6 - 2 \cdot 3 = 0 \text{ кН}; \\
M_9 &= 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 1 \cdot 4 = 5 \text{ кНм}; \\
Q_9 &= Q_{10} = -1 \text{ кН}; & N_9 &= N_{10} = 0 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

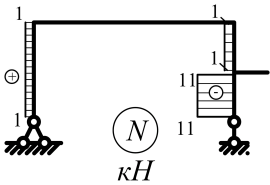
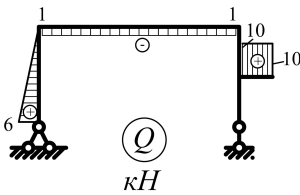


Рис. 4.13

Построенные по этим значениям эпюры внутренних сил отражены на рис. 4.13.

Задача 4.4. Для трехшарнирной рамы, изображенной на рис. 4.14, построить эпюры внутренних сил.

Решение:

1. Показываем предположительное направление опорных реакций (рис. 4.14). Обе опоры в трехшарнирной раме шарнирно-непод-

вижные, поэтому и неизвестных реакций будет четыре. Составляются уравнения равновесия не только для всей рамы, но и для отдельных ее частей. Например, чтобы определить горизонтальные реакции H_A и H_B необходимо использовать равенство нулю изгибающего момента в шарнире C как с левой, так и с правой стороны от шарнира.

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot (4 + 2) - 6 \cdot 4 - V_B \cdot 8 = 0; \\ V_A \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 10 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = 9 \text{ кН}; \\ V_A = 23 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_C^{\text{прав}} = 0; \\ \sum M_C^{\text{лев}} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 4 \cdot 2 - V_B \cdot 4 + H_B \cdot 4 = 0; \\ V_A \cdot 4 - 12 \cdot 6 - H_A \cdot 4 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_B = -1 \text{ кН}; \\ H_A = 5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Знак минус для реакции H_B обозначает, что ее первоначальное направление было выбрано неверно. Покажем на рисунке верное направление, зачеркнув неверное, и подпишем положительное значение (рис. 4.14).

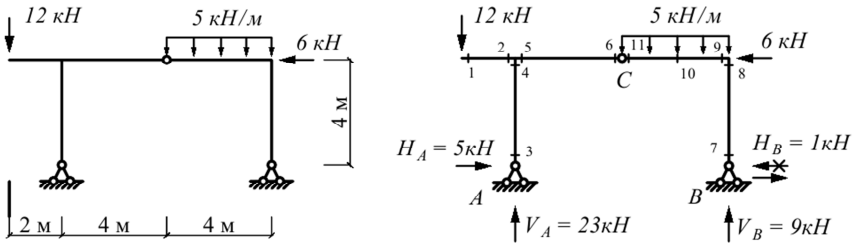


Рис. 4.14

Для проверки составим уравнения равновесия, не использованные ранее:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 - 6 + 1 = 6 - 6 = 0; \\ -12 - 5 \cdot 4 + 23 + 9 = 32 - 32 = 0. \end{cases}$$

2. Находим усилия в характерных сечениях, при этом для сечений 1÷6 рассматриваем равновесие левой части, а для сечений 7÷11 – правой.

$$\begin{aligned}
M_1 &= 12 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; & Q_1 &= -12 \text{ кН}; & N_1 &= 0 \text{ кН}; \\
M_2 &= -12 \cdot 2 = -24 \text{ кНм}; & Q_2 &= -12 \text{ кН}; & N_2 &= 0 \text{ кН}; \\
M_3 &= 5 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; & Q_3 &= -5 \text{ кН}; & N_3 &= -23 \text{ кН}; \\
M_4 &= -5 \cdot 4 = -20 \text{ кНм}; & Q_4 &= -5 \text{ кН}; & N_4 &= -23 \text{ кН}; \\
M_5 &= -12 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -44 \text{ кНм}; & Q_5 &= -12 + 23 = 11 \text{ кН}; & N_5 &= -5 \text{ кН}; \\
M_6 &= M_C^{\text{лсв}} = 0 \text{ кНм}; & Q_6 &= Q_5 = 11 \text{ кН}; & N_6 &= N_5 = -5 \text{ кН}; \\
M_7 &= 1 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; & Q_7 &= -1 \text{ кН}; & N_7 &= -9 \text{ кН}; \\
M_8 &= 1 \cdot 4 = 4 \text{ кНм}; & Q_8 &= Q_7 = -1 \text{ кН}; & N_8 &= -9 \text{ кН}; \\
M_9 &= M_8 = 4 \text{ кНм}; & Q_9 &= -9 \text{ кН}; & N_9 &= 1 - 6 = -5 \text{ кН}; \\
M_{10} &= 9 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ кНм}; & Q_{10} &= -9 + 5 \cdot 2 = 1 \text{ кН}; & N_{10} &= N_9 = -5 \text{ кН}; \\
M_{11} &= M_C^{\text{лсв}} = 0 \text{ кНм}; & Q_{11} &= -9 + 5 \cdot 4 = 11 \text{ кН}; & N_{11} &= N_{10} = -5 \text{ кН}.
\end{aligned}$$

3. Полученные значения внутренних сил показываем на эпюрах (рис. 4.15).

Для проверки правильности построенных эпюр выполним статическую проверку, т. е. проверим, выполняется ли равновесие узлов рамы (рис. 4.15).

Для узла, в котором сходятся три стержня:

$$\begin{cases}
\sum X = -5 + 5 = 0; \\
\sum Y = 23 - 12 - 11 = 23 - 23 = 0; \\
\sum M_{\text{узел}} = -24 + 44 - 20 = -44 + 44 = 0.
\end{cases}$$

Для узла, в котором сходятся два стержня:

$$\begin{cases}
\sum X = 5 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0; \\
\sum Y = 9 - 9 = 0; \\
\sum M_{\text{узел}} = -4 + 4 = 0.
\end{cases}$$

На участке 9–11 эпюра изгибающих моментов очерчена по параболе и имеет экстремум в той точке, где эпюра поперечных сил проходит через ноль.

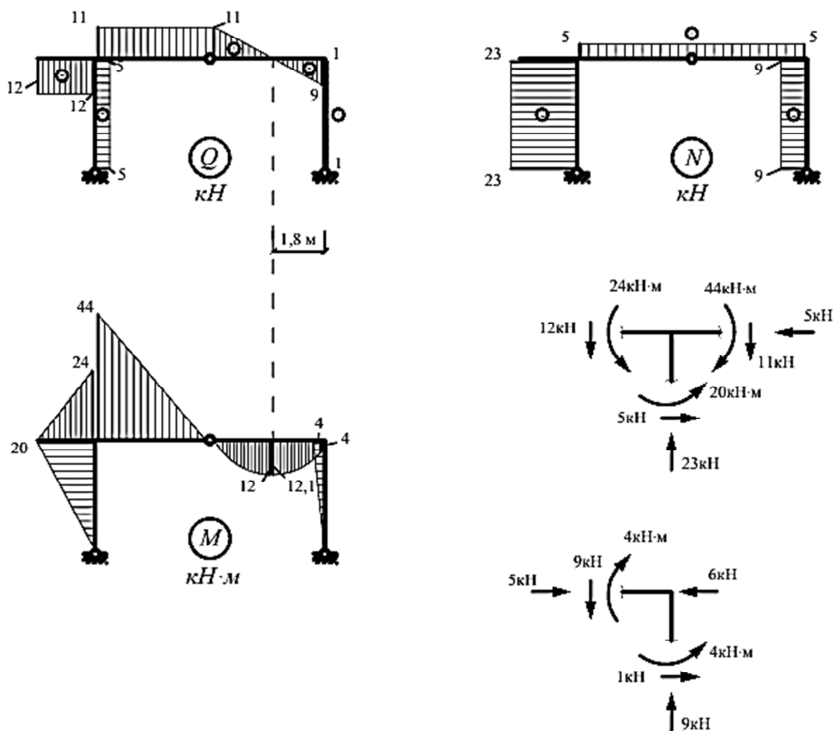


Рис. 4.15

Координату нулевой точки на эпюре поперечных сил найдем из подобия треугольников (рис. 4.16).

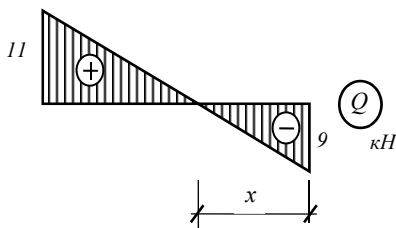


Рис. 4.16

$$\frac{11}{9} = \frac{4-x}{x} \Rightarrow x = 1,8 \text{ м};$$

$$M_x = 9 \cdot 1,8 + 1 \cdot 4 - 5 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = 12,1 \text{ кНм}.$$

4.5. Расчет простых ферм по методу вырезания узлов

Статически определимой фермой называется геометрически неизменяемая система, состоящая из прямолинейных стержней, концы которых соединены шарнирами (например, рис. 4.17). При узловом расположении нагрузки стержни фермы испытывают деформации растяжения / сжатия без изгиба. Внутренними силами в стержнях фермы являются только продольные силы N .

Согласно статическому методу, внутренние силы в элементах сооружения можно определить из уравнений равновесия для отдельных его частей. Для фермы удобно рассматривать равновесие отдельных ее узлов. Внешние и внутренние силы в узле представляют собой систему сходящихся сил (п. 1.2 [1]), условия равновесия которой в аналитической форме представляют собой систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$

Для статически определимой фермы с k узлами, m стержнями и c опорными связями можно записать $2k$ уравнений с $(m + c)$ неизвестными (m продольных сил и c опорных реакций). Степень свободы такой системы (см. п. 2.6 [2])

$$W = 2k - m - c = 0,$$

т. е.

$$2k = m + c.$$

Решение задачи сводится к решению системы $2k$ линейных алгебраических уравнений с $2k$ неизвестными.

Если расчет фермы производится вручную, то удобнее определять неизвестные усилия и опорные реакции последовательно. Вначале, при помощи уравнений равновесия, определяются опорные реакции. Затем поочередно вырезаются узлы фермы, которые соединяют не более двух стержней с неизвестными усилиями. Найденные в таком узле усилия считаются известными при записи условий равновесия последующих узлов. Такой подход к определению усилий в стержнях фермы называют *способом вырезания узлов*.

Задача 4.5. Для фермы, изображенной на рис. 4.17, определить продольные силы в стержнях.

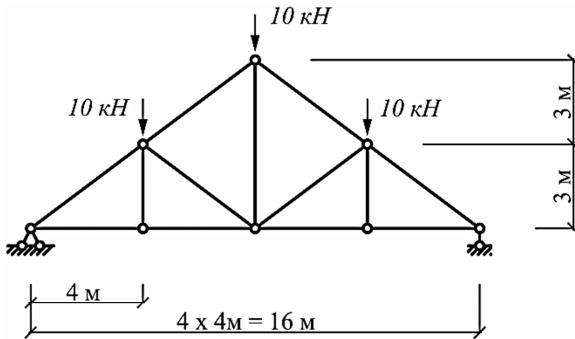


Рис. 4.17

Решение:

1. Ферма на рис. 4.17 имеет симметричное очертание и загружена вертикальной нагрузкой симметрично, поэтому реакции в опорах также будут распределены симметрично (рис. 4.18):

$$V_A = V_B = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15 \text{ кН.}$$

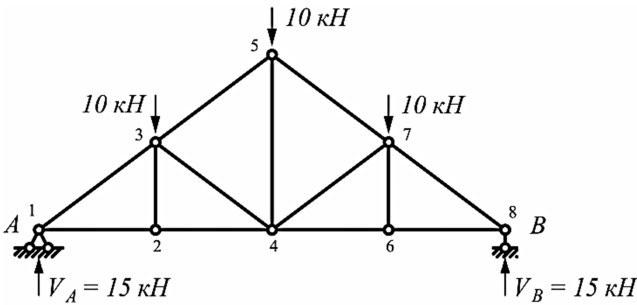


Рис. 4.18

Распределение усилий в стержнях фермы будет также симметричным, поэтому ограничимся определением усилий в стержнях только одной ее симметричной половины. На этом же рисунке (рис. 4.18) пронумеруем узлы.

2. Расчет по методу вырезания узлов начинается с узла, в котором сходятся не более двух стержней с неизвестными усилиями. Это может быть узел 1 или 8.

Отсекаемый от фермы узел изображается на отдельном рисунке (рис. 4.19, а). Помимо действующих на этот узел внешних нагрузок показываются положительные направления продольных сил в стержнях (растяжение).

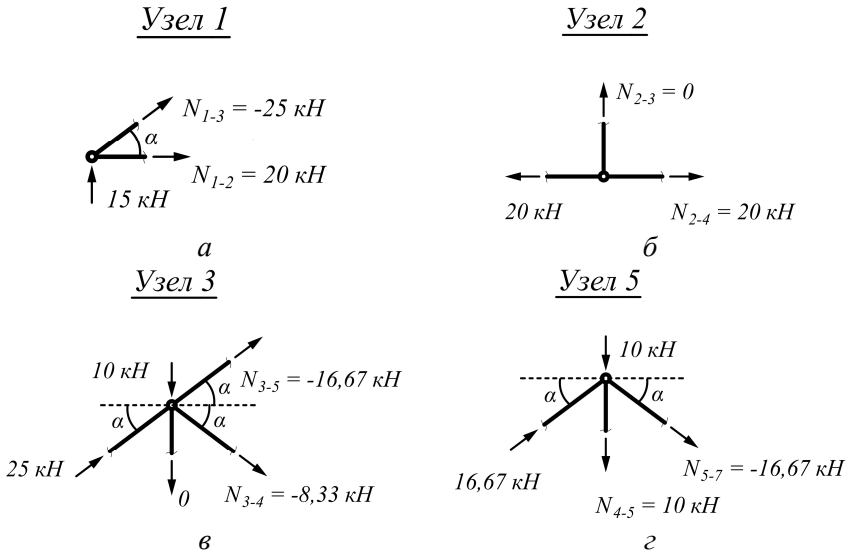


Рис. 4.19

Образовавшаяся система сил, сходящихся в одной точке, должна быть уравновешена. Составляются два возможных уравнения равновесия, из которых и находятся значения неизвестных усилий в стержнях.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{1-3} \cos \alpha + N_{1-2} = 0; \\ 15 + N_{1-3} \sin \alpha = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} N_{1-3} = \frac{-15}{\sin \alpha} = \frac{-15}{0,6} = -25 \text{ кН}; \\ N_{1-2} = -N_{1-3} \cdot 0,8 = -(-25) \cdot 0,8 = 20 \text{ кН}. \end{cases}$$

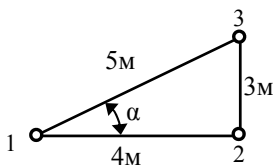


Рис. 4.20

Здесь (рис. 4.20):

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Если продольная сила получила положительный знак, то и направление ее остается тем же, что и принятое предварительно. Если же знак у продольной силы получается отрицательным – ее направление изменяет, т. е. стержень с отрицательным усилием считается сжатым. Такие стержни помимо расчетов на прочность подлежат проверке на устойчивость.

3. Следующим узлом может быть узел 2 (рис. 4.19, б), так как в нем стержнями с неизвестными усилиями являются только стержни 2-3 и 2-4. Ранее найденные усилия в стержнях показываются на рисунке в направлении, соответствующем своему знаку.

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -20 + N_{2-4} = 0; \\ N_{2-3} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{2-3} = 0 \text{ кН}; \\ N_{2-4} = 20 \text{ кН}. \end{cases}$$

Следующими по порядку будут узлы 3 и 5:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{3-4} \cos \alpha + N_{3-5} \cos \alpha + 25 \cos \alpha = 0, \\ -10 + 25 \sin \alpha - N_{3-4} \sin \alpha + N_{3-5} \sin \alpha = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} N_{3-4} = -N_{3-5} - 25; \\ -10 + 25 \cdot 0,6 - (-N_{3-5} - 25)0,6 + N_{3-5}0,6 = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} N_{3-4} = -8,33 \text{ кН}; \\ N_{3-5} = -16,67 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16,67 \cos \alpha + N_{5-7} \cos \alpha = 0; \\ -10 - N_{4-5} + 16,67 \sin \alpha - N_{5-7} \sin \alpha = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} N_{5-7} = -16,67 \text{ кН}; \\ N_{4-5} = -10 + 2 \cdot 16,67 \cdot 0,6 = 10 \text{ кН}. \end{cases}$$

4. Найденные усилия в стержнях фермы могут быть далее использованы для проверки на прочность и устойчивость стержней, если геометрические характеристики их поперечных сечений известны.

4.6. Частные случаи равновесия узлов ферм. Определение продольных сил в стержнях ферм по методу сечений

Существуют частные случаи расположения внешних сосредоточенных сил по отношению к стержням в узле (рис. 4.21).

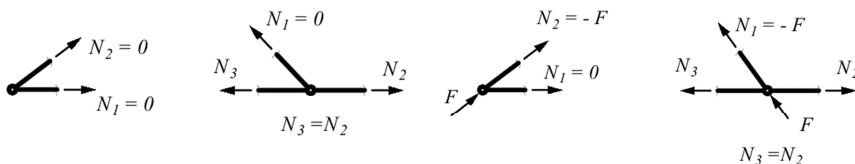


Рис. 4.21

Присутствие таких частных случаев позволяет определять усилия в соответствующих стержнях без расчета.

Расчет ферм по способу вырезания узлов прост и удобен, легко алгоритмизируется. Однако при ручном счете этот способ обладает и недостатками. В частности, при переходе от узла к узлу происходит накопление ошибки, вызванной погрешностью вычислений. Кроме того, способ вырезания узлов не позволяет определять усилия в любом стержне фермы за одно действие. В задаче 4.5, например, при определении усилия N_{4-5} необходимо было предварительно вырезать узлы 1, 2 и 3, прежде чем приступить к рассмотрению равновесия 5-го узла.

Чтобы устранить недостатки этого способа, можно использовать метод сечений, как это было продемонстрировано на балках и рамах. Можно указать на некоторые особенности применения метода сечений по отношению к фермам. Сечение фермы по рассматриваемому стержню рекомендуется проводить так, чтобы разрез пересекал не более трех стержней с неизвестными усилиями. Рассматривается равновесие одной из образовавшихся частей фермы. Для нее записывается такое уравнение равновесия, в котором неизвестным является только искомое усилие. Как правило, если из трех рассеченных стержней два параллельны друг другу, то усилие в третьем

можно найти из уравнения проекций на ось, перпендикулярную двум параллельным стержням (*способ проекций*). Если нужно найти усилие в одном стержне, а два другие при этом пересекаются, то в качестве уравнения удобно брать сумму моментов всех сил отсеченной части относительно точки пересечения этих стержней (*способ моментной точки*).

Продемонстрируем указанные способы на примере.

Задача 4.6. Для балочной фермы, изображенной на рис. 4.22, отыскать стержни с нулевыми усилиями. Определить внутренние силы в отмеченных стержнях (рис. 4.22) по методу сечений.

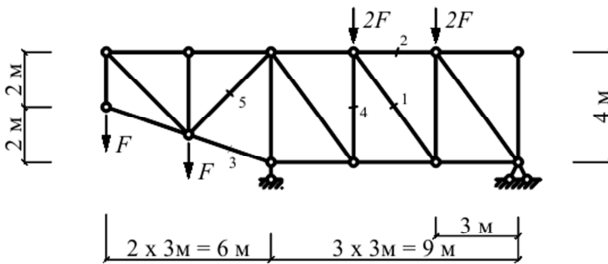


Рис. 4.22

Решение:

1. Балочная ферма (рис. 4.22) загружена вертикальной нагрузкой, поэтому горизонтальная составляющая опорных реакций отсутствует. Определяем вертикальные составляющие опорных реакций (рис. 4.23):

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -V_B \cdot 9 + 2F \cdot (3+6) - F \cdot (3+6) = 0; \\ V_A \cdot 9 - 2F \cdot (3+6) - F \cdot (12+15) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = F; \\ V_A = 5F. \end{cases}$$

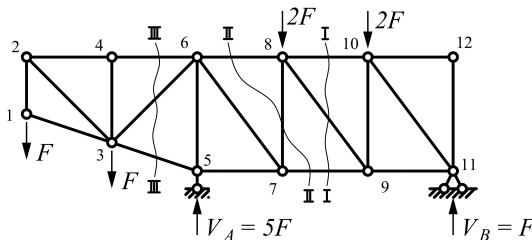


Рис. 4.23

2. Воспользуемся частными случаями равновесия узлов и определим усилия в стержнях фермы без расчета.

Равновесие узла 12 соответствует первому частному случаю из тех, что показаны на рис. 4.21. Следовательно, усилия в стержнях этого узла будут нулевыми:

$$N_{10-12} = N_{11-12} = 0.$$

Второй частный случай можно применить к равновесию узла 4. Нулевое усилие, при этом будет в стержне 3-4 – $N_{3-4} = 0$, оставшиеся усилия – $N_{2-4} = N_{4-6}$.

Равновесие узла 1 соответствует третьему частному случаю. Здесь: $N_{1-3} = 0$, при этом $N_{1-2} = F$.

3. Чтобы отыскать усилие в стержне N_{8-9} проводим сечение $I-I$, которое пересекает рассматриваемый стержень, но не более трех стержней в совокупности. Отсеченная правая часть с положительно направленными усилиями в разрезанных стержнях показана на рис. 4.24, а.

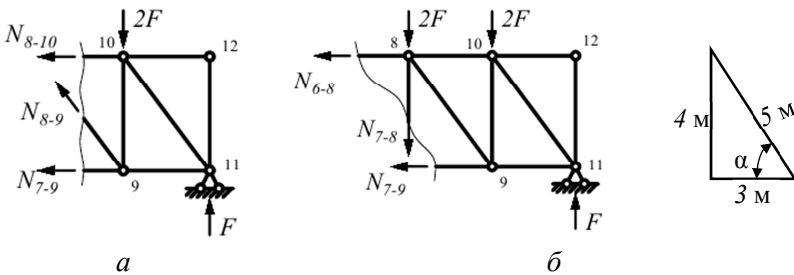


Рис. 4.24

Стержни 8-10 и 7-9 лежат на параллельных поясах, поэтому используем способ проекций:

$$\sum Y^{\text{прав}} = 0: \quad -2F + F + N_{8-9} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{8-9} = \frac{F}{\sin \alpha} = 1,25F;$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

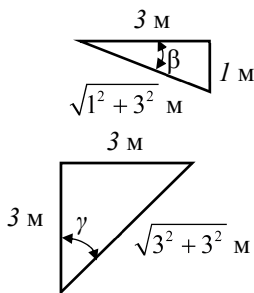
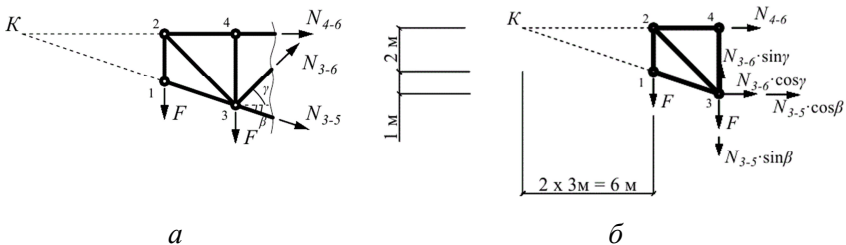
4. Усилие в стержне 8-10 (рис. 4.24, а) находим по способу моментной точки, т. к. стержни 8-9 и 7-9 пересекаются в узле 9:

$$\sum M_9^{\text{прав}} = 0: -F \cdot 3 - N_{8-10} \cdot 4 = 0; \quad N_{8-10} = -\frac{F \cdot 3}{4} = -0,75F.$$

5. Для определения N_{7-8} проводим сечение II-II (рис. 4.24, б). Способ проекций позволяет найти:

$$\sum Y^{\text{прав}} = 0: -2F - 2F + F - N_{7-8} = 0; \quad N_{7-8} = -3F.$$

6. Усилия в стержнях 3-5 и 3-6 (рис. 4.25, а) определяем, рассматривая левую часть фермы относительно сечения III-III. Для удобства расчета наклонные усилия раскладываем на вертикальные и горизонтальные составляющие (рис. 4.25, б).



$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рис. 4.25

Стержни 3-6 и 4-6 сходятся в узле 6. Используем способ моментной точки:

$$\sum M_6^{\text{лев}} = 0: -F(3+6) - N_{3-5} \sin \beta \cdot 3 - N_{3-5} \cos \beta \cdot 3 = 0;$$

$$N_{3-5} = -\frac{F \cdot 9}{3(\sin \beta + \cos \beta)} = -\frac{F \cdot 3 \cdot \sqrt{10}}{(1+3)} = -2,37F.$$

Стержни 3-5 и 4-6 пересекаются в точке K (рис. 4.25, а):

$$\sum M_K^{\text{лев}} = 0: F(6+9) - N_{3-6} \sin \gamma \cdot 9 - N_{3-6} \cos \gamma \cdot 3 = 0;$$

$$N_{3-6} = \frac{F \cdot 15}{3(3 \sin \gamma + \cos \gamma)} = \frac{F \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}{(3+1)} = 1,77F.$$

4.7. Виды перемещений и их обозначения

Любое реальное сооружение под действием внешних нагрузок и воздействий деформируется, т. е. каждое его сечение переходит в новое относительно первоначального положение (рис. 4.26, а). В общем случае сечение может перемещаться линейно и поворачиваться на некоторый угол.

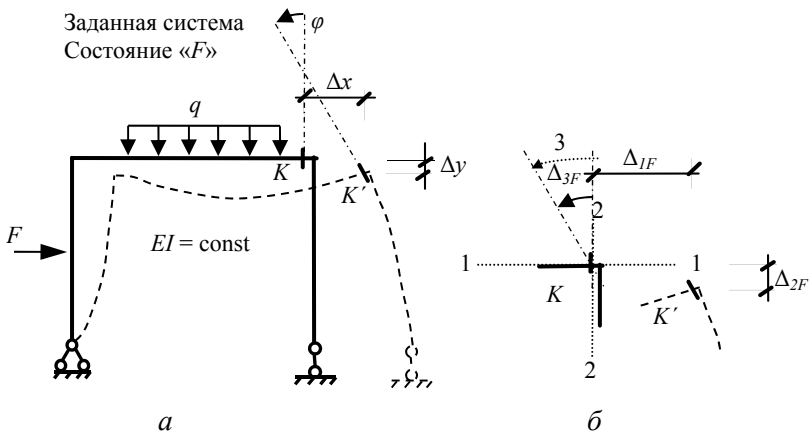


Рис. 4.26

При расчете удобно абсолютное линейное перемещение раскладывать на линейные перемещения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Таким образом, перемещение любого сечения k можно представить в виде вектора

$$\bar{\Delta}_k = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \Delta_{3F} \end{bmatrix},$$

компонентами которого являются (рис. 4.26, б):

Δ_{1F} – линейное перемещение сечения k по направлению 1, вызванное нагрузками состояния « F »;

Δ_{2F} – линейное перемещение сечения k по направлению 2, вызванное нагрузками состояния « F »;

Δ_{3F} – угловое перемещение сечения k по направлению 3, вызванное нагрузками состояния « F ». В принятом обозначении перемещения (Δ_{ij}) первый индекс i обозначает номер направления, по которому происходит перемещение; второй индекс j указывает на причину, вызвавшую перемещение.

Основные причины, по которым определяют перемещения:

1. Проверка сооружения на жесткость. Перемещения (деформации) сооружений не должны превышать допускаемых по эксплуатационным и эстетическим требованиям значений.

2. Запись уравнений совместности деформаций при расчете статически неопределимых систем. Введение таких дополнительных уравнений обусловлено наличием в статически неопределимых системах «лишних» связей, а, следовательно, и невозможностью определить все усилия только лишь при помощи уравнений статики.

3. Исследование устойчивости сооружений и расчеты на динамические нагрузки.

4. Расчет сооружений с учетом геометрической нелинейности, т. е. по деформированной схеме.

4.8. Формула Максвелла – Мора и общий порядок вычисления перемещений от внешней нагрузки

Для определения перемещений в плоских стержневых системах будем использовать формулу, выведенную Дж. К. Максвеллом для ферм, а позже обобщенную для любых стержневых систем К. О. Мором.

Пусть на раму действуют различные силовые факторы (рис. 4.27). Назовем такое состояние системы грузовым и обозначим символом « F ». Рассмотрим также вспомогательное состояние, нагрузкой для которого будет являться обобщенная единичная сила. Под *обобщенной силой* будем понимать любую нагрузку (сосредоточенную силу, сосредоточенный момент, распределенную линейную нагрузку, распределенную моментную нагрузку), а под *обобщенным перемещением* – тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу [3]. Единичная нагрузка прикладывается к тому сечению сооружения, перемещение которого определяем, и действует в направлении искомого перемещения. Например, если определяется линейное перемещение сечения k в направлении k , то прикладываем единичную силу (рис. 4.27), а если угловое – единицу момента сил.

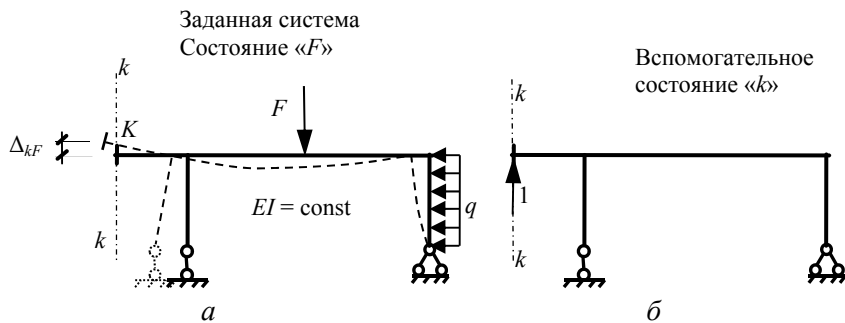


Рис. 4.27

Для каждого рассматриваемого состояния (единичного и грузового) определяются внутренние силы: $M_k(x)$, $Q_k(x)$, $N_k(x)$ и $M_F(x)$, $Q_F(x)$, $N_F(x)$, соответственно. Здесь координата x отсчитывается от начала каждого участка, на котором закон изменения

внутренних сил имеет постоянный характер. Для лучшего понимания дальнейших рассуждений читателю рекомендуется самостоятельно изучить вопросы, связанные со следующими понятиями: работа статически приложенных внешних и внутренних сил, действительные и возможные перемещения, принцип возможных перемещений [2]. В настоящем учебном пособии содержание этих понятий детально не раскрывается, т. к. основной акцент поставлен на обучение практическим способам по определению перемещений и решению соответствующих типовых задач.

Применим принцип возможных перемещений для работы внутренних и внешних сил вспомогательного состояния « k » на перемещениях грузового состояния « F », которые являются возможными для состояния « k ». Запишем получившееся уравнение работ:

$$W_F^{(\text{возм})} + A_{M,Q,N}^{(\text{возм})} = 0, \quad (4.3)$$

где работа статически приложенных внешних сил на возможных перемещениях

$$W_F^{(\text{возм})} = 1 \cdot \Delta_{kF}; \quad (4.4)$$

работа статически приложенных внутренних сил на возможных перемещениях

$$A_F^{(\text{возм})} = -\sum_n \int_S \frac{M_k(x)M_F(x)}{EI} dx - \sum_n \int_S \frac{\mu Q_k(x)Q_F(x)}{GA} dx - \sum_n \int_S \frac{N_k(x)N_F(x)}{EA} dx. \quad (4.5)$$

где $\sum_n f_S \dots dx$ – суммирование производится по n участкам интегрирования, а интегралы вычисляются по длине каждого участка S ;

μ – коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения стержня;

EI , GA , EA – жесткость на изгиб, сдвиг и растяжение/сжатие, соответственно.

Окончательно, получаем формулу Максвелла – Мора для определения перемещений в плоских стержневых системах:

$$\Delta_{kF} = \sum_n \int_S \frac{M_k(x)M_F(x)}{EI} dx + \sum_n \int_S \frac{\mu Q_k(x)Q_F(x)}{GA} dx + \sum_n \int_S \frac{N_k(x)N_F(x)}{EA} dx. \quad (4.6)$$

Для практических расчетов балок и рам достаточная точность достигается уже при использовании первого слагаемого формулы (4.4):

$$\Delta_{kF} \approx \sum_n \int_S \frac{M_k(x)M_F(x)}{EI} dx. \quad (4.7)$$

Для ферм формулу можно упростить:

$$\Delta_{kF}^{\text{фермы}} = \sum_n \int_l \frac{N_k(x)N_F(x)}{EA} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_{k,i}N_{F,i}l_i}{EA_i}, \quad (4.8)$$

при условии, что жесткость каждого стержня и усилие в нем будут неизменными по длине.

Таким образом, чтобы определить перемещение плоской стержневой системы нужно в общем случае выполнить четыре этапа:

- 1) записать общую формулу для определения перемещений рассматриваемой системы;
- 2) построить эпюры внутренних сил в заданном состоянии « F »;
- 3) построить эпюры внутренних сил во вспомогательном состоянии « k »;
- 4) выделить на построенных эпюрах участки интегрирования с постоянной жесткостью и законом изменения внутренних сил. Вычислить интегралы Мора на этих участках и просуммировать их.

4.9. Техника определения перемещений в статически определимых балках и рамах от внешней нагрузки

Вид вспомогательного состояния для определения перемещений зависит от того, какое именно перемещение необходимо определить.

Для заданного (рис. 2.27, *a*) вспомогательные состояния будут принимать вид, указанный на рис. 4.28, *a–г*:

а) если необходимо определить линейное перемещение сечения *i* в направлении *a-a*, то вспомогательное состояние будет иметь вид, изображенный на рис. 4.28, *a*;

б) при определении углового перемещения сечения *i* вспомогательное состояние будет иметь вид, изображенный на рис. 4.28, *б*;

в) если необходимо определить взаимное линейное сближение или удаление сечений *i* и *k*, то вспомогательное состояние будет иметь вид, изображенный на рис. 4.28, *в*;

г) если необходимо определить взаимный угол поворота сечений *i* и *k*, то вспомогательное состояние будет иметь вид, изображенный на рис. 4.28, *г*.

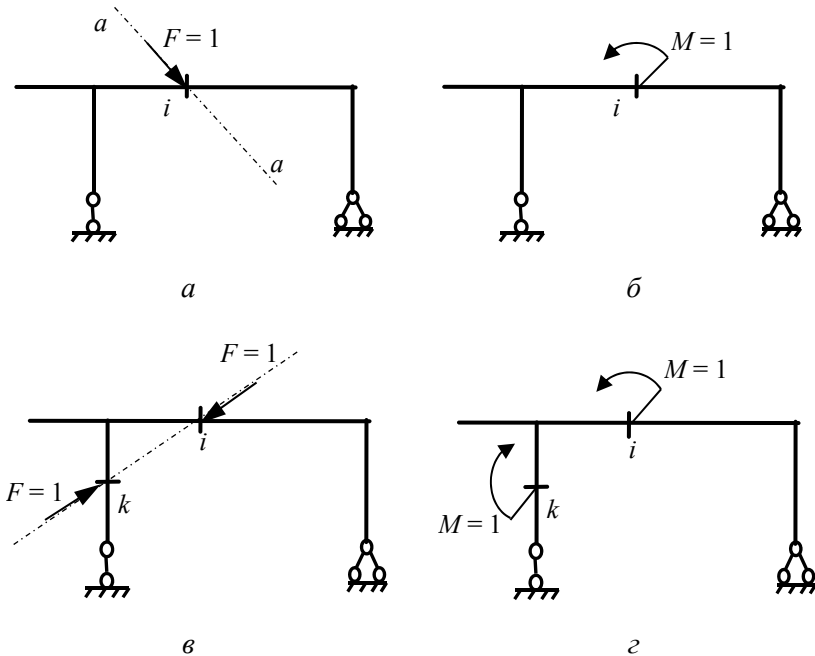


Рис. 4.28

Замечание. Направление единичной нагрузки во вспомогательном состоянии позволяет определять направление искомого пере-

мещения. Поэтому направление единичной нагрузки принимается произвольно, а полученный по расчету знак перемещения укажет на истинность или ложность этого предположения.

Интегралы Мора могут быть вычислены различными способами:

- 1) непосредственным интегрированием, когда известны законы распределения внутренних сил ($M_k(x)$, $Q_k(x)$, $N_k(x)$ и $M_F(x)$, $Q_F(x)$, $N_F(x)$);
- 2) графоаналитическими методами (правило Верещагина) и численным интегрированием (формула Симпсона).

Для систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянной жесткости, при определении угловых и линейных перемещений, эпюры во вспомогательных состояниях имеют линейный характер. Применение правила Верещагина и формулы Симпсона в таком случае дает не приближенное, а точное решение.

По правилу Верещагина вычисление интеграла, называемое также *перемножением эпюр*, осуществляется по выражению:

$$\int_S \frac{M_k(x) M_F(x)}{EI} dx = \pm \frac{\omega y}{EI}, \quad (4.9)$$

где ω – площадь криволинейного участка эпюры (рис. 4.29);

y – ордината прямолинейного участка, взятая под центром тяжести криволинейного участка.

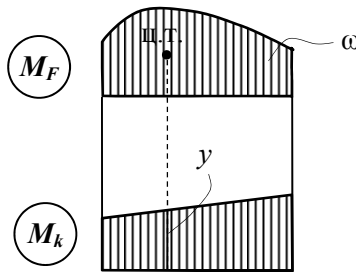


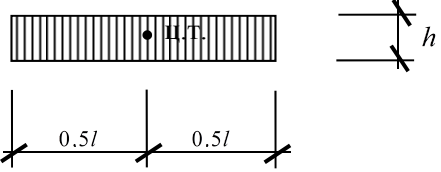
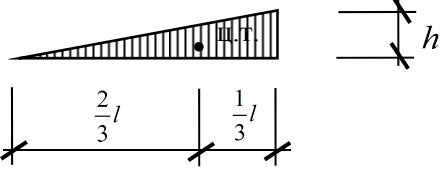
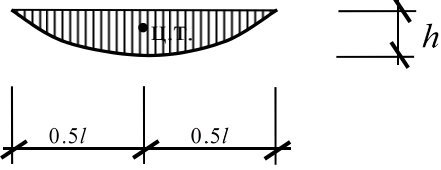
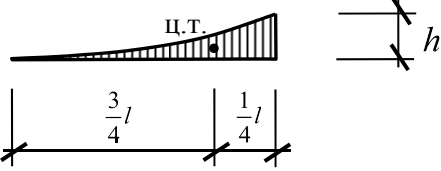
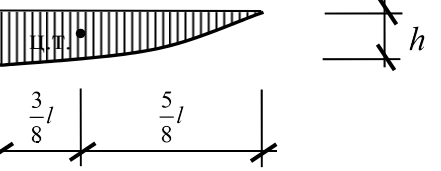
Рис. 4.29

Знак «+» ставится, если оба участка находятся по одну сторону от оси стержня, знак «-» – в противоположном случае.

Для простейших фигур положение центров тяжести и площади определяются по известным формулам. Часто встречающиеся случаи сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Геометрические характеристики простых фигур

Изображение фигуры и положение центра тяжести	Площадь эпюры
	$\omega = hl$
	$\omega = \frac{1}{2}hl$
	$\omega = \frac{2}{3}hl$
	$\omega = \frac{1}{3}hl$
	$\omega = \frac{2}{3}hl$

Формула Симпсона для определения интеграла Мора с подынтегральной функцией не выше полинома третьей степени имеет вид:

$$\int_S \frac{M_k(x)M_F(x)}{EI} dx = \frac{l}{6EI} (\pm a_n b_n \pm 4a_{cp} b_{cp} \pm a_k b_k), \quad (4.10)$$

где $a_n, a_{cp}, a_k, b_n, b_{cp}, b_k$ – ординаты, взятые в начале, середине и конце соответствующих участков интегрирования (рис. 4.30); знак «+» ставится, если обе ординаты находятся по одну сторону от оси стержня, знак «-» в противоположном случае.

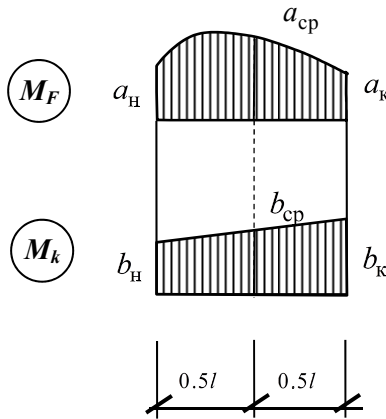


Рис. 4.30

Задача 4.7. Для балки, изображенной на рис. 4.31, определить вертикальное перемещение шарнира C и угол поворота надпорного сечения K , вызванные заданной нагрузкой.

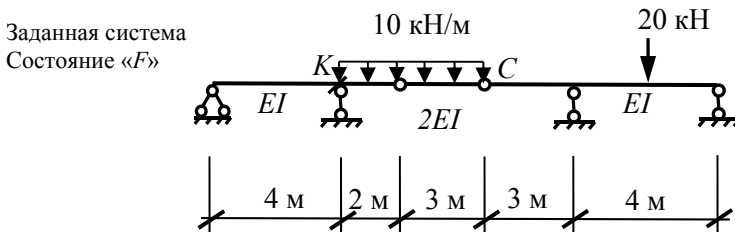


Рис. 4.31

Решение:

1. Формула для определения вертикального перемещения шарнира С

$$\Delta_{C,F}^{\text{верт}} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx.$$

2. Построение грузовой эпюры M_F . На рис. 4.32 показан порядок расчета простых балок в составе сложной, для грузового состояния «F». Определения опорных реакций и построение эпюр внутренних сил рекомендуется провести самостоятельно.

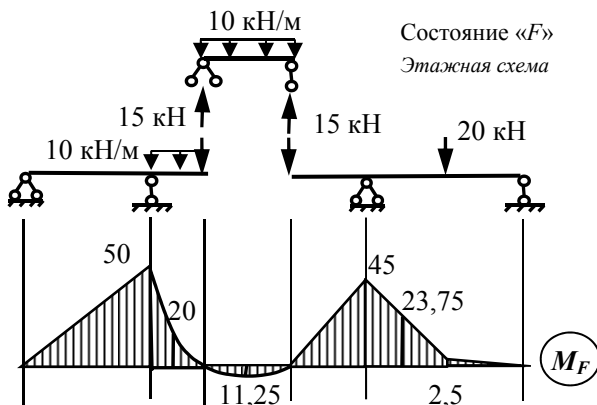


Рис. 4.32

3. Выбор вспомогательного состояния и построение единичной эпюры M_1 . Вспомогательное состояние «I» и соответствующая эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 4.33.

4. Определение искомого перемещения. Для вычисления интегралов Мора используются любые удобные приемы численного интегрирования. Предварительно разделяем перемножаемые эпюры на участки интегрирования (рис. 4.33). На 1-м и 3-м участках удобно применять правило Верещагина, а на 2-м – формулу Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta_{C,F}^{\text{верт}} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{2}{6EI} (45 \cdot 3 + 4 \cdot 23,75 \cdot 2,25 + 2,5 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) = \frac{255}{EI} \text{ м.} \end{aligned}$$

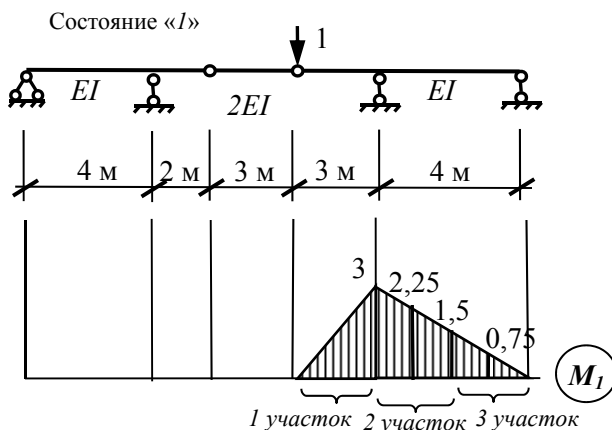


Рис. 4.33

Угол поворота сечения K определим по такому же алгоритму:

- 1) $\Delta_{K,F}^{\text{верт}} = \sum \int \frac{M_2 M_F}{EI} dx$;
- 2) грузовая эпюра M_F построена ранее;
- 3) вспомогательное состояние «2» и соответствующая эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 4.34;
- 4) $\Delta_{K,F}^{\text{верт}} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{200}{3EI}$ рад.

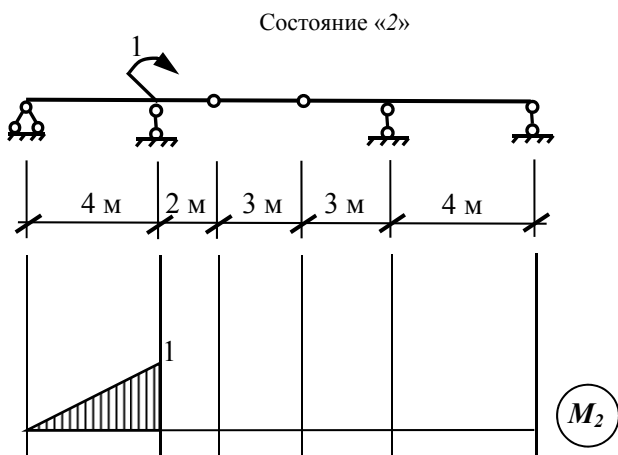
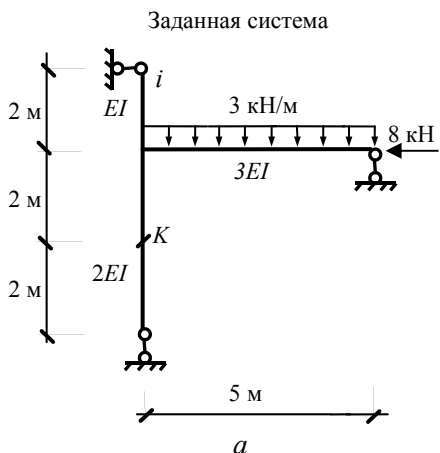


Рис. 4.34

Задача 4.8. Для рамы, изображенной на рис. 4.35, а, определить горизонтальное перемещение сечения K , вызванное заданной нагрузкой.



Вертикальная реакция V_B определяется из уравнения моментов всех внешних сил относительно точки пересечения реакций H_A и V_A :

$$\begin{aligned} \sum M_i &= 0 \rightarrow \\ -V_B \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + 8 \cdot 2 &= 0 \\ \rightarrow V_B &= 10,7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

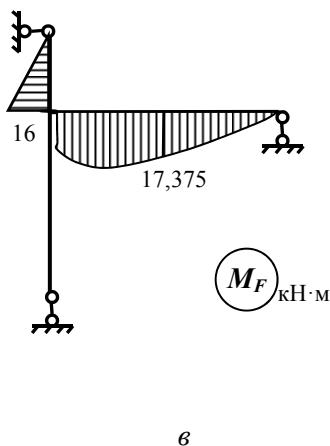
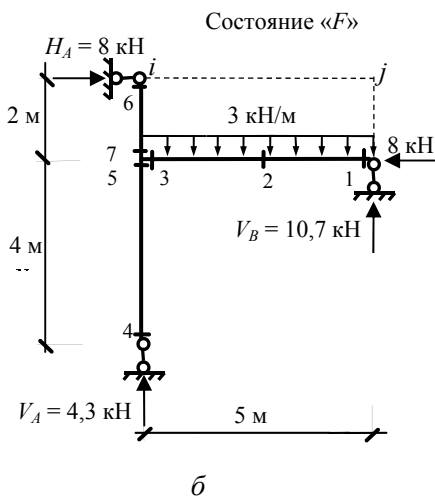


Рис. 4.35

Решение:

1. Формула для определения горизонтального перемещения сечения K :

$$\Delta_{K,F}^{\text{гориз}} = \sum \int \frac{M_K M_F}{EI} dx.$$

2. Построение грузовой эпюры M_F . На рис. 4.35, б, показаны направления опорных реакций и их значения, вычисленные при помощи уравнений статики. Напомним, что направление реакции в шарнирно-подвижной опоре совпадает с направлением, по которому эта связь ограничивает перемещение. Горизонтально направленную реакцию H_A можно найти из уравнения проекций на горизонтальную ось, т. к. две остальные реакции V_A и V_B – вертикальные:

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A - 8 = 0 \rightarrow H_A = 8 \text{ кН.}$$

Вертикальную реакцию V_A можно найти из уравнения моментов всех внешних сил относительно точки пересечения реакций H_A и V_B :

$$\sum M_j = 0 \rightarrow V_A \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + 8 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_A = 4,3 \text{ кН.}$$

Показываем характерные сечения (рис. 4.35, б) и определяем в них внутренние силы. Для сечений 1, 2, 3 рассматривается равновесие правой части рамы относительно этих сечений:

$$M_1 = 10,7 \cdot 0 = 0 \text{ кНм;}$$

$$M_2 = 10,7 \cdot 2,5 - 3 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 17,375 \text{ кНм;}$$

$$M_3 = 10,7 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 = 16 \text{ кНм.}$$

Для сечений 4, 5 рассматривается равновесие нижней части рамы относительно их:

$$M_4 = 4,3 \cdot 0 = M_5 = 0 \text{ кНм.}$$

Для сечений 6, 7 рассматривается равновесие верхней части рамы относительно их:

$$M_6 = 8 \cdot 0 = 0 \text{ кНм;}$$

$$M_7 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кНм.}$$

Замечание. Правило знаков для изгибающих моментов в сечениях, расположенных на вертикально ориентированных стержнях, соответствует правилу знаков для горизонтальных стержней, при условии, что «низ» стержня находится слева от оси вертикального стержня.

3. Построение эпюры изгибающих моментов M_K во вспомогательном состоянии «К» (рис. 4.36, а).

$$\sum X = 0 \rightarrow -H_A + 8 = 0 \rightarrow H_A = 1.$$

$$\sum M_j = 0 \rightarrow V_A \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_A = 0,8.$$

$$\sum M_i = 0 \rightarrow V_B \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_B = 0,8.$$

Определяем внутренние силы в характерных сечениях:

$$M_1 = 0,8 \cdot 0 = 0 \text{ м}; \quad M_2 = -0,8 \cdot 5 = -4 \text{ м};$$

$$M_3 = M_K = 0,8 \cdot 0 = 0 \text{ м}; \quad M_4 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м};$$

$$M_5 = -1 \cdot 0 = 0 \text{ м}; \quad M_6 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м}.$$

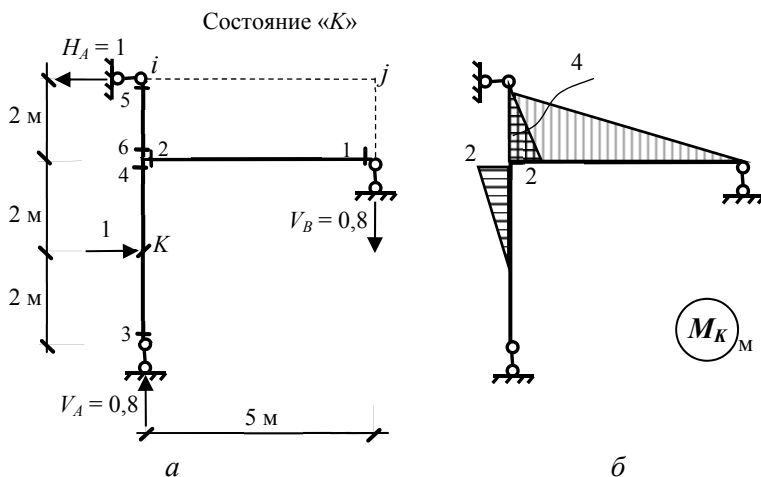


Рис. 4.36

4. Эпюры M_K и M_F имеют два общих ненулевых участка интегрирования. При перемножении эпюр на участке с прямолинейным

очертанием применим правило Верещагина, на другом участке – формулу Симпсона:

$$\Delta_{к, F}^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{5}{6 \cdot 3EI} (-16 \cdot 4 - 4 \cdot 17,375 \cdot 2 - 0 \cdot 0) \approx \frac{77,72}{EI} \text{ м.}$$

Задача 4.9. Для трехшарнирной рамы, изображенной на рис. 4.37, а, определить вертикальное перемещение шарнира С, вызванное заданной нагрузкой.

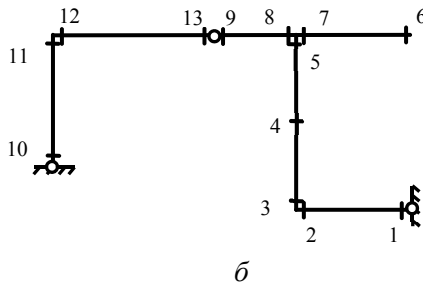
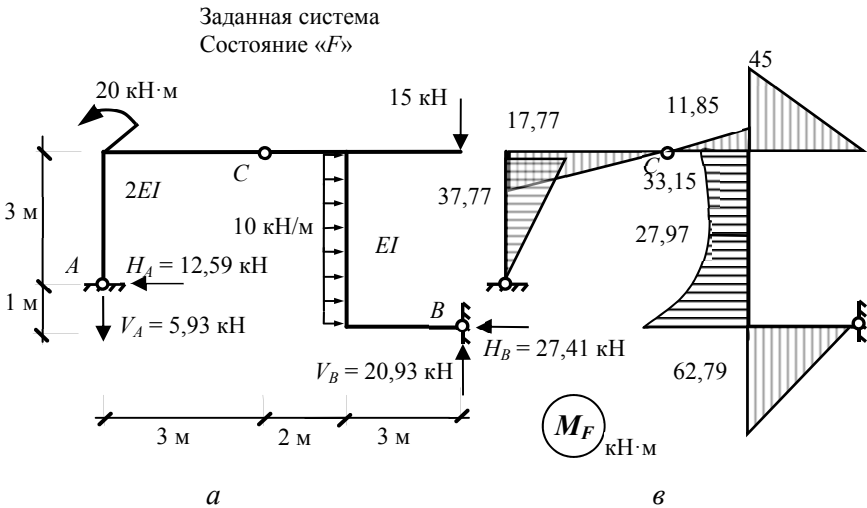


Рис. 4.37

Решение:

1. Формула для определения вертикального перемещение шарнира C :

$$\Delta_{C,F}^{\text{верт}} = \sum \int \frac{M_C M_F}{EI} dx.$$

2. Построение грузовой эпюры M_F . Особенности расчета трехшарнирных рам состоят в вычислении опорных реакций. У рамы, изображенной на рис. 4.37, *a*, шарнирно-неподвижные опоры находятся на разном уровне. Поэтому опорные реакции в них находим из решения систем уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_C^{\text{прав}} = 0. \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 15 \cdot 8 + 10 \cdot 4 \cdot (2 - 1) - 20 - V_B \cdot 8 + H_B \cdot 1 = 0; \\ -10 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 5 - V_B \cdot 5 + H_B \cdot 4 = 0. \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} -V_B \cdot 8 + H_B \cdot 1 + 140 = 0; \\ -V_B \cdot 5 + H_B \cdot 4 - 5 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = 20,93 \text{ кН}; \\ H_B = 27,41 \text{ кН}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sum M_B = 0; \\ \sum M_C^{\text{лев}} = 0. \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} -V_A \cdot 8 - H_A \cdot 1 - 20 + 15 \cdot 0 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ -V_A \cdot 3 - 20 + H_A \cdot 3 = 0. \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} -V_A \cdot 8 - H_A \cdot 1 + 60 = 0; \\ -V_A \cdot 3 + H_A \cdot 3 - 20 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = 5,93 \text{ кН}; \\ H_A = 12,59 \text{ кН}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для проверки правильности вычисленных реакций будем использовать уравнения проекций на взаимно перпендикулярные оси:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow -H_A - H_B + 10 \cdot 4 = 0 \rightarrow -12,59 - 27,41 + 10 \cdot 4 = \\ &= -40 + 40 = 0; \end{aligned}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_B - 15 = 0 \rightarrow -5,93 + 20,93 - 15 = -20,93 + 20,93 = 0.$$

Условия выполняются, реакции найдены верно.

Определяем усилия в характерных сечениях (рис. 4.37, *б*):

$$M_1 = 0 \text{ кНм}; \quad M_2 = M_3 = 20,93 \cdot 3 = 62,79 \text{ кНм};$$

$$M_4 = 20,93 \cdot 3 - 27,41 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 27,97 \text{ кНм};$$

$$M_5 = 20,93 \cdot 3 - 27,41 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 33,15 \text{ кНм};$$

$$M_6 = -15 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}; \quad M_7 = -15 \cdot 3 = -45 \text{ кНм};$$

$$M_8 = 20,93 \cdot 3 - 27,41 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 15 \cdot 3 = -11,85 \text{ кНм};$$

$$M_9 = M_C^{\text{прав}} = 0 \text{ кНм}; \quad M_{10} = 0 \text{ кНм}; \quad M_{11} = 12,59 \cdot 3 = 37,77 \text{ кНм};$$

$$M_{12} = 12,59 \cdot 3 - 20 = 17,77 \text{ кНм}; \quad M_{13} = M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ кНм}.$$

Построенная по этим значениям эпюра M_F отражена на рис. 4.37, в.
3. Аналогичным образом произведем построение эпюры во вспомогательном состоянии (рис. 4.38, а).

Опорные реакции:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_C^{\text{прав}} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \cdot 3 - V_B \cdot 8 + H_B \cdot 1 = 0; \\ -V_B \cdot 5 + H_B \cdot 4 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = 0,44 \text{ кН}; \\ H_B = 0,56 \text{ кН}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_B = 0; \\ \sum M_C^{\text{лев}} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A \cdot 8 + H_A \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 0; \\ V_A \cdot 3 - H_A \cdot 3 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = 0,56 \text{ кН}; \\ H_A = 0,56 \text{ кН}. \end{cases}$$

Контроль вычислений:

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A - H_B = 0 \rightarrow 0,56 - 0,56 = 0;$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_A + V_B - 1 = 0 \rightarrow 0,56 + 0,44 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

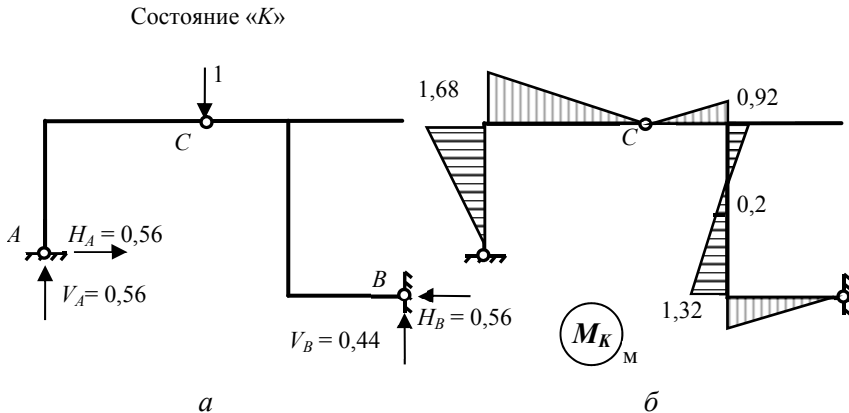


Рис. 4.38

Усилия в характерных сечениях (рис. 4.37, б):

$$M_1 = 0 \text{ м}; \quad M_2 = M_3 = 0,44 \cdot 3 = 1,32 \text{ м}; \quad M_4 = 0,44 \cdot 3 - 0,56 \cdot 2 = 0,2 \text{ м};$$

$$M_5 = 0,44 \cdot 3 - 0,56 \cdot 4 = -0,92 \text{ м}; \quad M_6 = M_7 = 0 \text{ м};$$

$$M_8 = 0,44 \cdot 3 - 0,56 \cdot 4 = -0,92 \text{ м}; \quad M_9 = M_C^{\text{прав}} = 0 \text{ м};$$

$$M_{10} = 0 \text{ м}; \quad M_{11} = M_{12} = -0,56 \cdot 3 = -1,68 \text{ м};$$

$$M_{13} = M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ м}.$$

Построенная по этим значениям эпюра M_K отражена на рис. 4.38, б.

4. Определение перемещения:

$$\begin{aligned} \Delta_{C,F}^{\text{верт}} &= \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 37,77 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,68 \right) + \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 17,77 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,68 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,85 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,92 \right) + \frac{4}{6EI} \left(-33,15 \cdot 0,92 + 4 \cdot 27,97 \cdot 0,2 + \right. \\ &\quad \left. + 62,79 \cdot 1,32 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 62,79 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,32 \right) = \frac{93,34}{EI} \text{ м}. \end{aligned}$$

Покажем также определение перемещений для составных рам для закрепления навыка построения эпюр изгибающих моментов.

Задача 4.10. Для рамы, изображенной на рис. 4.39, определить угол поворота сечения K , вызванный заданной нагрузкой.

Решение:

1. Формула для определения угла поворота сечения K :

$$\Delta_{K,F}^{\text{угл}} = \sum \int \frac{M_K M_F}{EI} dx.$$

2. Построение грузовой эпюры M_F . Заданная система (рис. 4.39) представляет собой составную раму.

Заданная система
Состояние «F»

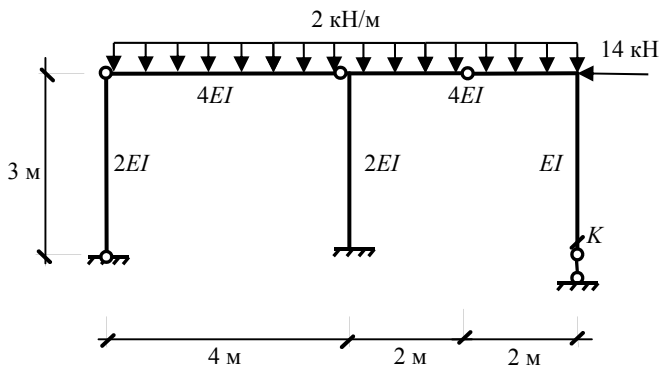


Рис. 4.39

Мысленно разобьем сложную раму на ряд простых, взаимодействующих между собой. Можно заметить, что центральная часть (диск) имеет опору в виде жесткого защемления D , следовательно, представляет собой статически определимый консольно-защемленный ломаный стержень. Правая часть представляет собой диск, присоединяемый к неподвижному основанию (вместе с консольной рамой DE) стержнем F и шарниром E . Левая часть представляет собой два диска, соединенные шарниром B , и к основанию крепящиеся при помощи шарниров A и C . Схема взаимодействия отдельных частей составной рамы отражена на рис. 4.40. Там же римскими цифрами показан и порядок расчета.

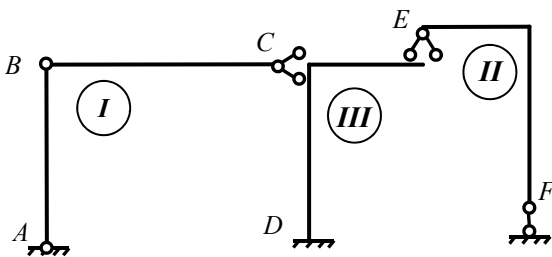


Рис. 4.40. Схема взаимодействия элементов

На рис. 4.41 показаны отдельные части составной рамы с действующими на них внешними активными и реактивными силами. Окончательная грузовая эпюра отражена на рис. 4.42.

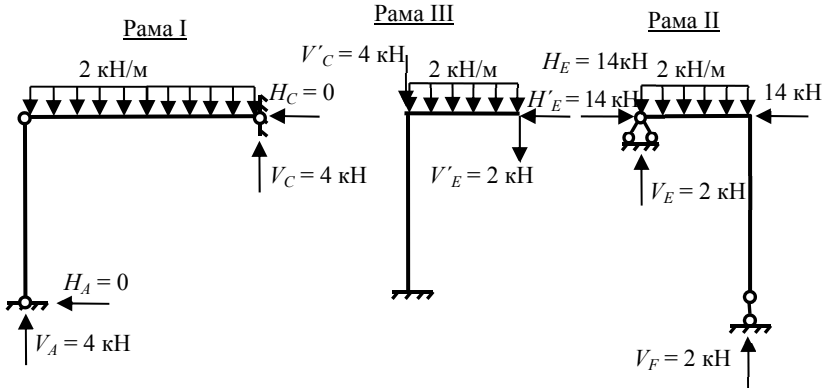


Рис. 4.41

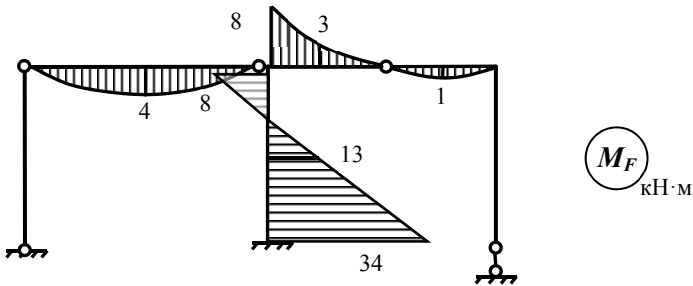


Рис. 4.42

3. Построение единичной эпюры M_K . На рис. 4.43 показано вспомогательное состояние. Расчет отдельных рам ведется по алгоритму рис. 4.40.

Эпюра изгибающих моментов единичного вспомогательного состояния показана на рис. 4.44.

Состояние «К»

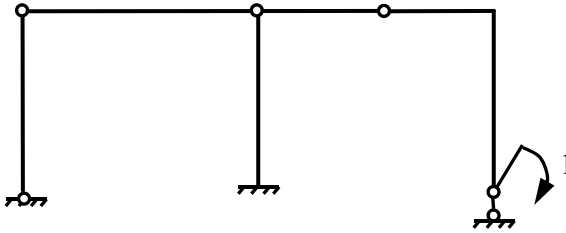


Рис. 4.43

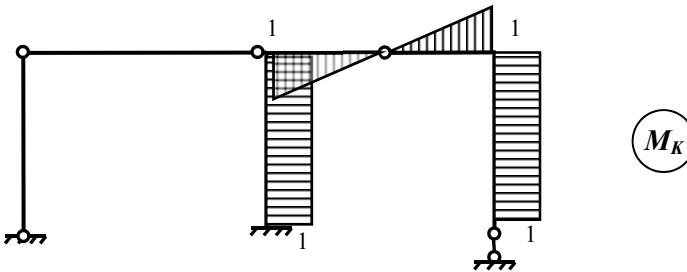


Рис. 4.44

4. Вычисление перемещения:

$$\Delta_{K,F}^{\text{угл}} = \frac{1}{2EI}(1 \cdot 3 \cdot 13) + \frac{2}{6 \cdot 4EI}(-8 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) + \frac{1}{4EI}\left(-\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,5\right) = \frac{18,17}{EI} \text{ рад.}$$

4.10. Техника определения перемещений в статически определимых фермах от внешней нагрузки

Под действием внешней нагрузки, приложенной к узлам плоских статически определимых ферм, происходят линейные смещения этих узлов относительно их первоначального положения на плоскости.

Считается, что шарниры, находящиеся в узлах ферм, не препятствуют повороту стержней относительно друг друга. При перемещении узлов стержни могут укорачиваться или удлиняться, испы-

тывая продольные деформации, но сами стержни при этом деформаций изгиба не испытывают. Угловые перемещения, следовательно, будут отсутствовать. Линейные перемещения узлов ферм принято раскладывать по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Таким образом, для каждого узла фермы, за исключением опорных узлов, можно вычислить горизонтальное и вертикальное линейные перемещения.

Для определения перемещений узлов фермы используют формулу (4.8). Интегралы Мора при этом вычислять не нужно, так как продольные силы и геометрические характеристики по длине каждого стержня, как правило, остаются неизменными. Вычисление по формуле (4.8) на практике удобно реализовать в табличном виде. Продemonстрируем такой подход на примере.

Задача 4.11. Для фермы, изображенной на рис. 4.45, определить вертикальное перемещение узла K , вызванное действием сосредоточенной силы.

Решение:

1. Формула для определения перемещения узла K :

$$\Delta_{K,F}^{\text{верт}} = \sum_{i=1}^6 \frac{N_{k,i} N_{F,i} l_i}{EA_i}.$$

Заполняются столбцы 1, 2 и 3 табл. 4.2.

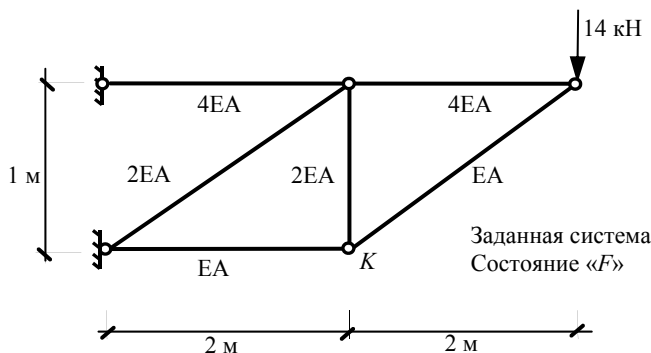


Рис. 4.45

2. Определение продольных сил N_F в стержнях фермы в грузовой состоянии.

Определение опорных реакций (рис. 4.46):

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum M_1 = 0; \\ \sum M_5 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A - 14 = 0; \\ -H_B \cdot 1 + 14 \cdot (2 + 2) = 0; \\ -H_A \cdot 1 + 14 \cdot (2 + 2) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = 14 \text{ кН}; \\ H_B = 56 \text{ кН}; \\ H_A = 56 \text{ кН}. \end{cases}$$

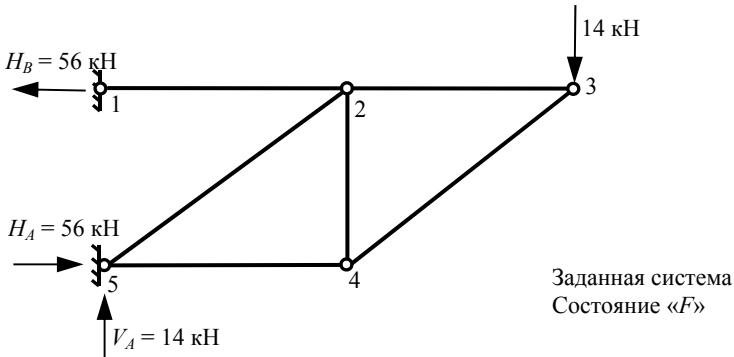


Рис. 4.46

Усилия в стержнях фермы могут быть определены, например, по методу вырезания узлов (п. 4.5). Их значения (рис. 4.47) заносятся в столбец 4 табл. 4.2.

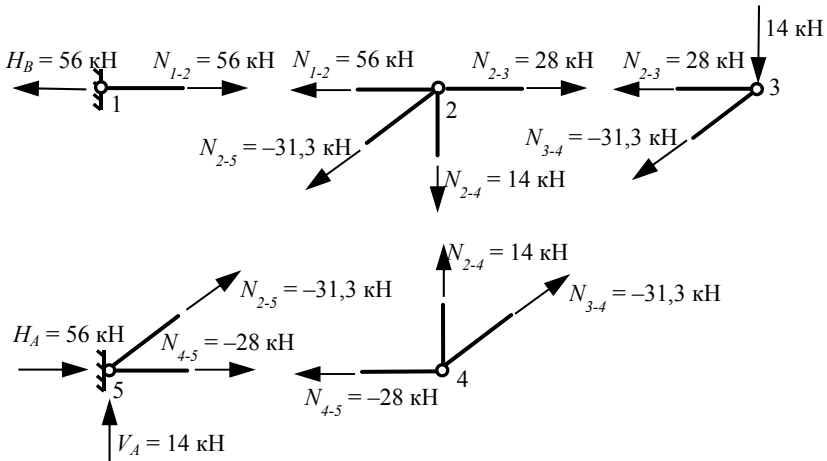


Рис. 4.47

3. Определение продольных сил N_K в стержнях фермы во вспомогательном состоянии (рис. 4.48) осуществляется аналогично. Результаты заносятся в столбец 5 табл. 4.2.

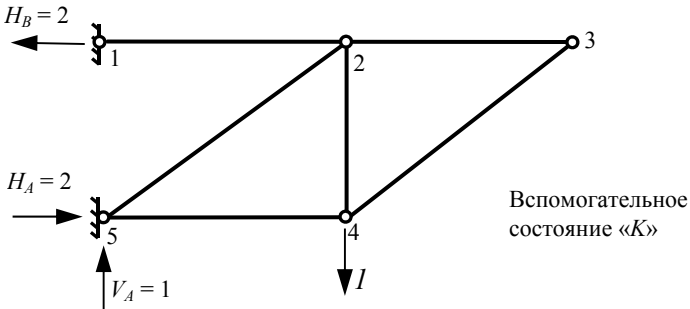


Рис. 4.48

4. Искомое перемещение получается путем суммирования значений столбца 6 табл. 4.2.

$$\Delta_{K,F}^{\text{верт}} = \sum_{i=1}^6 \frac{N_{k,i}(x) N_{F,i}(x) l_i}{EA_i} = \frac{141,39}{EA}.$$

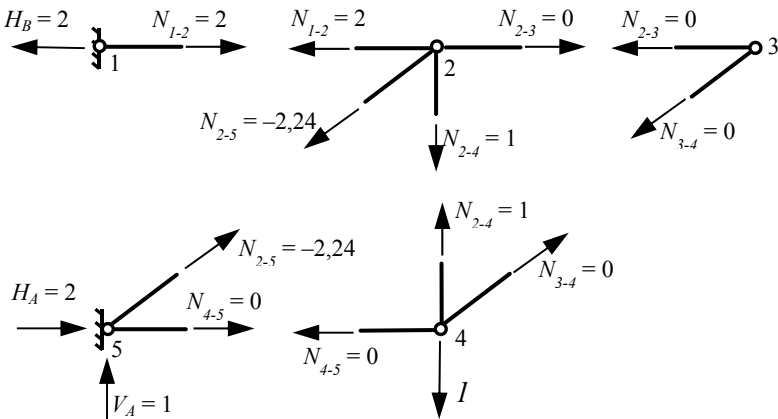


Рис. 4.49

Таблица 4.2

Вычисление перемещения узла фермы в табличном виде

№ стержня	Длина, м	Жесткость, EA	N_F	N_K	$\frac{N_K N_F l}{EA}$
1-2	2	4	56	2	56
2-3	2	4	28	0	0
4-5	2	1	-28	0	0
2-5	2,236	2	-31,3	-2,24	78,39
3-4	2,236	1	-31,3	0	0
2-4	1	2	14	1	7
Сумма					141,39 / EA

5. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД СИЛ И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

5.1. Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости плоских стержневых систем

К *статически неопределимым системам* относятся такие системы, у которых не все опорные реакции или внутренние силы могут быть определены из уравнений статики. Например, для балки, изображенной на рис. 5.1, а, не могут быть определены все четыре опорные реакции, так как можно составить только три независимых линейных уравнения равновесия. Степень свободы

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1.$$

То есть одна из опорных связей является как бы «лишней». Такую статически неопределимую балку можно назвать внешне статически неопределимой.

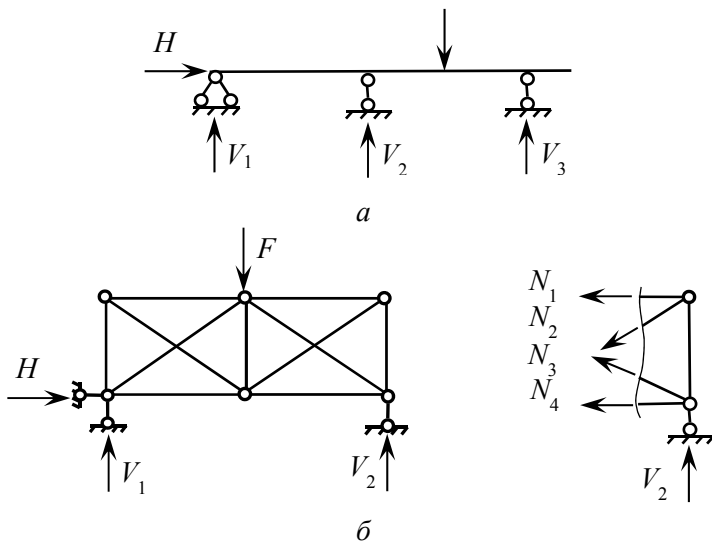


Рис. 5.1

Ферма на рис. 5.1, б, тоже является статически неопределимой, хотя все ее опорные реакции могут быть определены из уравнений равновесия. Однако при определении усилий в стержнях второй панели, например, по методу сечений, неизвестными будут являться четыре продольные силы, которые невозможно найти из трех возможных уравнений статики. Таким образом, и первая, и вторая панели фермы содержат по одному «лишнему» стержню (связи 1-го рода). Такая ферма считается внешне статически неопределимой со степенью свободы

$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 6 - 11 - 3 = -2.$$

«Лишними» считаются связи, которые при удалении из расчетной схемы не нарушают ее геометрическую неизменяемость и неподвижность. Эти связи являются *избыточными* в отношении правил построения неизменяемой системы, однако могут являться необходимыми для соблюдения прочности, жесткости и устойчивости системы в целом.

Количество «лишних» связей, исключение которых из системы обращает ее из статически неопределимой в статически определимую и геометрически неизменяемую, принято называть *степенью статической неопределимости* L .

С определения степени статической неопределимости начинается расчет статически неопределимых систем, так как количество «лишних» связей указывает на количество дополнительных уравнений, необходимых для расчета статическими методами.

Степень статической неопределимости плоской стержневой системы можно считать равной степени свободы этой системы с обратным знаком:

$$L = -W = C_0 + 2Ш - 3Д.$$

Здесь важно помнить, что за диск принимается заведомо неизменяемая статически определимая часть системы. Диск из стержней, образующих замкнутый контур, например, является статически неопределимым и содержит три лишние связи, так как любое сечение, разрезающее контур на две части, пересекает контур дважды

(рис. 5.2). Неизвестными усилиями в таком случае являются N_1 , Q_1 , M_1 , N_2 , Q_2 , M_2 , для определения которых необходимо составить 6 независимых уравнений равновесия. Любой шарнир, размыкающий замкнутый контур, устраняет изгибающий момент, как внутреннее усилие в этом сечении, а, следовательно, уменьшает количество лишних связей на единицу. Отсюда следует и другая формула для определения количества лишних связей:

$$Л = 3К - Ш,$$

где $К$ – количество замкнутых контуров в системе, определить которое можно визуально. Для этого мысленно проводится линия «земли» по опорам и подсчитывается количество областей, образующихся как непосредственно между стержнями системы, так и между стержнями и основанием;

$Ш$ – количество шарниров, размыкающих эти замкнутые контуры (количество шарниров подсчитывается с учетом их кратности).

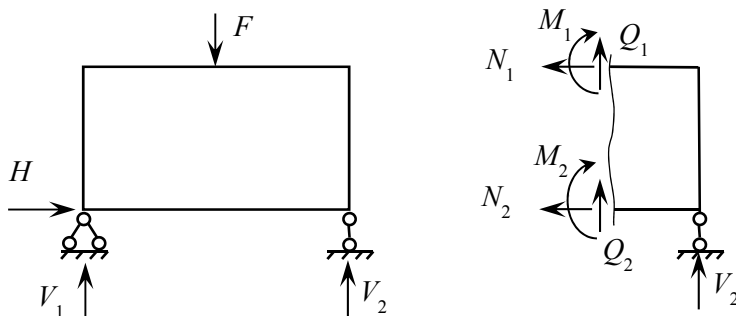


Рис. 5.2

Продемонстрируем применение двух формул для подсчета степени статической неопределимости.

На рис. 5.3 показаны плоские рамы. Требуется определить степень их статической неопределимости.

На рис. 5.4 схематически показано, как производится определение степени статической неопределимости каждой рамы по каждой из предложенных формул.

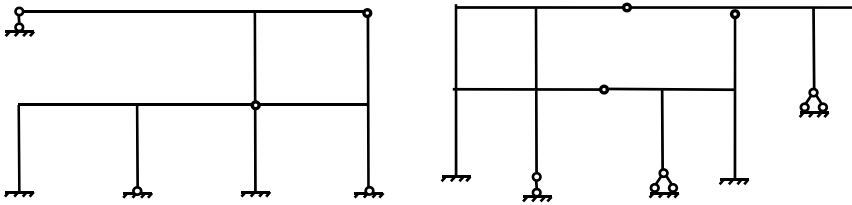
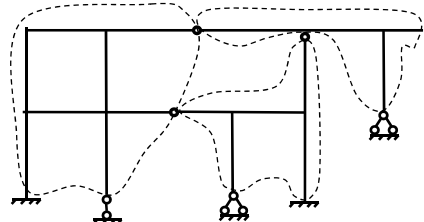
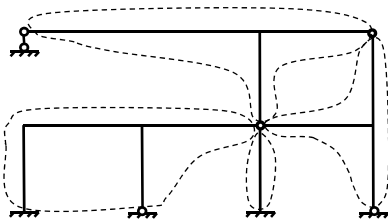


Рис. 5.3

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д = (1 + 3 + 2 + 3 + 2) + 2 \cdot (1 + 3) - 3 \cdot 4 = 7$$

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д = (3 + 1 + 2 + 3 + 2) + 2 \cdot (1 + 1 + 1) - 3 \cdot 3 + 3 = 8 + 3 = 11$$



$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 5 - (2 + 1 + 1 + 1 + 3) = 7$$

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 6 - (2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 11$$

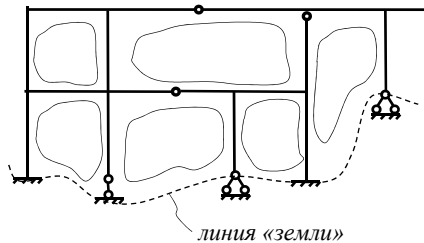


Рис. 5.4

5.2. Сущность метода сил. Основная система и основные неизвестные метода сил

Одним из классических методов расчета статически неопределимых систем является *метод сил*. Его суть состоит в переходе от расчета n раз статически неопределимой системы к расчету эквивалентной статически определимой системы с n неизвестными силами (реакциями в отброшенных связях). Для определения этих n неиз-

вестных сил составляются n уравнений статической эквивалентности заданной статически неопределимой и заменяющей статически определимой систем.

Продemonстрируем сущность метода сил на примере расчета 1-го раза статически неопределимой системы (рис. 5.5).

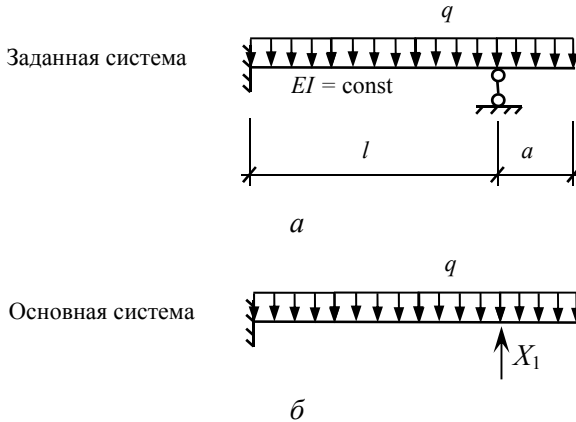


Рис. 5.5

Заданная система (рис. 5.5, а) содержит

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = (3 + 1) + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \text{ «лишних» связей.}$$

Удалим одну связь из заданной системы, не нарушая при этом ее геометрическую неизменяемость. Вместо этой связи необходимо оставить неизвестную реакцию (неизвестную силу). Для исследуемой системы в качестве «лишней» связи можно рассматривать, например, шарнирно неподвижную опору, неизвестную реакцию в которой обозначим X_1 (рис. 5.5, б). Такая статически определимая система традиционно называется *основной*.

Рассмотрим основную систему в двух состояниях:

- состояние, соответствующее заданному загрузению, назовем *грузовым* состоянием « F »;
- состояние, соответствующее загрузению основной системы неизвестной силой X_1 , назовем *вспомогательным* состоянием « I ».

По направлению отброшенной связи (обозначим это направление $I-I$) или, можно сказать, по направлению неизвестной X_1 в гру-

звом состоянии происходит перемещение Δ_{1F} (рис. 5.6, *a*), а во вспомогательном – Δ_{11} (рис. 5.6, *б*). Однако, в заданной системе перемещение точки приложения X_1 по направлению ее действия исключено за счет присутствующей по этому направлению связи:

$$\Delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Перемещение Δ_{11} от неизвестной X_1 может быть представлено как произведение этой неизвестной на перемещение δ_{11} , вызванное единичным значением X_1 (рис. 5.6, *в*):

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1.$$

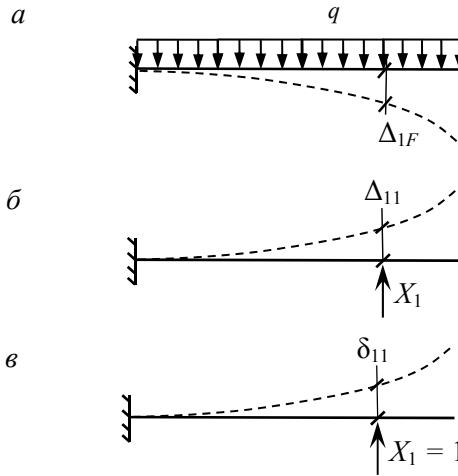


Рис. 5.6

Получаемое окончательно уравнение называется *каноническим (образцовым) уравнением* метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Перемещения δ_{11} и Δ_{1F} в основной системе могут быть найдены способами, изложенными в п. 4.9 настоящего пособия. Решение канонического уравнения метода сил дает значение основной неизвестной метода

$$X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = C_1.$$

Дальнейший расчет производится как для заданной системы, но уже с известным значением реакции в лишней связи (рис. 5.7).

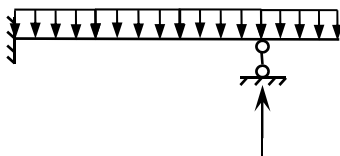


Рис. 5.7

Как видно из разобранный примера, одним из важнейших этапов расчета является выбор основной системы метода сил.

Основная система получается из заданной системы путем отбрасывания «лишних» связей и заменой их неизвестными реакциями в этих связях, которые и являются *основными неизвестными метода сил*. Удаление лишних связей из заданной системы позволяет получить бесконечное количество вариантов основных систем. Поэтому при выборе рабочего варианта основной системы необходимо, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям:


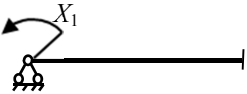



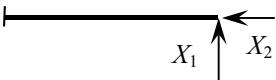
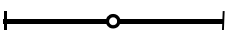
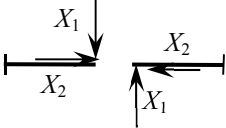

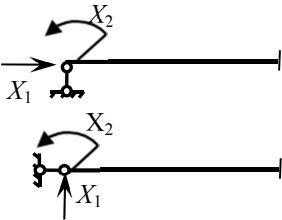

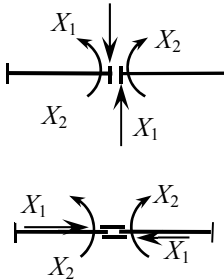
- была статически определимой и геометрически неизменяемой;
- была наиболее удобной для расчета, т. е. рациональной.

Некоторые наиболее распространенные способы удаления связей с заменой их неизвестными реакциями представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Основные способы замены связей неизвестными реакциями

№ п/п	Фрагмент заданной системы	Фрагмент основной системы
а) способы удаления одной связи		
1	A horizontal beam with a roller support at its center.	A horizontal beam with an upward-pointing arrow at its center, representing the reaction force X_1 .
2	A horizontal beam with a vertical link (rod) connecting its center to a fixed support below.	Two horizontal beams. The top one has a downward-pointing arrow at its center labeled X_1 . The bottom one has an upward-pointing arrow at its center labeled X_1 .

№ п/п	Фрагмент заданной системы	Фрагмент основной системы
3		
4		
б) способы удаления двух связей		
5		
6		
7		
8		

№ п/п	Фрагмент заданной системы	Фрагмент основной системы
в) способы удаления трех связей		
9		
10		

Продемонстрируем на примере, как осуществляется выбор основной системы метода сил.

На рис. 5.8 показаны плоские рамы. Требуется выбрать рациональную основную систему для каждой из них.

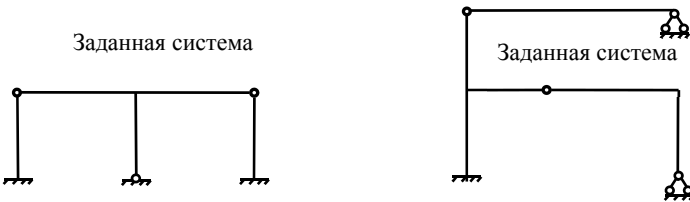


Рис. 5.8

Подсчитываем количество «лишних» связей в каждой системе (рис. 5.9).

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = (3 + 2 + 3) + 2 \cdot (2) - 3 \cdot 3 = 3$$

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = (3 + 2 + 2) + 2 \cdot (2) - 3 \cdot 3 = 2 = 2$$

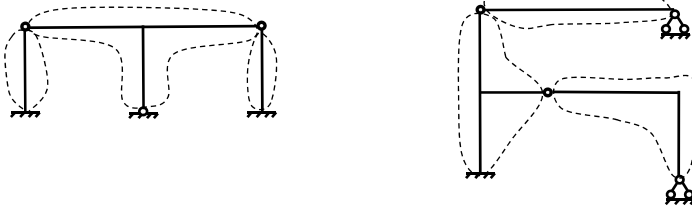


Рис. 5.9

Некоторые варианты основных систем для каждой из заданных отражены на рис. 5.10 и 5.11.

Основная система № 1 на рис. 5.10, *a* образована с использованием способов 1 и 6 из табл. 5.1, и представляет собой раму, состоящую из консольной и простой рам, и консольный вертикальный стержень.

Основная система № 2 на рис. 5.10, *б* образована с использованием способов 3 и 4 из табл. 5.1 и представляет собой раму, составленную из двух трехшарнирных рам.

Основная система № 3 на рис. 5.10, *в* образована с использованием способов 3 и 4 из табл. 5.1 и представляет собой раму, составленную из последовательно взаимодействующих консольной и двух трехшарнирных рам.

Основная система № 4 на рис. 5.10, *г* образована с использованием способов 1, 3 и 4 из табл. 5.1, однако не может быть принята для расчета, так как имеет в своем составе геометрически изменяемую часть (на правом вертикальном стержне три шарнира расположены на одной линии).

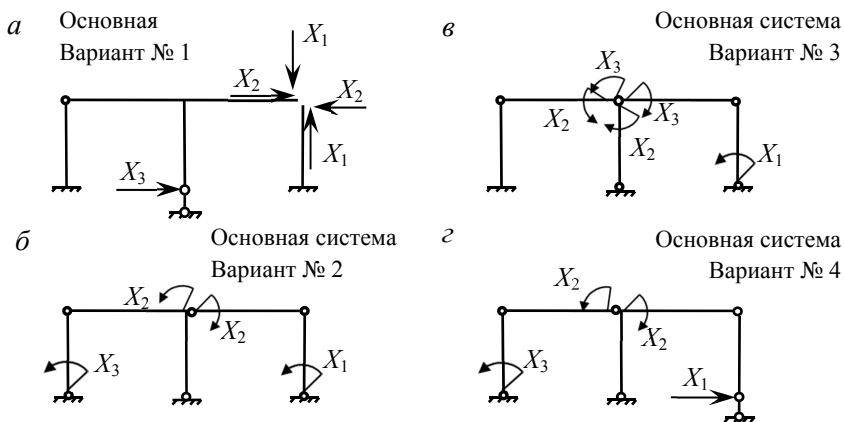


Рис. 5.10

Основная система № 1 на рис. 5.11, *a* образована с использованием способа 1 из табл. 5.1 и представляет собой раму, состоящую из консольной рамы с опирающимися на нее простой рамой и простой балкой.

Основная система № 2 на рис. 5.11, б образована с использованием способа б из табл. 5.1, однако не может быть принята для расчета, так как имеет в своем составе статически неопределимую и геометрически изменяемую части.

Основная система № 3 на рис. 5.11, в образована с использованием способов 1 и 3 из табл. 5.1 и представляет собой систему, состоящую из трехшарнирной рамы и опирающейся на нее балки.

Основная система № 4 на рис. 5.11, г образована с использованием способов 3 и 4 из табл. 5.1 и представляет собой раму, составленную из двух трехшарнирных рам.

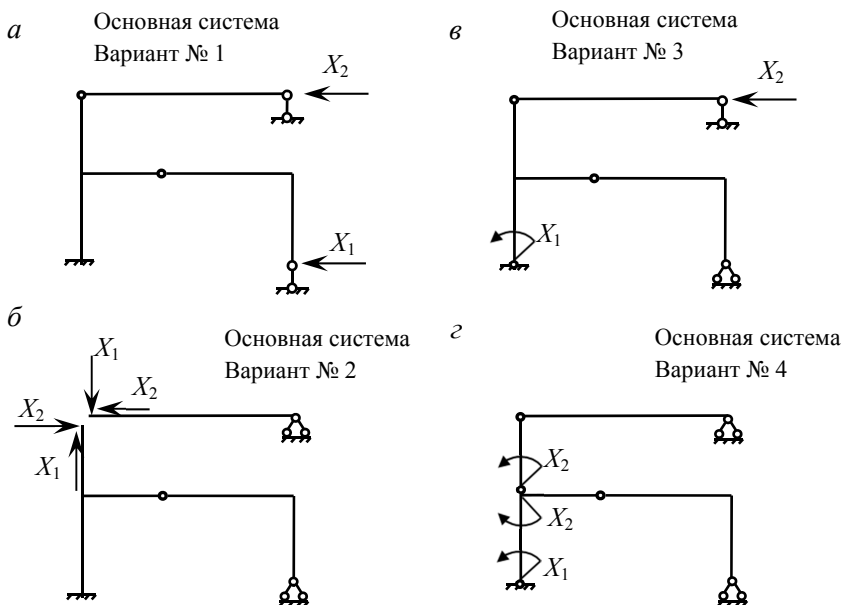


Рис. 5.11

Окончательное решение о выборе наиболее рациональной основной системы из предложенных вариантов основных систем зависит от предпочтений и опыта расчетчика.

5.3. Система канонических уравнений метода сил. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

Построение окончательных эпюр усилий и их проверка

После выбора основной системы и установления нужного количества и вида основных неизвестных метода сил, величины этих неизвестных подбираются так, чтобы перемещения основной системы по направлению отброшенных связей были такими же, как и перемещения в заданной системе. Для этого составляются уравнения совместности деформаций, которые в развернутой форме записи представляют собой систему линейных канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где δ_{ik} – перемещение точки приложения неизвестного усилия X_i по его направлению, вызванное единичным значением неизвестной X_k ;

Δ_{iF} – перемещение точки приложения неизвестного усилия X_i по его направлению, вызванное внешними нагрузками или воздействиями на систему.

Порядок определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил продемонстрируем ниже, на примере решения задач.

Алгоритм расчета по методу сил известен [2, 4, 5]. Перечислим основные этапы расчета и проверки правильности расчета:

- 1) определение степени статической неопределимости;
- 2) выбор основной системы метода сил;
- 3) запись канонических уравнений метода сил в общем виде;
- 4) определение и проверка правильности коэффициентов и свободных членов канонических уравнений;
- 5) решение системы канонических уравнений;
- 6) построение окончательных эпюр внутренних усилий и проверка их правильности.

Задача 5.1. Для рамы, изображенной на рис. 5.12, построить эпюры внутренних сил.

Решение:

1. Количество лишних связей

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1,$$

или

$$L = 3К - Ш = 3 \cdot 1 - (1 + 1) = 1.$$

2. Основная система показана на рис. 5.12.

3. Система канонических уравнений для статически неопределимой (один раз) рамы обращается в уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

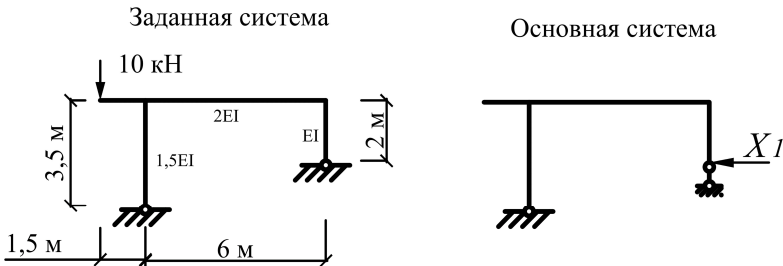


Рис. 5.12

4. Перемещения δ_{11} и Δ_{1F} определяются по формулам Максвелла – Мора:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx; \quad \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx.$$

Основная система рассматривается в двух состояниях: грузовом (под действием внешней нагрузки) и единичном (под действием единичной неизвестной $X_1 = 1$). Для каждого состояния строится эпюра изгибающих моментов (рис. 5.13).

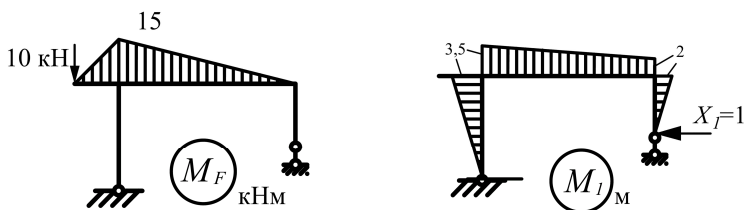


Рис. 5.13

$$\delta_{11} = \frac{1}{1,5EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,5 \right) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} \left(3,5^2 + 4 \cdot \left(\frac{3,5+2}{2} \right)^2 + 2^2 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{35,444}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{6}{6 \cdot 2EI} \left(3,5 \cdot 15 + 4 \cdot \left(\frac{3,5+2}{2} \right) \cdot \frac{15}{2} + 2 \cdot 0 \right) = \frac{67,5}{EI} \text{ м.}$$

5. Находим решение канонического уравнения:

$$X_1 = -67,5 / 35,444 = -1,94 \text{ кН.}$$

6. Построение окончательных эпюр внутренних усилий можно проводить различными способами.

Так как заданная система имеет всего одну неизвестную метода сил, а очертание рамы не является сложным, то для построения окончательных эпюр удобно произвести расчет статически определимой основной системы на действие внешней нагрузки и действительного значения реакции $X_1 = -1,94$ кН (рис. 5.14).

Определяем опорные реакции и внутренние усилия в характерных сечениях по методу сечений (см. п. 4.3, п. 4.4) и строим окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рис. 5.14).

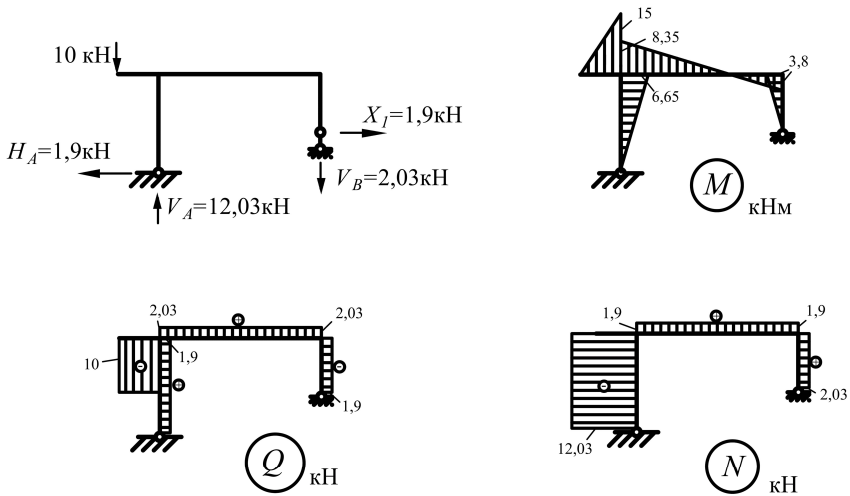


Рис. 5.14

Задача 5.2. Для рамы, изображенной на рис. 5.15, построить эпюры внутренних сил. Выполнить проверки правильности вычислений на каждом этапе.

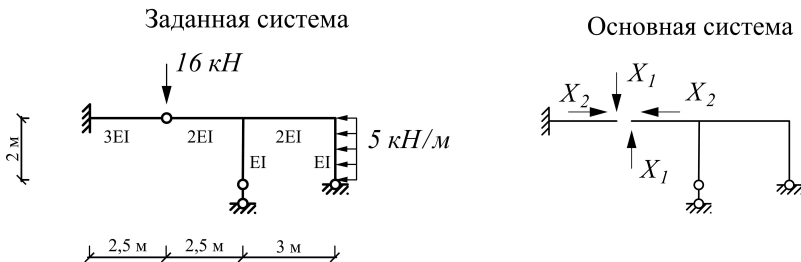


Рис. 5.15

Решение:

1. Количество лишних связей:

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д = (3 + 1 + 2) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2,$$

или

$$Л = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

2. Удалить две лишние связи можно, например, по способу 6 табл. 5.1. Основная система в таком случае наиболее удобна для расчета вручную, так как представляет собой независимые друг от друга консоль и простую раму (рис. 5.15).

3. Система канонических уравнений для дважды статически неопределимой рамы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

4. Для определения коэффициентов перед неизвестными и свободных членов канонических уравнений необходимо построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 5.16).

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) = \frac{7,465}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}; \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 \right) = \frac{1,25}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \right) = \frac{34,028}{EI} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{4,667}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_2 M_F}{EI} dx &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \right) + \\ &+ \frac{2}{6EI} (2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \cdot 7,5 + 0 \cdot 0) = \frac{26,667}{EI} \text{ м}. \end{aligned}$$

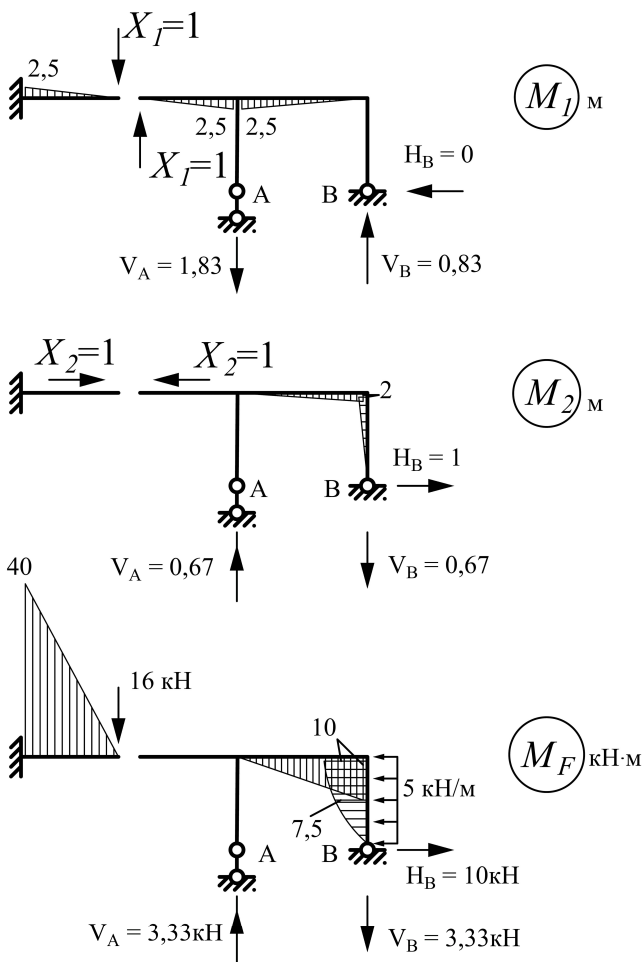


Рис. 5.16

Для проверки правильности определения коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений необходимо построить суммарную единичную эпюру $M_S = M_1 + M_2$ (рис. 5.17). Ординаты этой эпюры получаются алгебраическим суммированием соответствующих ординат единичных эпюр M_1 и M_2 .

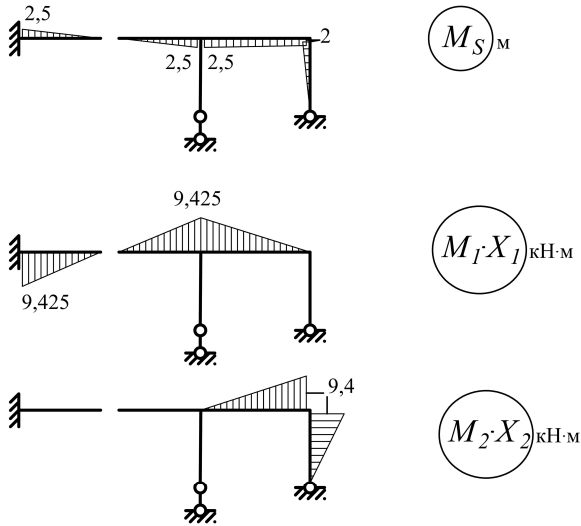


Рис. 5.17

Проверка носит формальный характер, так как рассматривается не правильность построенных эпюр, а правильность их перемножения, и помогает выявить ошибки скорее алгебраические, нежели методические. Суть проверки в вычислении суммарного перемещения по направлению всех отброшенных связей от действия всех единичных неизвестных одновременно и сопоставлении с суммой всех коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{SS} = \sum \int \frac{M_S M_S}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (2,5^2 + 4 \cdot 2,25^2 + 2^2) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{14,632}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \delta_{ik} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \\ &= \frac{7,465}{EI} + \frac{1,25}{EI} + \frac{1,25}{EI} + \frac{4,667}{EI} = \frac{14,632}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется правильность вычисления свободных членов канонических уравнений:

$$\Delta_{SF} = \sum \int \frac{M_S M_F}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \right) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (2,5 \cdot 0 + 4 \cdot 2,25 \cdot 5 + 2 \cdot 10) + \frac{2}{6 \cdot EI} (2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \cdot 7,5 + 0 \cdot 10) =$$

$$= \frac{60,695}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\sum_i \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{34,028}{EI} + \frac{26,667}{EI} = \frac{60,695}{EI} \text{ м.}$$

Проверка показала, что вычисления были проведены верно.

5. Находим решение системы канонических уравнений:

$$\begin{cases} 7,465X_1 + 1,25X_2 + 34,028 = 0; \\ 1,25X_1 + 4,667X_2 + 26,667 = 0. \end{cases}$$

Для решения системы можно использовать специальные математические программы или комплексы для символьных вычислений, например, Mathematica или MathCad. Решение системы можно найти и вручную:

$$\begin{cases} 7,465X_1 + 1,25X_2 + 34,028 = 0; \\ X_1 = -\frac{26,667}{1,25} - \frac{4,667}{1,25} X_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7,465(-21,334 - 3,734X_2) + 1,25X_2 + 34,028 = 0; \\ X_1 = -21,334 - 3,734X_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -26,624X_2 - 125,23 = 0; \\ X_1 = -21,334 - 3,734X_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = -4,7; \\ X_1 = -21,334 - 3,734 \cdot (-4,7) = -3,77. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -3,77 \text{ кН}; \\ X_2 = -4,7 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для проверки правильности решения системы подставляем найденные вручную значения неизвестных в систему канонических уравнений до ее преобразования:

$$\begin{cases} 7,465 \cdot (-3,77) + 1,25 \cdot (-4,7) + 34,028 = -34,018 + 34,028 \approx 0; \\ 1,25 \cdot (-3,77) + 4,667 \cdot (-4,7) + 26,667 = -26,647 + 26,667 \approx 0. \end{cases}$$

6. На основании принципа независимости действия сил окончательная эпюра изгибающих моментов (рис. 5.18) может быть получена суммированием единичных исправленных эпюр M_1X_1 , M_2X_2 (рис. 5.17) и грузовой эпюры изгибающих моментов:

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_F.$$

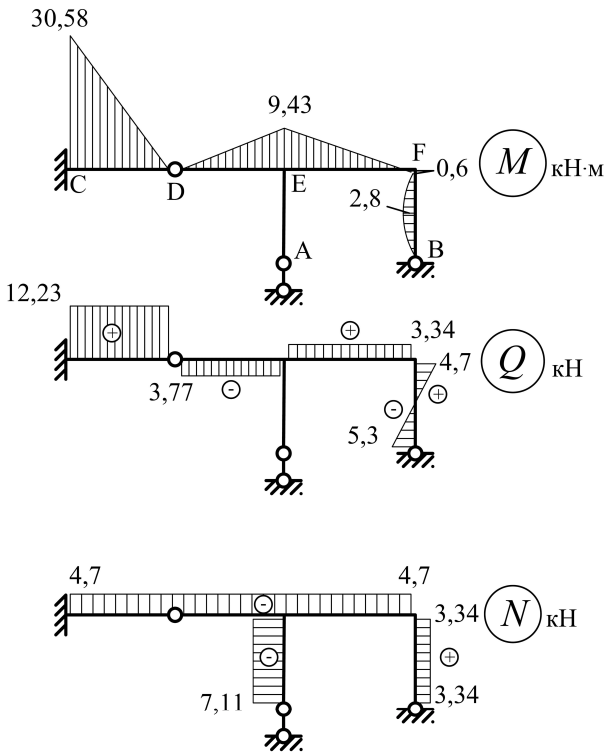


Рис. 5.18

Для проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов M воспользуемся тем фактом, что в заданной системе перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе связей отсутствуют, т. е. должно выполняться условие:

$$\sum \int \frac{MM_S}{EI} dx = 0.$$

Такая проверка называется *кинематической*:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM_S}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 30,58 \right) - \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,43 \right) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} \left(-2,5 \cdot 9,43 - 4 \cdot 2,25 \cdot \left(\frac{9,43 + 0,6}{2} - 0,6 \right) + 2 \cdot 0,6 \right) + \\ &+ \frac{2}{6 \cdot EI} (2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 1 \cdot 2,8 + 0 \cdot 0) = 25,369 - 25,351 \approx 0. \end{aligned}$$

Правильность построения окончательной эпюры M обеспечена с погрешностью

$$\frac{25,369 - 25,351}{25,351} \cdot 100 \% = 0,071 \% < 1 \%$$

7. Окончательная эпюра поперечных сил может быть построена по эпюре изгибающих моментов на основании дифференциальной зависимости между этими внутренними усилиями (см. п. 3.11 [1]).

Для удобства практического применения основные закономерности при переходе от эпюры M к эпюре Q сведены в табл. 5.2.

Обозначаем буквами A, B, C, D, E, F начало и окончание каждого характерного участка на эпюре изгибающих моментов. Находим значения поперечных сил на каждом таком участке:

$$\begin{aligned} Q_{CD} &= + \frac{30,58}{2,5} = 12,23 \text{ кН (п. 2, табл. 5.2);} \\ Q_{EF} &= + \frac{9,43 + 0,6}{3} = 3,34 \text{ кН (п. 4, табл. 5.2);} \end{aligned}$$

$$Q_{DE} = -\frac{9,43}{2,5} = -3,77 \text{ кН (п. 3, табл. 5.2)}$$

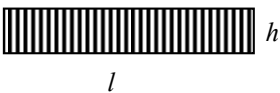

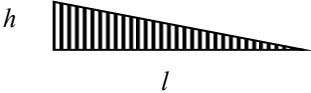

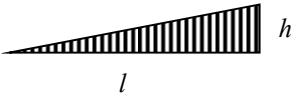



$$Q_{AE} = \frac{0}{2} = 0 \text{ кН (п. 1, табл. 5.2);}$$

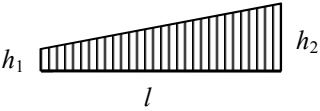

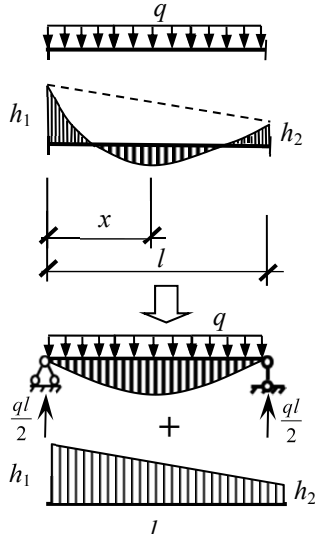
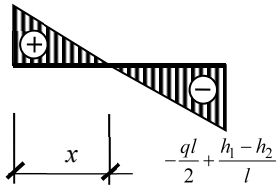
$$Q_{BF}^F = +\frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{0,6 - 0}{2} = 4,7 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BF}^B = -\frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{0,6 - 0}{2} = -5,3 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2).}$$

Замечание. Знак «+» ставится, если поворот оси стержня до касания с эпюрой изгибающих моментов осуществляется по часовой стрелке; знак «-» ставится, если поворот оси стержня до касания с эпюрой изгибающих моментов осуществляется против часовой стрелки.

Таблица 5.2

№ п/п	Фрагмент эпюры M	Фрагмент эпюры Q
1		
2		$\frac{h}{l}$ 
3		$\frac{h}{l}$ 
4		$\frac{h_1 + h_2}{l}$ 

№ п/п	Фрагмент эпюры M	Фрагмент эпюры Q
5		$\frac{h_2 - h_1}{l}$ 
6		$\frac{ql}{2} + \frac{h_1 - h_2}{l}$  $-\frac{ql}{2} + \frac{h_1 - h_2}{l}$

8. Окончательная эпюра продольных сил может быть построена по эпюре поперечных сил, если использовать условия равновесия для каждого узла рамы (рис. 5.19).

Рассматривая равновесие узлов, удобно начинать с того узла, в котором сходится только два стержня с неизвестными усилиями (рис. 5.19, а).

Узел F :

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -N_{EF} - 4,7 = 0; \\ 3,34 - N_{BF} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{EF} = -4,7 \text{ кН}; \\ N_{BF} = 3,34 \text{ кН}. \end{cases}$$

Узел E :

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -N_{DE} - 4,7 - 0 = 0; \\ -3,34 - 3,77 - N_{AE} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{DE} = -4,7 \text{ кН}; \\ N_{AE} = -7,11 \text{ кН}. \end{cases}$$

Вычисленные значения отражены на эпюрах Q и N (рис. 5.18).

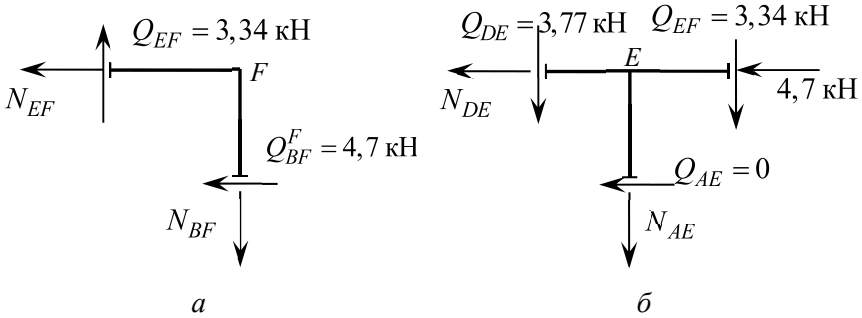


Рис. 5.19

9. Проверим правильность построенных эпюр внутренних усилий. Для этого рассмотрим, удовлетворяются ли условия равновесия всей системы в целом. Покажем систему под действием внешних активных (заданных) и реактивных сил (рис. 5.20, a). Опорные реакции определяем по построенным эпюрам внутренних сил. Для этого рассматриваем равновесие каждой опоры (рис. 5.20, b).

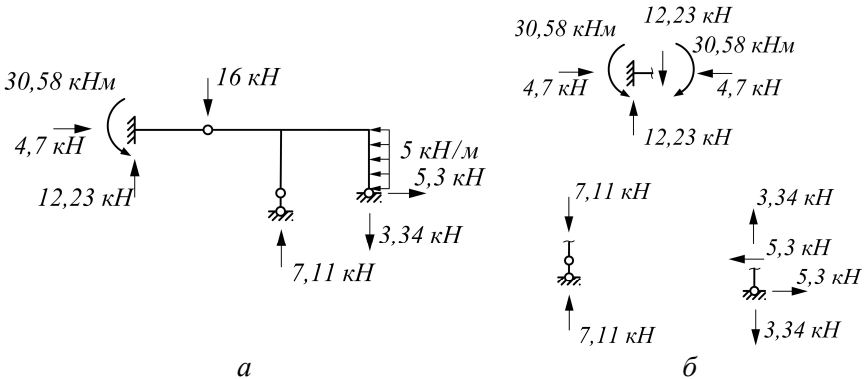


Рис. 5.20

Уравнения равновесия для всей системы в целом выполняются:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4,7 - 5 \cdot 2 + 5,3 = 0; \\ 12,23 - 16 + 7,11 - 3,34 = 0; \\ -30,58 + 16 \cdot 2,5 - 7,11 \cdot 5 + 3,34 \cdot 8 - 5,3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 - 10 = 0; \\ 19,34 - 19,34 = 0; \\ 76,72 - 76,73 = -0,01 \approx 0. \end{cases}$$

Задача 5.3. Для рамы, изображенной на рис. 5.21, построить эпюры внутренних сил. Выполнить проверки правильности вычислений на каждом этапе.

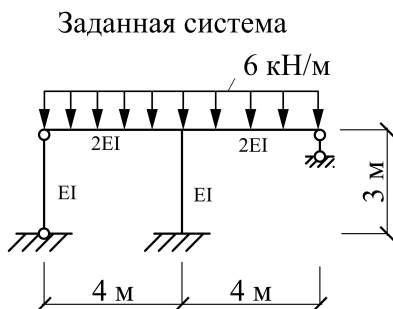


Рис. 5.21

Решение:

1. Количество лишних связей:

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = (2 + 3 + 1) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2,$$

или

$$L = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

2. Удалить две лишние связи можно, например, по способу 1 и 2 табл. 5.1. Основная система № 1 (рис. 5.22, а) в таком случае удобна

для ручного расчета, так как представляет собой Т-образную консольную раму. Однако, такая основная система все же еще не имеет самый рациональный вид, так как не учитывает симметрию рамы и заданной на эту раму нагрузки.

Для усовершенствования основной системы № 1 воспользуемся приемом, который носит название «группирование неизвестных». Неизвестные X_1 (рис. 5.22, б) носят симметричный характер, так как вызывают симметричные деформации, а следовательно, и симметричную эпюру изгибающих моментов. Неизвестные X_2 носят кососимметричный характер, так как вызывают кососимметричные деформации, а следовательно, и эпюра изгибающих моментов будет иметь кососимметричный вид. Неизвестные X_1 и X_2 могут быть подобраны таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$X_1 + X_2 = Y_2;$$

$$X_1 - X_2 = Y_1.$$

Основная система № 2 показана на рис. 5.22, б.

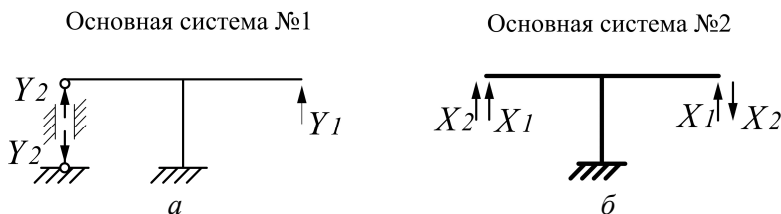


Рис. 5.22

В симметричной по очертанию и жесткостным характеристикам раме заданная симметричная нагрузка может вызывать только симметричные внутренние силы. Следовательно, ненулевое значение могут принимать только симметричные неизвестные X_1 .

3. Система канонических уравнений для дважды статически неопределимой рамы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Однако, учитывая рассуждения п. 2, канонические уравнения приобретают следующий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Для определения коэффициента перед неизвестной X_1 и свободного члена канонического уравнения необходимо построить единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 5.23).

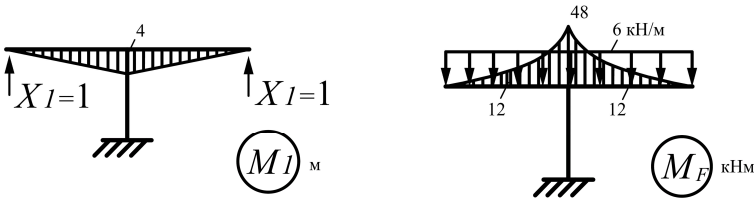


Рис. 5.23

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \left[\frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] \cdot 2 = \frac{21,333}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx = \left[-\frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 48 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 \right) \right] \cdot 2 = -\frac{192}{EI} \text{ м}.$$

5. Находим решение канонического уравнения:

$$21,333X_1 - 192 = 0;$$

$$X_1 = \frac{192}{21,333} = 9 \text{ кН}.$$

6. Окончательная эпюра изгибающих моментов (рис. 5.24) может быть получена суммированием единичной исправленной эпюры $M_1 X_1$ и грузовой эпюры изгибающих моментов:

$$M = M_1 X_1 + M_F.$$

Выполним кинематическую проверку правильности построенной эпюры M :

$$\begin{aligned}\sum \int \frac{MM_S}{EI} dx &= \left[\frac{4}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot 6 + 4 \cdot 12) \right] \cdot 2 = \\ &= \left[\frac{4}{6 \cdot 2EI} (-48 + 48) \right] \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Правильность построения окончательной эпюры M обеспечена.

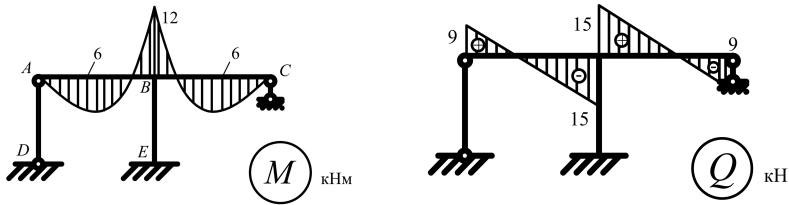


Рис. 5.24

7. Строим эпюру поперечных сил по эпюре изгибающих моментов. Значения поперечных сил на участках (п. 6, табл. 5.2):

$$\begin{aligned}Q_{AB}^A &= +\frac{6 \cdot 4}{2} - \frac{12 - 0}{4} = 9 \text{ кН}; \\ Q_{AB}^B &= -\frac{6 \cdot 4}{2} - \frac{12 - 0}{4} = -15 \text{ кН}; \\ Q_{BC}^B &= +\frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{12 - 0}{4} = 15 \text{ кН}; \\ Q_{BC}^C &= -\frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{12 - 0}{4} = -9 \text{ кН}.\end{aligned}$$

8. Окончательную эпюру продольных сил строим по эпюре поперечных сил (рис. 5.24).

Рассматривая равновесие узлов, удобно начинать с того узла, в котором сходятся только два стержня с неизвестными усилиями (рис. 5.25, а).

(рис. 5.26, б). Система под действием внешних активных (заданных) и реактивных сил отражена на рис. 5.27.

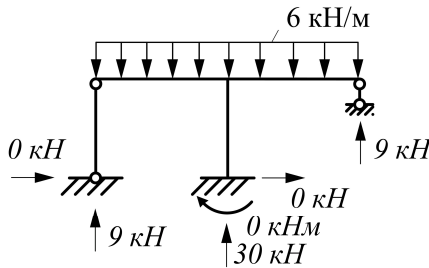


Рис. 5.27

Уравнения равновесия для всей системы в целом выполняются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_E = 0. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0; \\ 9 + 30 + 9 - 6 \cdot 8 = 0; \\ 6 \cdot 4 \cdot 2 - 6 \cdot 4 \cdot 2 + 9 \cdot 4 - 9 \cdot 4 + 0 = 0. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0; \\ 48 - 48 = 0; \\ 84 - 84 = 0. \end{array} \right.$$

5.4. Основные положения метода перемещений. Степень кинематической неопределенности

Здания и сооружения под действием внешней нагрузки и воздействий деформируются. Каждое сечение перемещается в свое новое положение, соответствующее действующей нагрузке. Будем рассматривать перемещения только узловых точек, т. е. точек, где соединяются два и более стержня. Если удастся каким-либо образом определить перемещения всех узлов рамы, то можно будет установить и закон распределения внутренних сил, вызванных этими перемещениями. Такова идея *метода перемещений*: любую сложную стержневую систему представить в виде набора отдельных стержней, реакции которых на различные виды воздействий (силовых, температурных или кинематических) заранее определены и считаются известными. Неизвестными метода перемещений, таким образом, являются неизвестные угловые и линейные перемещения узлов. Их определение и является первостепенной задачей метода.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 5.28, а. Под действием силовых факторов (F и q) оси сооружения переходят в новую, деформированную форму, изображенную на рис. 5.28, б (пунктирной линией изображено состояние сооружения до приложения нагрузки, а сплошной линией – после). Жесткий узел на плоскости в общем случае испытывает перемещения по трем направлениям: два линейных перемещения Z_2 и Z_3 по двум взаимно перпендикулярным направлениям, а также угол поворота Z_1 . В шарнирном узле угловое смещение отсутствует, т. к. шарнир не ограничивает поворот входящих в него стержней друг относительно друга. В общем случае шарнирный узел испытывает только линейные перемещения (Z_4 и Z_5 на рис. 5.28, б). Заданная система, следовательно, имеет пять неизвестных узловых перемещений, т. е. обладает *степенью кинематической неопределенности* равной пяти.

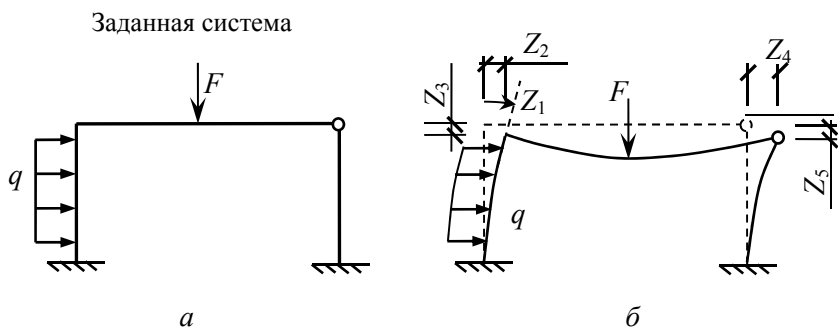


Рис. 5.28

Как видим, даже довольно простая система рамного типа обладает достаточно большим количеством неизвестных по методу перемещений. Для снижения количества неизвестных перемещений в инженерных расчетах вводят следующие допущения:

1) пренебрегают продольными деформациями стержней, т. е. считается, что продольная нагрузка не вызывает изменения длин стержней;

2) пренебрегают сближением концов стержней, вызванным изгибом, т. е. длина хорды, стягивающей концы стержня в изогнутом состоянии, остается равной первоначальной длине стержня до деформации.

Такие допущения позволяют существенно упростить расчеты, выполняемые вручную, что и будет продемонстрировано ниже при решении задач. Однако не следует забывать, что расчеты при помощи компьютерных программ, в основу которых положен метод конечных элементов, позволяют получить решение в более точных постановках.

Степень кинематической неопределимости, таким образом, будем определять по формуле

$$n = n_y + n_{\text{л}}, \quad (5.2)$$

где n_y – количество угловых перемещений системы;

$n_{\text{л}}$ – количество линейных перемещений системы.

Определить число n_y можно визуально, просто подсчитав число жестких узлов в системе, так как именно жесткие узлы обладают угловыми перемещениями. Количество линейных перемещений узлов можно определить, подсчитав число степеней свободы шарнирно-стержневой системы, образованной из заданной системы путем введения шарниров во все узлы, включая опорные:

$$n_{\text{л}} = w^*. \quad (5.3)$$

Для системы, изображенной на рис. 5.29, а:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2,$$

где $n_y = 1$, так как в системе только один узел жесткий;

$n_{\text{л}} = w^* = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$ (шарнирно-стержневая система и направление возможного линейного перемещения ее узлов показаны на рис. 5.29, б).

Замечание. Построение шарнирно-стержневой системы для заданной системы может быть особенно полезно для тех, кто только начинает осваивать метод перемещений. Анализ кинематической (геометрической) подвижности полученной шарнирно-стержневой

системы (в частном случае – механизма) позволяет прочувствовать и показать возможные ее перемещения, а следовательно, обозначить направления, по которым происходят линейные перемещения узлов заданной системы, либо убедиться в том, что линейные перемещения в заданной системе отсутствуют.

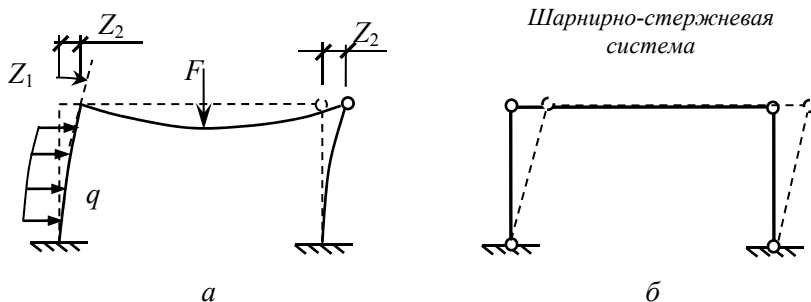


Рис. 5.29

5.5. Основная система метода перемещений. Канонические уравнения

Основными неизвестными метода перемещений, как было указано выше, являются неизвестные линейные и угловые перемещения узлов. Чтобы их определить, необходимо из заданной кинематически неопределимой системы получить кинематически определимую (систему с «нулевыми» перемещениями узлов). Для этого в узлы заданной системы вводятся *дополнительные связи*, устраняющие возможные узловые перемещения:

- 1) *плавающая заделка* – связь, которая устраняет угловые перемещения жестких узлов, но при этом не ограничивает линейные перемещения;
- 2) *стерженек (шарнирно-подвижная опора)* – связь, которая устраняет одно линейное перемещение в направлении добавленной связи.

Условные изображения дополнительных связей, а также направления реакций в них, показаны в табл. 5.3.

Дополнительные связи, вводимые при формировании основной системы метода перемещений

Название связи	Изображение связи
Простая линейная связь (шарнирно-подвижная опора)	
Плавающая заделка (подвижное защемление)	

Основная система метода перемещений формируется введением дополнительных связей в узлы заданной системы с указанием направлений неизвестных перемещений Z (рис. 5.30, а). Основная система представляет собой, по сути, набор отдельных стержней под заданной нагрузкой с неизвестными перемещениями их концов.

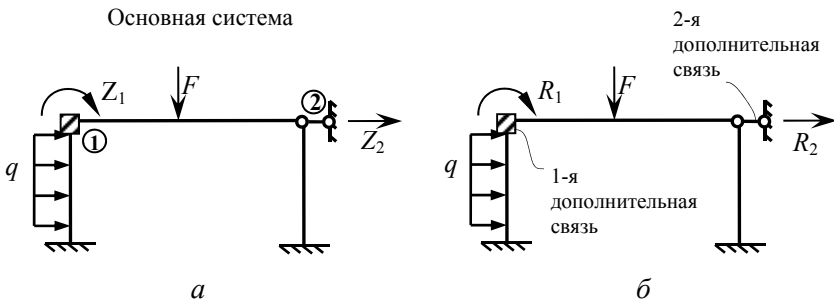


Рис. 5.30

Эквивалентность заданной и основной систем обеспечивается выполнением условий статики для дополнительных введенных связей основной системы. Суммарная реакция R в каждой такой связи от действия внешней нагрузки, а также неизвестных перемещений Z , должна равняться нулю.

Для рамы (рис. 5.30, б), рассматриваемой в качестве примера:

$$\begin{cases} R_1 = 0; \\ R_2 = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

где R_1, R_2 – реакции в первой и второй дополнительных связях основной системы, соответственно.

В расчетах линейных систем считается справедливым принцип независимости действия сил, что приводит к развернутому виду условий:

$$\begin{cases} R_{11} + R_{12} + R_{1F} = 0; \\ R_{21} + R_{22} + R_{2F} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

где R_{ik} – реакция в i -й дополнительной связи основной системы, вызванная перемещением Z_k ;

R_{iF} – реакция в i -й дополнительной связи основной системы, вызванная внешней нагрузкой.

Задавая, например, единичное значение основных неизвестных, получаем запись системы канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

где r_{ik} – реакция в i -й дополнительной связи основной системы, вызванная перемещением $Z_k = 1$. Здесь, строчная буква r используется, чтобы подчеркнуть смысл обозначаемой величины – реакция от единичного перемещения.

Для определения реакций в дополнительно введенных связях основной системы применяются статический и кинематический методы.

Статический метод подразумевает то, что любая отсеченная часть основной системы должна находиться в равновесии, а следовательно, должны выполняться и уравнения равновесия для отсеченной части:

1) $\sum M = 0$ – если искомым является реактивный момент в плавающей заделке;

2) $\sum X = 0$ или $\sum Y = 0$ – если искомым является реактивная сила в связи, препятствующей линейному перемещению узлов системы.

При использовании статического метода строятся эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений, вызываемые действием единичных значений неизвестных и действием внешней нагрузки. Для построения этих эпюр используют таблицы эпюр для однопролетных статически неопределимых балок (см. [8], стр. 277–278).

Кинематический метод определения реакций основан на теоремах о взаимности реакций, реакций и перемещений [2]. Покажем без вывода формальную запись:

$$\begin{aligned}r_{ik} = r_{ki} &= \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} dx; \\ R_{iF} &= -\sum \int \frac{M_i M_F^*}{EI} dx.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Замечание. При расчетах «вручную», как правило, применяют статический метод, так как при своей «наглядности» он позволяет находить решение минимальным количеством алгебраических вычислений. Кинематический метод в таких случаях удобнее использовать для проверки правильности вычислений статическим методом.

Порядок расчета по методу перемещений логически соответствует порядку расчета по методу сил [2, 4, 5]. Перечислим основные этапы метода перемещений:

- 1) определение степени кинематической неопределимости;
- 2) выбор основной системы метода перемещений;
- 3) запись канонических уравнений метода перемещений в общем виде;
- 4) определение и проверка правильности коэффициентов и свободных членов канонических уравнений;
- 5) решение системы канонических уравнений;
- 6) построение окончательных эпюр внутренних усилий и проверка их правильности.

Продемонстрируем на примере решения простейших задач изложенные выше положения.

Задача 5.4. Для рамы, изображенной на рис. 5.31, построить эпюры внутренних сил.

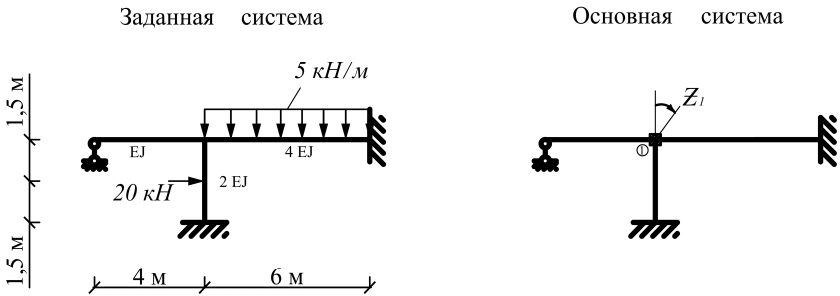


Рис. 5.31

Решение:

1. Степень кинематической неопределимости

$$n = n_y + n_d = 1 + 0 = 1,$$

где $n_y = 1$ – определяется как количество жестких узлов рамы;

$n_d = w^* = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 9 - 9 = 0$, т. е. линейные перемещения отсутствуют.

2. Основная система метода перемещения формируется путем введения дополнительных связей, устраняющих перемещения узлов рамы. В данном случае необходимо добавить плавающую заделку в жесткий узел.

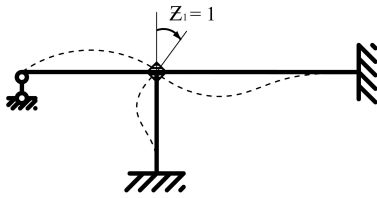
Основная система отражена на рис. 5.31.

3. Система канонических уравнений для кинематически неопределимой (один раз) рамы обращается в уравнение:

$$r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0.$$

4. Единичная и грузовая реакции, r_{11} и R_{1F} , могут быть найдены статическим способом.

Для этого основная система рассматривается в двух состояниях: единичном (под действием единичной неизвестной $Z_1 = 1$) и грузовом (под действием внешней нагрузки). Для каждого состояния строится эпюра изгибающих моментов (рис. 5.32, рис. 5.33).



Деформированное состояние "1"

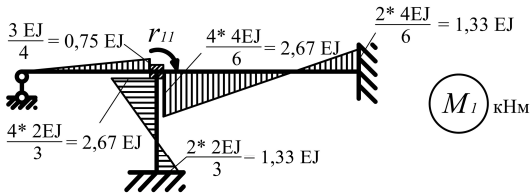
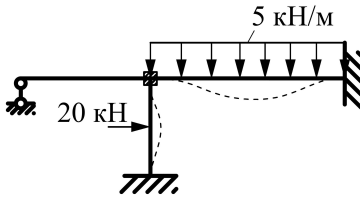


Рис. 5.32



Деформированное состояние "F"

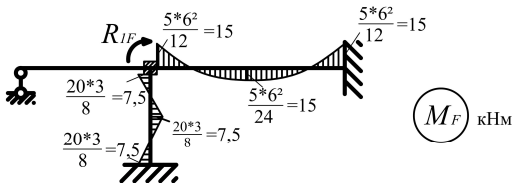


Рис. 5.33

Вырезаем узлы, содержащие плавающую заделку, из каждой эпюры и рассматриваем их равновесие (рис. 5.34).

Для состояния «1»:

$$\sum M = 0: r_{11} - 2,67EI - 2,67EI - 0,75EI = 0: r_{11} = 6,09EI \text{ кНм,}$$

для состояния «F»:

$$\sum M = 0: R_{1F} + 15 - 5,5 = 0: R_{1F} = -7,5 \text{ кНм.}$$

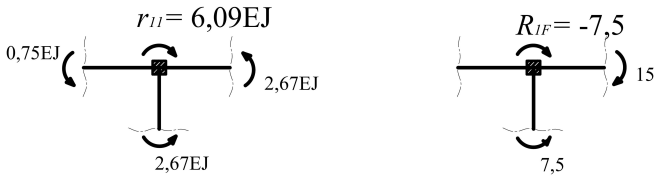


Рис. 5.34

5. Находим решение канонического уравнения:

$$Z_1 = \frac{7,5}{6,09EI} = \frac{1,23}{EI} \text{ рад.}$$

6. Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 5.35) построим на основании принципа независимости действия сил:

$$M = M_1 Z_1 + M_F.$$

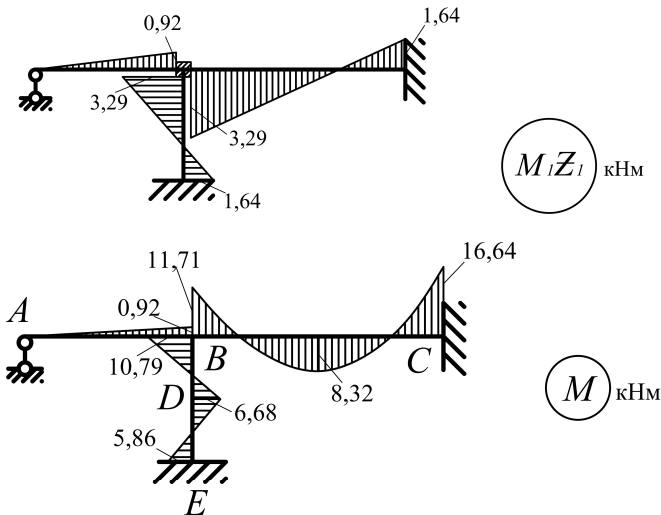


Рис. 5.35

Чтобы оценить правильность построенной эпюры, выполним статическую и кинематическую проверки. Их смысл и порядок проведения соответствует проверкам правильности построения эпюр изгибающих моментов по методу сил (п. 5.3).

Статическая проверка состоит в проверке равновесия узлов рамы:

$$\sum M = 0: 11,71 - 10,79 - 0,92 = 0: 11,71 - 11,71 = 0.$$

Кинематическая проверка состоит в выполнении условия:

$$\sum \int \frac{MM_s^*}{EI} dx = 0.$$

Здесь M_s^* – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, построенная в *основной системе метода сил* (рис. 5.36, рис. 5.37) от действия единичных неизвестных метода сил.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM_s^*}{EI} dx &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,92 \right) + \\ &+ \frac{1,5}{6 \cdot 2EI} \left(-1 \cdot 5,86 + 4 \cdot \frac{1+2,5}{2} \cdot \left(\frac{5,86+6,68}{2} - 5,86 \right) + 2,5 \cdot 6,68 \right) + \\ &+ \frac{1,5}{6 \cdot 2EI} \left(2,5 \cdot 6,68 - 4 \cdot \frac{4+2,5}{2} \cdot \left(\frac{6,68+10,79}{2} - 6,68 \right) - 4 \cdot 10,79 \right) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 4EI} \left(-8 \cdot 11,71 + 4 \cdot \frac{8+17}{2} \cdot 8,32 - 17 \cdot 16,64 \right) = \\ &= -4,907 + 1,714 - 6,647 + 9,86 = 11,574 - 11,554 \approx 0. \end{aligned}$$

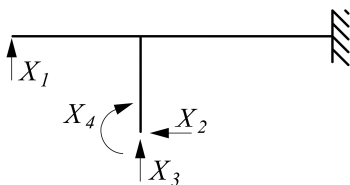


Рис. 5.36

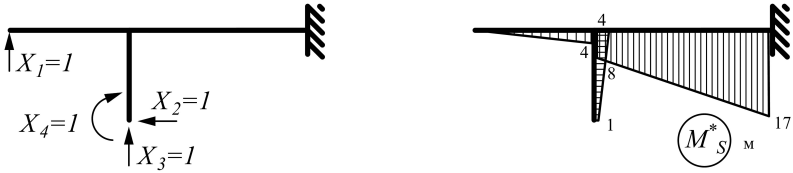


Рис. 5.37

Правильность построения окончательной эпюры M обеспечена с погрешностью

$$\frac{11,574 - 11,554}{11,554} \cdot 100\% = 0,17\% < 1\%.$$

Эпюру поперечных сил (рис. 5.38) построим по эпюре изгибающих моментов на основании табл. 5.2.

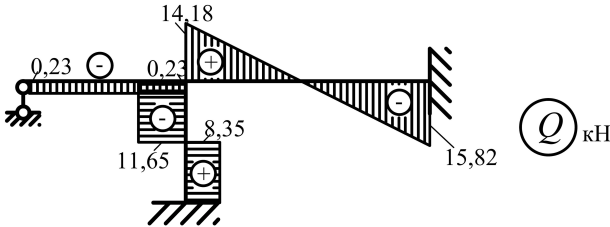


Рис. 5.38

Находим значения поперечных сил на каждом участке:

$$Q_{AB} = -\frac{0,92}{4} = -0,23 \text{ кН (п. 2, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BD} = -\frac{10,79 + 6,68}{1,5} = -11,65 \text{ кН (п. 4, табл. 5.2);}$$

$$Q_{DE} = \frac{5,86 + 6,68}{1,5} = 8,35 \text{ кН (п. 4, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BC}^B = +\frac{5 \cdot 6}{2} - \frac{16,64 - 11,71}{6} = 14,18 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BC}^C = -\frac{5 \cdot 6}{2} - \frac{16,64 - 11,71}{6} = -15,82 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2).}$$

Эпюру продольных сил строим по эпюре поперечных сил. Условие равновесия для вырезанного узла B (рис. 5.39):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -N_{BC} + 11,65 - 0 = 0; \\ -0,23 - 14,18 - N_{BD} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{BC} = 11,65 \text{ кН}; \\ N_{AE} = -14,41 \text{ кН}. \end{cases}$$

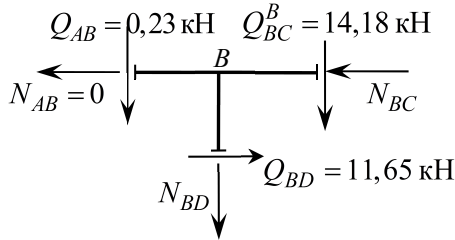


Рис. 5.39

Вычисленные значения отражены на эпюре N (рис. 5.40).

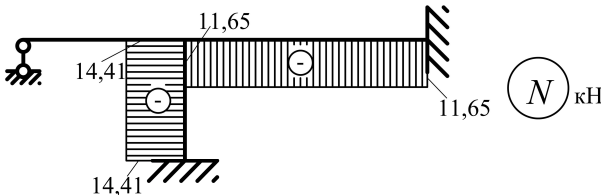


Рис. 5.40

Правильность построенных эпюр внутренних усилий проверяем статическим способом.

Система под действием внешних активных (заданных) и реактивных сил отражена на рис. 5.41.

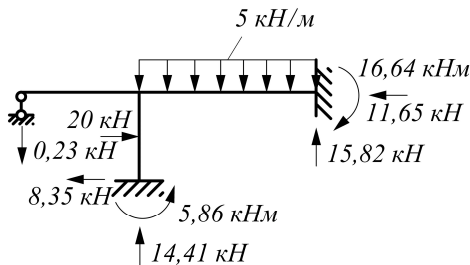


Рис. 5.41

Уравнения равновесия для всей системы в целом выполняются:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20 - 11,65 - 8,35 = 0; \\ -0,23 + 14,41 + 15,82 - 5 \cdot 6 = 0; \\ -5 \cdot 6 \cdot 3 + 16,64 - 20 \cdot 1,5 - 0,23 \cdot 10 + \\ + 14,41 \cdot 6 + 8,35 \cdot 3 - 5,86 = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 20 - 20 = 0; \\ 30,23 - 30,23 = 0; \\ 128,15 - 128,16 \approx 0. \end{cases}$$

Задача 5.5. Для рамы, изображенной на рис. 5.42, построить эпюры внутренних сил.

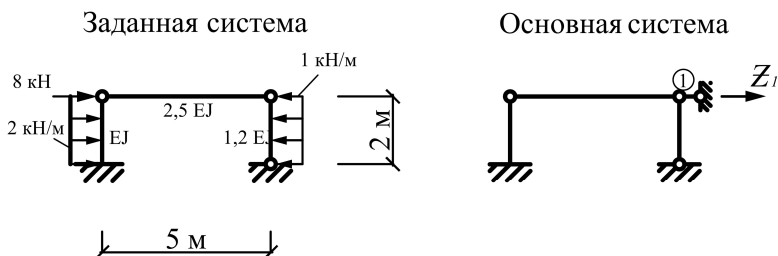


Рис. 5.42

Решение:

Несмотря на то, что заданная рама является статически определимой, расчет будем вести методом перемещений, демонстрируя при этом его универсальность.

1. Степень кинематической неопределимости:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 0 + 1 = 1,$$

где $n_y = 0$ – так как жестких узлов эта система не имеет;

$n_{\text{л}} = w^* = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 9 - 8 = 1$ – линейные перемещения отсутствуют.

2. Для формирования основной системы в данном случае необходимо добавить стерженек (шарнирно-подвижную опору), устраняющую перемещение узлов рамы.

Основная система отражена на рис. 5.42.

3. Каноническое уравнение метода перемещений:

$$r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0.$$

4. Эпюры изгибающих моментов в основной системе, вызываемые единичным значением неизвестного перемещения $Z_1 = 1$ и действием внешней нагрузки, соответственно, изображены на рис. 5.43.

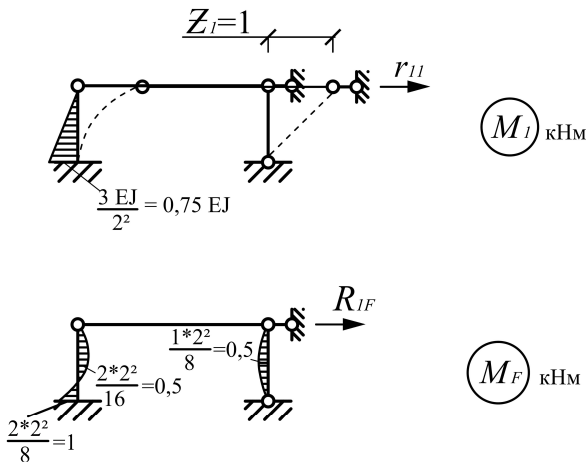


Рис. 5.43

Фрагмент отсеченной части системы, содержащей дополнительную связь, показан на рис. 5.44 для каждого из рассматриваемых состояний.

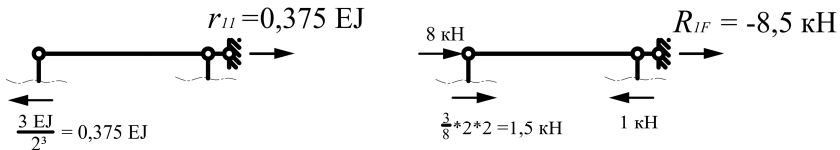


Рис. 5.44

Условия равновесия отсеченных фрагментов позволяют определить реакции в дополнительной связи:

– для вспомогательного, «единичного», состояния:

$$\sum X = 0: r_{11} - 0,375EI = 0: r_{11} = 0,375EI \text{ кН};$$

– для грузового состояния:

$$\sum X = 0: R_{1F} + 8 + 1,5 - 1 = 0: R_{1F} = -8,5 \text{ кН}.$$

5. Находим решение канонического уравнения:

$$Z_1 = \frac{8,5}{0,375EI} = \frac{22,667}{EI} \text{ рад}.$$

6. Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 5.45) построим на основании принципа независимости действия сил:

$$M = M_1 Z_1 + M_F.$$

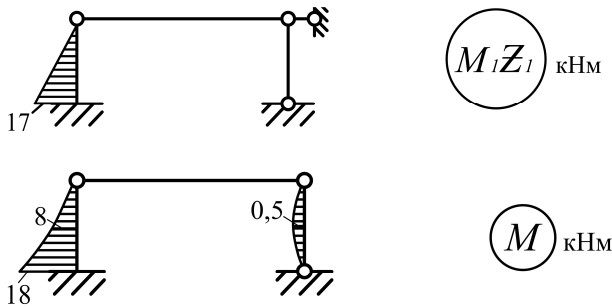


Рис. 5.45

Для построения эпюр поперечных и продольных сил достаточно произвести расчет заданной системы на действие внешней нагрузки. На рис. 5.46 показана схема взаимодействия элементов, силовые факторы связывающие элементы этой схемы.

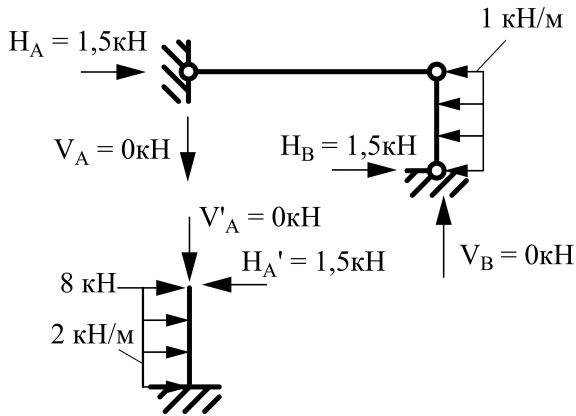


Рис. 5.46

Окончательные эпюры поперечных и продольных сил, значения которых получены по методу сечений, отражены на рис. 5.47.

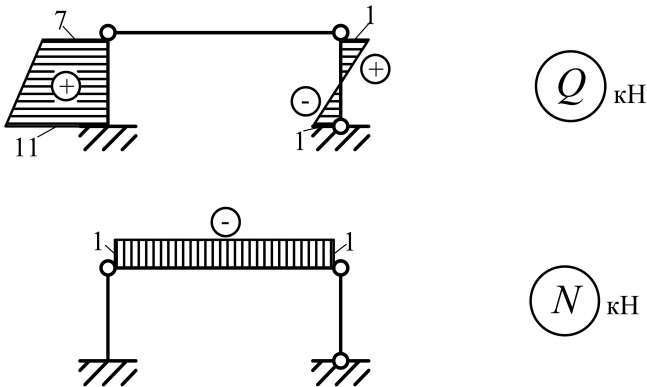


Рис. 5.47

Задача 5.6. Для рамы, изображенной на рис. 5.48, построить эпюры внутренних сил. Выполнить проверки правильности вычисления.

Заданная система

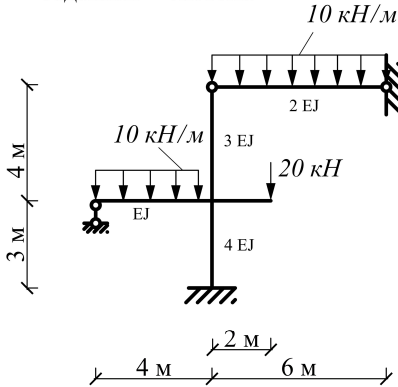


Рис. 5.48

Решение:

1. Степень кинематической неопределенности

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2,$$

где $n_y = 1$ – соответствует одному жесткому узлу рамы;

$n_{\text{л}} = w^* = 3Д - 2Ш - С_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 12 - 11 = 1$ – соответствует одному линейному смещению, направление которого показано на рис. 5.49, а.

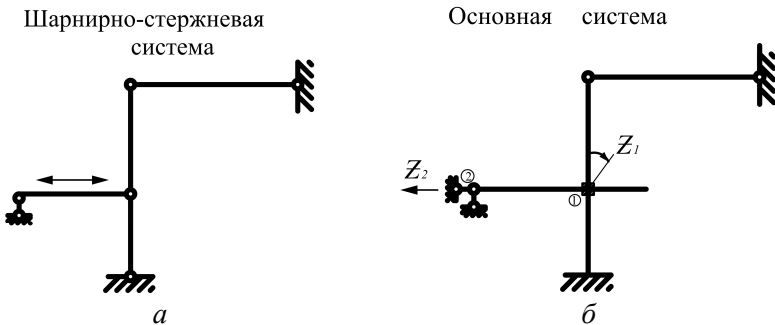


Рис. 5.49

Замечание. При формировании шарнирно-стержневой системы допускается отбрасывать статически определимую консоль (рис. 5.49, а), т. к. для определения внутренних сил в ней достаточно использо-

вать метод сечений. Не учитывая при подсчете перемещение свободного конца консоли $n_{л} = w^*$, можно снизить количество неизвестных метода перемещений, не меняя при этом суть расчета.

2. Для формирования основной системы метода перемещений вводятся дополнительные связи, устраняющие возможные перемещения узлов рамы. В данном случае необходимо добавить плавающую заделку 1 в жесткий узел и стержнек 2 по направлению линейного перемещения.

Основная система отражена на рис. 5.49, б.

3. Система канонических уравнений для дважды кинематически неопределимой рамы имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0. \end{cases}$$

4. Найдем единичные r_{ik} ($i = 1, 2; k = 1, 2$) и грузовые R_{iF} ($i = 1, 2$) реакции статическим и кинематическим способами и сопоставим полученные результаты.

Рассмотрим основную систему во вспомогательных единичных (под действием единичных неизвестных $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$, рис. 5.50) и грузовом состоянии (под действием внешней нагрузки, рис. 5.51). Для каждого состояния строится эпюра изгибающих моментов (рис. 5.50, рис. 5.51).

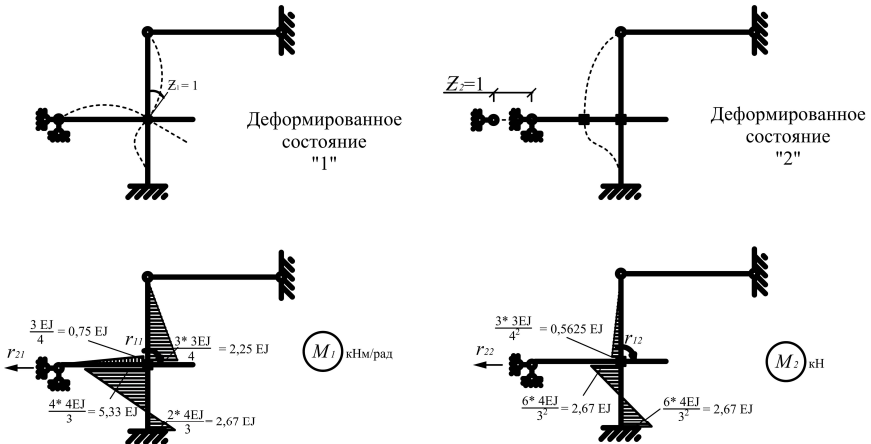


Рис. 5.50

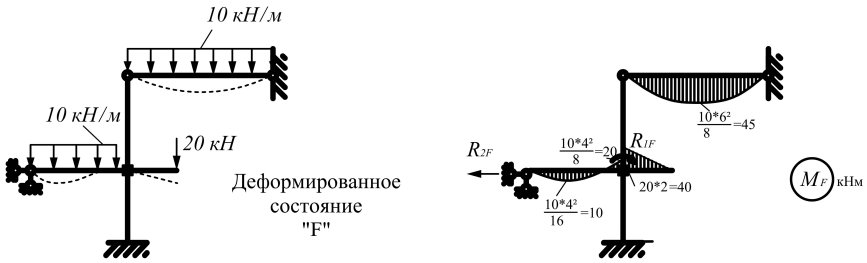


Рис. 5.51

Для определения единичных и грузовых реакций статическим способом в связи № 1 вырезаются узлы, содержащие плавающую заделку, из каждой эпюры и рассматривается их равновесие (рис. 5.52, а).

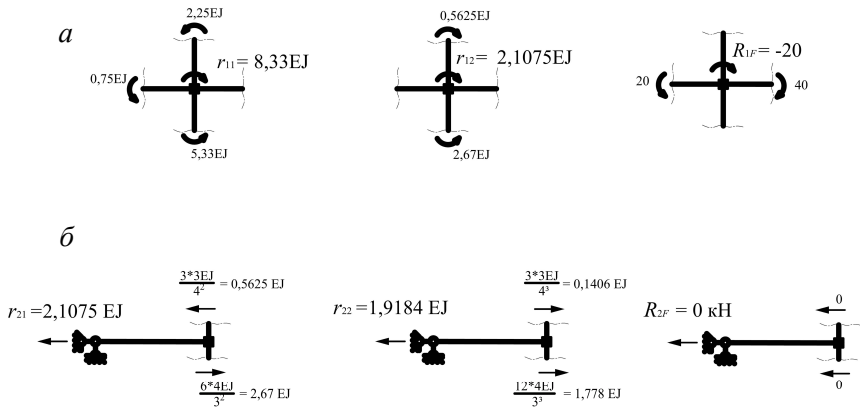


Рис. 5.52

Для состояния «1»:

$$\sum M = 0: r_{11} - 2,25EI - 0,75EI - 5,33EI = 0: r_{11} = 8,33EI \text{ кНм.}$$

Для состояния «2»:

$$\sum M = 0: r_{12} - 2,67EI + 0,5625EI = 0: r_{12} = 2,1075EI \text{ кНм.}$$

Для состояния «F»:

$$\sum M = 0: R_{1F} + 40 - 20 = 0: R_{1F} = -20 \text{ кНм.}$$

Для определения единичных и грузовых реакций в связи № 2 отсекаем фрагмент системы, содержащий эту связь, так, чтобы поперечные силы в разрезаемых стрелках были параллельны искомой реакции (рис. 5.52, б). Условия равновесия отсеченных фрагментов позволяют определить реакции в дополнительной связи:

– для состояния «1»:

$$\sum X = 0: -r_{21} - 0,5625EI + 2,67EI = 0: r_{11} = 2,1075EI \text{ кН};$$

– для состояния «2»:

$$\sum X = 0: -r_{22} + 1,778EI + 0,1406EI = 0: r_{22} = 1,9184EI \text{ кН};$$

– для грузового состояния:

$$\sum X = 0: -R_{2F} - 0 - 0 = 0: R_{2F} = 0 \text{ кН}.$$

Для определения коэффициентов канонических уравнений кинематическим способом используем выражения (5.7):

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,75EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75EI \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,25EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,25EI \right) + \\ &\quad + \frac{3}{6 \cdot 4EI} \left(5,33^2 + 4 \cdot \left(\frac{5,33 + 2,67}{2} - 2,67 \right)^2 + 2,67^2 \right) = 8,33EI; \\ r_{12} = r_{21} &= \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,25EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5625EI \right) + \frac{3}{6 \cdot 4EI} \times \\ &\quad \times \left(5,33EI \cdot 2,67EI + 4 \cdot \left(\frac{5,33EI + 2,67EI}{2} - 2,67EI \right) \cdot 0 + 2,67EI \cdot 2,67EI \right) = \\ &\quad = 2,1075EI; \\ r_{22} &= \sum \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,5625EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5625EI \right) + \\ &\quad + \frac{3}{6 \cdot 4EI} (2,67EI \cdot 2,67EI + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 2,67EI \cdot 2,67EI) = 1,92EI. \end{aligned}$$

Для определения свободных членов канонических уравнений необходимо выбрать основную систему метода сил и загрузить ее заданной внешней нагрузкой (рис. 5.53). Грузовая эпюра изгибающих моментов метода сил M_F^* показана на рис. 5.54.

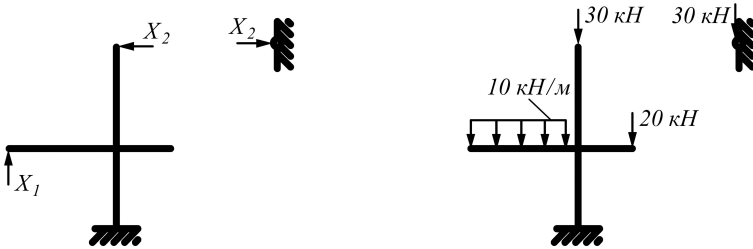


Рис. 5.53

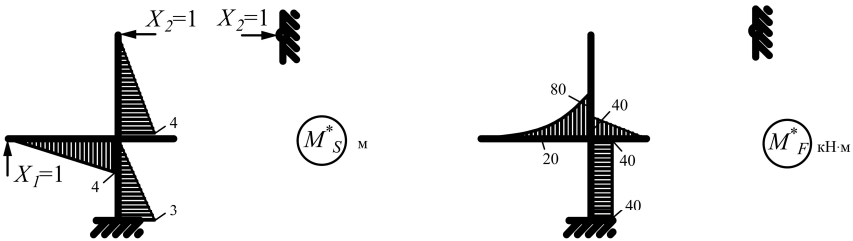


Рис. 5.54

$$R_{1F} = -\sum \int \frac{M_1 M_F^*}{EI} dx = -\frac{4}{6EI} \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{0,75EI}{2} \cdot 20 + 0,75EI \cdot 80 \right) -$$

$$-\frac{3}{6 \cdot 4EI} \left(-5,33EI \cdot 40 - 4 \cdot \left(\frac{5,33EI + 2,67EI}{2} - 2,67EI \right) \cdot 40 + 2,67EI \cdot 40 \right) = 8,33EI;$$

$$R_{2F} = -\sum \int \frac{M_2 M_F^*}{EI} dx = -\frac{3}{6 \cdot 4EI} \left(-2,67EI \cdot 40 + 4 \cdot 0 \cdot 40 + 2,67EI \cdot 40 \right) = 0.$$

5. Находим решение канонического уравнения:

$$\begin{cases} 8,33EIZ_1 + 2,1075EIZ_2 - 20 = 0; \\ 2,1075EIZ_1 + 1,9184EIZ_2 = 0. \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{3,325}{EI} \text{ рад}; \quad Z_2 = -\frac{3,653}{EI} \text{ м.}$$

На рис. 5.55 показаны исправленные единичные эпюры, т. е. эпюры в основной системе, вызванные действительными значениями Z_1 и Z_2 .

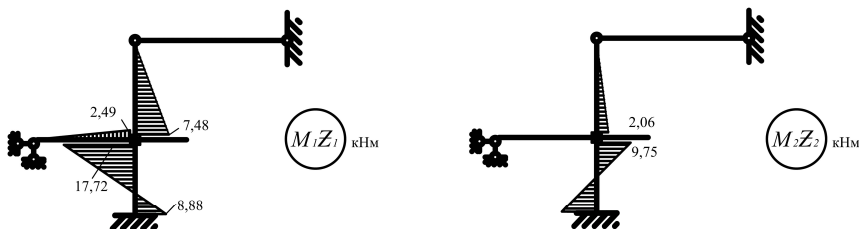


Рис. 5.55

6. Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 5.6) построим на основании принципа независимости действия сил:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_F.$$

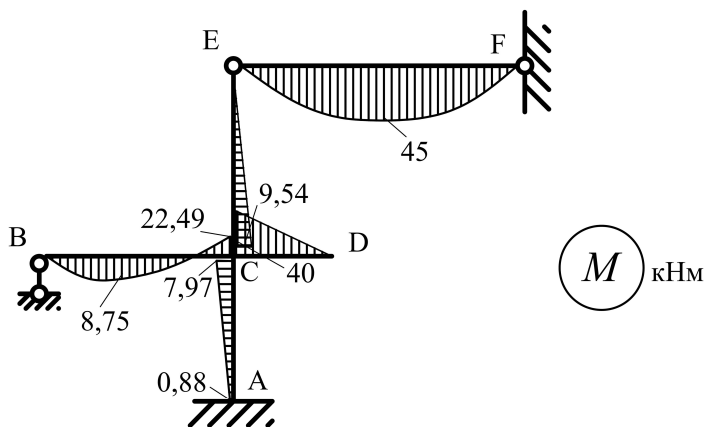


Рис. 5.56

Чтобы оценить правильность построенной эпюры, выполним статическую и кинематическую проверки. Их смысл и порядок проведения соответствует проверкам правильности построения эпюр изгибающих моментов по методу сил (п. 5.3).

Статическая проверка – проверка равновесия узлов рамы:

$$\sum M = 0: 40 - 9,54 - 22,49 - 7,97 = 0: 40 - 40 = 0.$$

Кинематическая проверка – проверка выполнения условия:

$$\sum \int \frac{MM_s^*}{EI} dx = 0.$$

Здесь M_s^* – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, построенная в *основной системе метода сил* (рис. 5.57) от действия единичных неизвестных метода сил (рис. 5.58).

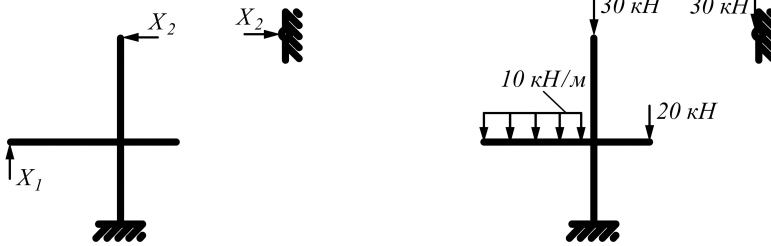


Рис. 5.57



Рис. 5.58

Правильность построения окончательной эпюры M :

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{MM_s^*}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,54 \right) + \frac{4}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 8,75 \cdot 2 - 22,49 \cdot 4) - \\ &= \frac{3}{64EI} (7,97 \cdot 0 + 4 \cdot 4,425 \cdot 1,5 + 0,88 \cdot 3) = \\ &= 11,96 - 13,31 - 3,65 = 11,96 - 11,96 = 0. \end{aligned}$$

Эпюру поперечных сил (рис. 5.59) построим по эпюре изгибающих моментов на основании табл. 5.2.

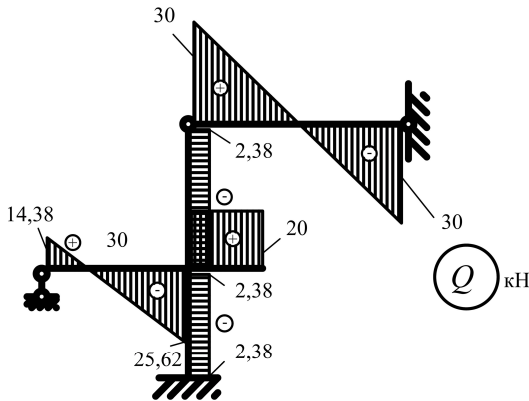


Рис. 5.59

Находим значения поперечных сил на каждом участке:

$$Q_{AB} = -\frac{7,97 - 0,88}{3} = -2,38 \text{ кН (п. 4, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BC}^B = +\frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{-22,49 - 0}{4} = 14,38 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

$$Q_{BC}^C = -\frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{-22,49 - 0}{4} = -25,62 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

$$Q_{CE} = -\frac{9,54}{4} = -2,38 \text{ кН (п. 2, табл. 5.2);}$$

$$Q_{CD} = +\frac{40}{2} = 20 \text{ кН (п. 2, табл. 5.2);}$$

$$Q_{EF}^E = +\frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{0 - 0}{4} = 30 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

$$Q_{EF}^F = -\frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{0 - 0}{4} = -30 \text{ кН (п. 6, табл. 5.2);}$$

Эпюру продольных сил строим по эпюре поперечных сил.

Условие равновесия для вырезанного узла E (рис. 5.60):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{EF} + 2,38 = 0; \\ -30 - N_{CE} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{EF} = -2,38 \text{ кН}; \\ N_{CE} = -30 \text{ кН}. \end{cases}$$

Условие равновесия для вырезанного узла C (рис. 5.60):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -N_{BC} + 2,38 - 2,38 = 0; \\ -30 - 20 - 25,62 - N_{AC} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{BC} = 0 \text{ кН}; \\ N_{AC} = -75,62 \text{ кН}. \end{cases}$$

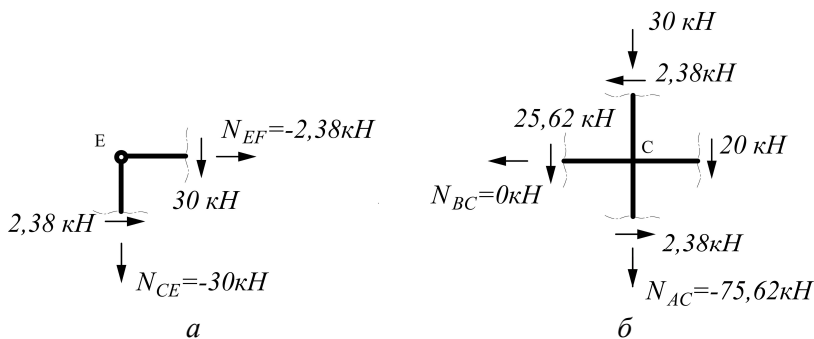


Рис. 5.60

Вычисленные значения отражены на эпюре N (рис. 5.61).

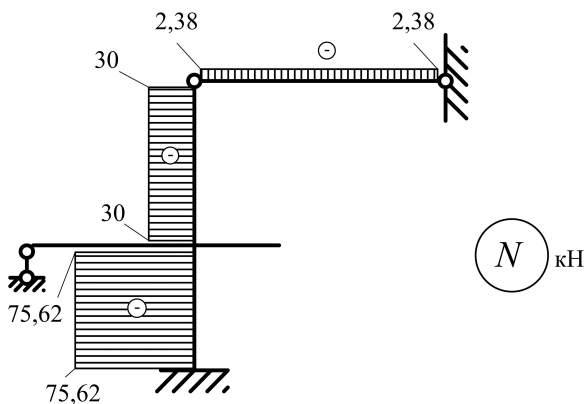


Рис. 5.61

Правильность построенных эпюр внутренних усилий проверяем статическим способом. Система под действием внешних активных (заданных) и реактивных сил отражена на рис. 5.62.

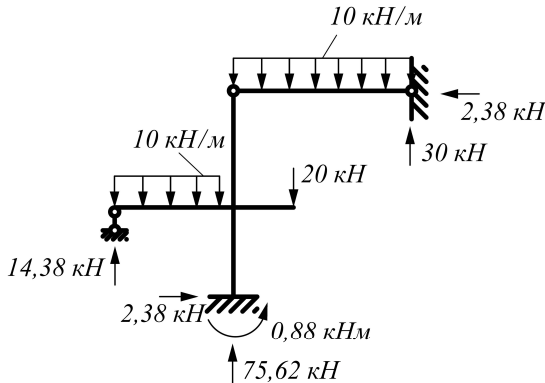


Рис. 5.62

Уравнения равновесия для всей системы в целом выполняются:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_A = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2,38 - 2,38 = 0; \\ 14,38 + 75,62 + 30 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 6 - 20 = 0; \\ 10 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 14,38 \cdot 4 - 30 \cdot 6 - 2,38 \cdot 7 - 0,88 = 0. \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 20 - 20 = 0; \\ 120 - 120 = 0; \\ 277,52 - 277,54 \approx 0. \end{cases}$$

Правильность расчета подтверждается с достаточной точностью.

Замечание. Все расчеты проводятся с ограниченной точностью. Инженерные расчеты, обычно, проводят с учетом 3–4 значащих цифр. Оставлять большее число значащих цифр нецелесообразно, так как исходные данные (исходные размеры и значения геометрических характеристик) не обеспечивают большую точность и поэтому результаты с большим числом значащих цифр нельзя считать более достоверными. Точность результата оценивают, обычно, относя не-

вязку (разность между приближенным и точным значением) к точному или приближенному значению. Однако, если результатом вычислений должен быть ноль, такой подход невозможен. В этом случае отдельно подсчитывают положительные S_+ и отрицательные S_- слагаемые и абсолютное значение невязки и относят невязку к сумме положительных (или отрицательных) слагаемых:

$$\delta = \frac{|S_+ + S_-|}{S_-} \cdot 100\% = \frac{|\Delta S|}{S_+} \cdot 100\%.$$

Погрешность инженерных расчетов обычно не должна превышать 3 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юркова, К. В. Техническая механика: практикум : учебное пособие для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства» / К. В. Юркова. – Минск : БНТУ, 2019. – 88 с.
2. Борисевич, А. А. Строительная механика : учебное пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.
3. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев : Наука, 1975. – 400 с.
4. Смирнов, В. А. Строительная механика : учебник для вузов / В. А. Смирнов, С. А. Иванов, М. А. Тихонов. – М. : Стройиздат, 1984. – 208 с.
5. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем : учебное пособие / А. В. Яровая; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
6. Гурин, В. В. Механика : лекции / В. В. Гурин. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 276 с.
7. Каримов, Р. И. Прикладная механика. Раздел «Сопротивление материалов» : учебное пособие / Р. И. Каримов, Н. А. Максудова. – Ташкент : ТашГТУ, 2003. – 139 с.
8. Дарков, А. В. Строительная механика : учебник для вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высшая школа, 1986. – 607 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
4. Расчет статически определимых систем	4
4.1. Общие сведения о статически определимых системах.....	4
4.2. Виды статически определимых балок. Понятие о расчете многопролетных балок.....	5
4.3. Виды статически определимых рам. Расчет консольных ломаных стержней	10
4.4. Расчет простых и трехшарнирных рам.....	15
4.5. Расчет простых ферм по методу вырезания узлов.....	20
4.6. Частные случаи равновесия узлов ферм. Определение продольных сил в стержнях ферм по методу сечений	24
4.7. Виды перемещений и их обозначения	28
4.8. Формула Максвелла – Мора и общий порядок вычисления перемещений от внешней нагрузки	30
4.9. Техника определения перемещений в статически определимых балках и рамах от внешней нагрузки	32
4.10. Техника определения перемещений в статически определимых фермах от внешней нагрузки	48
5. Статически неопределимые системы. Метод сил и метод перемещений для расчета статически неопределимых стержневых систем.....	53
5.1. Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости плоских стержневых систем	53
5.2. Сущность метода сил. Основная система и основные неизвестные метода сил	56
5.3. Система канонических уравнений метода сил. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Построение окончательных эпюр усилий и их проверка	64
5.4. Основные положения метода перемещений. Степень кинематической неопределимости.....	82
5.5. Основная система метода перемещений. Канонические уравнения	85
Литература	110

Учебное издание

ЮРКОВА Ксения Владимировна

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
СТАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебно-методическое пособие
для студентов направления специальности
1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства
(строительство)» в рамках специальности 1-27 01 01
«Экономика и организация производства (по направлениям)»

Редактор *Е. И. Бенищевич*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 31.03.2022. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 5,09. Тираж 300. Заказ 727.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.