

го назначения. – Минск: Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 1999. – 31 с.

10. Г у с а к, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – М.: Тетрасистем, 2006. – 545 с.

REFERENCES

1. Z e v e k e, G. V., Ionkin, P. A., Netushil, A. V., & Strakhov, S. V. (1975) *Fundamentals of Circuit Theory*. Moscow, Energija. 752 p. (in Russian).
2. Z h e l e z k o, Yu. S. (1985) *Compensation of Reactive Power and Increasing of Electric Power Quality*. Moscow, Energoatomizdat. 224 p. (in Russian).
3. SN (Structural Norms) 174–75. Instruction in Design of Electric Power Supply System of Industrial Plants. Moscow, Strojizdat, 1976. 56 p. (in Russian).
4. F e d o r o v, A. A., & Kameneva, V. V. (1984) *Fundamentals of Electric Power Supply of Industrial Plants*. Moscow, Energoatomizdat. 472 p. (in Russian).
5. R e g u l a t i o n s of Electric Power Systems. 6th ed. Moscow, Energoatomizdat, 1985. 640 p. (in Russian).
6. I n s t r u c t i o n a l and Informational Materials in Electrical Plant Design. Moscow, Russian National Scientific-Research and Design Institute “Tyazhpromelektroproekt”, 1993, 2. 80 p. (in Russian).
7. M u k o s e e v, Yu. L. (1973) *Electric Power Supply of Industrial Plants*. Moscow, Energiya. 584 p. (in Russian).
8. M e l n i k o v, N. A. (1971) *Electric Power Networks and Systems*. Moscow, Energiya. 284 p. (in Russian).
9. S t a t e Standard 13109–97. Norms of Electricity Quality in Electric Power Supply Systems of General Purposes (Domestic Purposes). Minsk: Interstate Council for Standardization, Metrology and Certification, 1999. 31 p. (in Russian).
10. G u s a k, A. A., Gusak, G. M., & Brichikova, E. A. (2006) *Ref. Book in Higher Mathematics*. Moscow, Tetrasistem. 545 p. (in Russian).

Представлена кафедрой
электроснабжения

Поступила 14.07.2014

УДК 621.3.01

ОДИН ТИПИЧНЫЙ ЭКСТРЕМУМ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГОРОШКО В. И., ЖУКОВСКАЯ Т. Е.

Белорусский национальный технический университет

E-mail: jte@tut.by

Целью данной статьи является привлечение внимания преподавателей, научных работников, инженеров и студентов к особенности поиска экстремума в различных электротехнических задачах. Эта особенность состоит в том, что во многих разделах электротехники поиск экстремума сводится к анализу одной и той же математической структуры (Т-структуры), а различия заключаются только в разных обозначениях. В одних задачах эта структура появляется в конечном, наиболее простом виде, в других – Т-структура «завуалирована» и для ее раскрытия нужны, как правило, элементарные алгебраические преобразования.

Учитывая высокую частотность появления упоминаемой структуры в электротехнических задачах, в первом разделе статьи авторы привели по-

дробное исследование экстремальных характеристик T-структуры и изложили результаты в виде удобных алгоритмов. Для обоснования типичности T-структуры рассмотрены пять задач-примеров на поиск экстремума из различных разделов электротехники.

Первый и второй примеры относятся к теории электрических цепей. В первом примере рассмотрена задача получения максимальной активной мощности в нагрузке, во втором приводится решение задачи настройки индуктивно связанных контуров с целью получения максимального тока. В третьем примере анализируется полосовой активный фильтр, построенный на операционном усилителе. По методике, изложенной в статье, определяется частота, на которой усилитель обеспечивает максимальный коэффициент усиления. Четвертый пример посвящен анализу КПД трансформатора. По алгоритму, изложенному в статье, определены оптимальный коэффициент нагрузки трансформатора, а также формула для максимума КПД. В пятом примере анализируется механическая характеристика асинхронного двигателя. Показано, каким образом на основе алгоритмов можно получить формулы для критических скольжения и момента двигателя, а также очень простой вывод формулы Клосса.

В статье использована методика сопоставительного анализа формул для расчета экстремальных параметров в различных электротехнических задачах. В результате было установлено наличие в формулах одинаковой T-структуры, что позволило разработать единый подход к вычислению экстремальных параметров. Показано, что поиск экстремальных параметров во многих электротехнических задачах сводится к анализу единой математической T-структуры. На основе ее анализа получен единый алгоритм поиска экстремума. Приведенные пять примеров из различных областей электротехники демонстрируют, во-первых, типичность T-структуры, во-вторых, простоту получения экстремальных параметров на основе алгоритма, приведенного в статье.

Ключевые слова: экстремум, электротехнические задачи, математическая структура.

Ил. 3. Библиогр.: 10 назв.

ONE TYPICAL EXTREMUM IN ELECTRICAL PROBLEMS

GOROSHKO V. I., SHUKOVSKAYA T. E.

Belorussian National Technical University

The aim of this work is to attract attention of teachers, scientific personnel, engineers and students to one peculiarity of extremum seeking in different electrical problems. This feature lies in the fact that in many parts of electrical engineering extremum seeking comes to analysis one and the same mathematical structure (T-structure), but differences lie only in many symbols (designation). In one problems this structure appear in finale, the most simple form, but in others – T-structure is “veiled”, and as a rule we need elementary algebraic transformation to detect it.

Taking into account high frequency of this structure appearing in electrical problems, in the first part of article the authors carried out the investigation of extremum characteristics of T-structure and show the results in easy algorithms. To determine the typical T-structure there were taken five problems-examples for extremum seeking from different parts of electrical engineering. The first and the second examples belong to the theory of electrical circuits.

In the first example the problem of maximum active load power obtaining was considered, in the second we see the solution of problem for inductive coupled circuit adjustment in order to obtain the hump current. In the third example the band active filter, built on operating amplifier, is analyzed. According to these methods, taken in the first part of article, the frequency is determined, on which amplifier

provides maximum amplification factor. The forth example deals with analysis of efficiency of transformer. According to algorithm, the optimal efficiency of transformer's load and also equation for its maximum was determined in this article. In the fifth example the mechanical characteristics of induction motor is analyzed. It is indicated how, on the basis of algorithms article, to obtain equations for critical slip and motor moment, and also the simple development of formula Klossa.

The methods of contrastive analysis of equations for calculation of extreme parameters in different electrical problems were used in this article. And as a result, it was determined that there is the same T-structure in equations, and this allow to develop the single approach for extreme parameters determination. It was shown that looking of extreme parameters in many electrical problems leads to analysis of the single mathematical T-structure. On the basis of T-structure analysis was obtained the single algorithm of extremum seeking. These five examples from different fields of electrical engineering present, first, typicalness of T-structure, the second, the simplicity obtaining of extreme parameters on the base of algorithm.

Keywords: extremum, electrical problems, mathematical structure.

Fig. 3. Ref.: 10 назв.

Многие задачи электротехники, связанные с поиском экстремума какой-либо величины, приводят к анализу выражения, включающего структуру вида

$$y = ax + b/x + c, \quad (1)$$

где $x = \text{var}$; $a, b, c = \text{const}$; $a, b > 0$.

В отдельных выражениях эта структура входит в числитель и обуславливает при $x > 0$ минимум выражения, в других – в знаменатель, свидетельствуя о наличии максимума. Для некоторых задач структура (1) непосредственно визуализуется, в других случаях требуется предварительно выполнить элементарные аналитические манипуляции. Учитывая высокую частотность появления структуры (1), представляется целесообразным провести подробный анализ этой структуры с целью использования в дальнейшем только результатов анализа.

Действуя стандартно, т. е. дифференцируя выражение (1) и приравнявая производную к нулю, получаем уравнение

$$ax = b/x, \quad (2)$$

которое имеет два корня:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{b/a}; \\ x_2 &= -\sqrt{b/a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Положительный корень x_1 соответствует локальному минимуму функции y

$$y_{\min} = 2ax_1 + c = 2b/x_1 + c = 2\sqrt{ab} + c. \quad (4)$$

Отрицательный корень x_2 определяет локальный максимум

$$y_{\max} = 2ax_2 + c = 2b/x_2 + c = -2\sqrt{ab} + c. \quad (5)$$

Для большинства задач отрицательный корень x_2 не имеет содержательного смысла и поэтому отбрасывается, однако ряд задач требует рас-

смотрения двух корней. Формулы (4), (5) справедливы для введенных ранее ограничений: $a > 0$; $b > 0$. Положительные значения a и b типичны для задач электротехники. Для полноты рассмотрим и другие знаки a , b . Из (3) видно, что экстремум существует также при: $a < 0$; $b < 0$. Но в этом случае положительный корень x_1 выявляет максимум функции y , а отрицательный x_2 – ее минимум:

$$y(x_1) = y_{\max} = -2\sqrt{ab} + c;$$

$$y(x_2) = y_{\min} = 2\sqrt{ab} + c.$$

Если знаки a , b различны, то функция y не имеет экстремума. Следует обратить внимание, что уравнение (2) определяет в точке экстремума равенство линейной и гиперболической составляющих структуры (1).

Структуру (1) можно привести к виду

$$y = \sqrt{ab}(x/x_1 + x_1/x) + c, \quad (6)$$

где

$$x_1 = \sqrt{b/a}.$$

Приведем примеры из различных разделов электротехники, подтверждающие типичность структуры (1).

Пример 1. Согласование нагрузки R_n и генератора с параметрами E , R_r по критерию максимума мощности (рис. 1) [1, 2].

$$P_n = R_n I^2 = E^2 \frac{R_n}{(R_n + R_r)^2}.$$

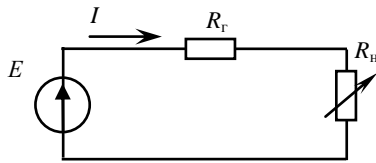


Рис. 1

При каком значении R_n получим $P_n = P_{n\max}$? Делим числитель и знаменатель выражения для мощности на R_n и получаем

$$P_n = E^2 / \left(R_n + \frac{R_r^2}{R_n} + 2R_r \right).$$

В знаменателе получаем структуру (1), для которой $x = R_n > 0$; $a = 1$; $b = R_r^2$; $c = 2R_r$. Непосредственно по формулам (3), (4) находим:

$$R_{\text{нопт}} = x_1 = \sqrt{\frac{b}{a}} = R_r;$$

$$P_{n\max} = \frac{E^2}{2\sqrt{ab}+c} = \frac{E^2}{4R_r}.$$

Пример 2. Настройка индуктивно связанных контуров (рис. 2).

Заданы параметры R , L , C контуров. Надо определить, при каком значении взаимной индуктивности M получим $I_2 = I_{2\max}$.

Для тока I_2 стандартные выкладки [1] приводят к выражению [1, 3]

$$I_2 = U_1 / \sqrt{(\omega M)^2 + \frac{(R^2 + v^2)^2}{(\omega M)^2} + 2(R^2 - v^2)},$$

где

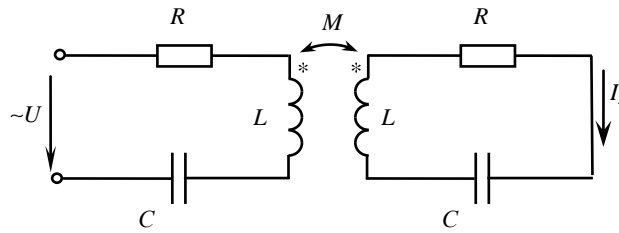


Рис. 2

$$v = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Под корнем получаем структуру (1), для которой $x = (\omega L)^2 > 0$; $a = 1$; $b = (R^2 + v^2)^2$; $c = 2(R^2 - v^2)$.

Значит, требуемое значение M_0 взаимной индуктивности M находим из выражения (3)

$$(\omega M_0)^2 = \sqrt{\frac{b}{a}} = R^2 + v^2, \quad (7)$$

которое дает для тока I_2 максимум (4)

$$I_{2\max} = U_1 / \sqrt{2\sqrt{ab} + c} = U_1 / 2R.$$

В рассматриваемой цепи для величины M_0 существует ограничение в виде условия физической реализуемости индуктивной связи $M_0 < L$. Анализ этого условия показывает, что равенство (7) выполнимо для области рабочих частот

$$\omega > \omega_0 / \sqrt{2 - R^2 / \rho^2},$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \rho = \sqrt{L/C}.$$

Если добротность контуров высока, то изменяя M , можно получить

$$I_{2\max} = U_1 / 2R \text{ только для частот } \omega > \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0.$$

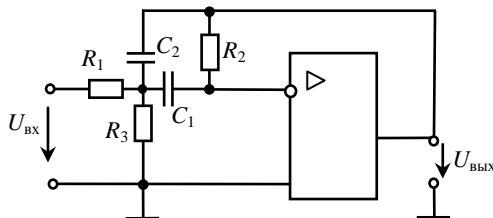


Рис. 3

Пример 3. Анализ полосового активного фильтра (рис. 3) [4–6].

Найти частоту ω_* , на которой коэффициент усиления $K(\omega) = K_{\max}$. Используя узловой метод, который для RC-цепей, как правило,

наиболее удобен, и полагая, что операционный усилитель идеален, найдем выражение для $K(\omega)$ и приводим его к виду

$$K(\omega) = \frac{C_1 G_1}{G_1 + G_3 - 2G_2/\omega^2 + \omega^2 C_1^2 C_2^2 + G_2^2 (C_1 + C_2)^2 - 2G_2 (G_1 + G_3) C_1 C_2},$$

где $G_i = 1/R_i$, $i = 1, 2, 3$.

Знаменатель является структурой (1), для которой:

$$a = C_1^2 C_2^2; \quad b = G_1 + G_3 - 2G_2; \quad x = \omega^2.$$

Это позволяет рассчитать требуемую частоту ω_* по формуле (3)

$$\omega_*^2 = \sqrt{b/a} = \frac{G_2 (G_1 + G_3)}{C_1 C_2},$$

а также K_{\max} по формуле (4)

$$K_{\max} = \frac{C_1 G_1}{(2\sqrt{ab} + c)} = \frac{C_1 G_1}{G_2 (C_1 + C_2)}.$$

Пример 4. Анализ КПД трансформатора.

Нужно найти оптимальное значение коэффициента загрузки β_{opt} , при котором $\eta = \eta_{\max}$.

Используем известное выражение [7]

$$\eta = \frac{\beta S_{\text{ном}} \cos \varphi_2}{\beta S_{\text{ном}} \cos \varphi_2 + \beta^2 P_k + P_x}.$$

Разделив числитель и знаменатель выражения на β , получим

$$\eta = \frac{S_{\text{ном}} \cos \varphi_2}{\beta P_k + P_x / \beta + S_{\text{ном}} \cos \varphi_2},$$

где знаменатель является структурой (1) в чистом виде.

Для этой структуры:

$$x = \beta; \quad a = P_k; \quad b = P_x; \quad c = S_{\text{ном}} \cos \varphi_2.$$

Оптимальное значение β , при котором $\eta = \eta_{\max}$, получаем

$$\beta_{\text{opt}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{P_x / P_k}.$$

Тогда согласно (4)

$$\eta_{\max} = \frac{S_{\text{ном}} \cos \varphi_2}{2\sqrt{ab} + c} = \frac{S_{\text{ном}} \cos \varphi_2}{2\sqrt{P_k P_x} + S_{\text{ном}} \cos \varphi_2}.$$

Пример 5. Анализ механической характеристики асинхронного двигателя.

Известна зависимость момента M двигателя от скольжения S [7, 8]

$$M = \frac{3U_{\phi}^2 R'_{2\Sigma}}{\omega_1 S \sqrt{R_1 + R'_{2\Sigma} / S^2 + x_k^2}}.$$

Возводим двучлен в знаменателе в квадрат и, раскрывая скобки, получаем

$$M = \frac{3U_{\phi}^2 R'_{2\Sigma}}{\omega_1} \sqrt{S (R_1^2 + x_k^2) + R'_{2\Sigma}{}^2 / S + 2R_1 R'_{2\Sigma}}. \quad (8)$$

Здесь в очередной раз выявляется структура (1), для которой:

$$x = S; \quad a = R_1^2 + x_k^2; \quad b = R'_{2\Sigma}{}^2; \quad c = 2R_1 R'_{2\Sigma}.$$

Это означает, что для расчета критических скольжения и момента мы можем использовать формулы (3)–(5)

$$S_k = \pm \sqrt{b/a} = \pm \frac{R'_{2\Sigma}}{\sqrt{R_1^2 + x_k^2}} = \pm \frac{R'_{2\Sigma}}{Z},$$

$$\text{где } Z = \sqrt{R_1^2 + x_k^2}; \quad M_k = \frac{3U_{\phi}^2 R'_{2\Sigma}}{\omega_1} \sqrt{\pm 2\sqrt{ab} + c} = \frac{3U_{\phi}^2}{2\omega_1} \sqrt{R_1 \pm Z}.$$

В этом примере оба корня x_1, x_2 имеют физический смысл, что учтено применением комбинации знаков « \pm », причем знаку «+» соответствует двигательный режим ($S > 0$), а знаку «-» – генераторный ($S < 0$).

Формулу (8) легко привести к более удобному и симметричному виду (формуле Клосса [9, 10]). Самый короткий для этого путь – воспользоваться формулой (6), т. е. вынести за скобку выражение $\sqrt{ab} = R'_{2\Sigma} \sqrt{R_1^2 + x_k^2} = R'_{2\Sigma} Z$.

В результате получим

$$M = \frac{3U_{\phi}^2}{\omega_1 Z} \sqrt{S/S_k + S_k/S + 2R_1/Z}.$$

Выражение $\frac{3U_{\phi}^2}{\omega_1 Z}$, рассматриваемое как единый коэффициент, найдем,

записав последнее уравнение в критической точке, т. е. полагая, что $S = S_k, M = M_k$:

$$M_k = \frac{3U_{\phi}^2}{\omega_1 Z} \sqrt{2 + 2k}, \quad k = R_1/Z,$$

или

$$\frac{3U_{\phi}^2}{\omega_1 Z} = 2M_k \sqrt{1 + k}.$$

Таким образом, приходим к известной формуле Клосса

$$M = 2M_k \sqrt{1 + k} \sqrt{S/S_k + S_k/S + 2k}, \quad (9)$$

где

$$k = R_1 / \sqrt{R_1^2 + x_k^2} = \frac{R_1}{R_{2\Sigma}} S_k.$$

ВЫВОД

Проанализирован новый методический прием исследования экстремальных задач в электротехнике. Он позволяет избежать громоздких преобразований и может быть использован в учебно-методических пособиях, на лекциях, при проведении мультимедийных презентаций.

Приведенные в статье пять примеров из различных разделов электротехники демонстрируют высокую эффективность предлагаемой методики, а также свидетельствуют о распространенности задач, к которым применима эта методика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учеб. / Л. А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
2. Горошко, В. И. Электротехника, основы электротехники и электрооборудование химических производств: учеб. / В. И. Горошко, И. О. Орабей, Л. М. Давидович. – Минск: БГТУ, 2006. – 246 с.
3. Основы теории цепей: учеб. / Г. В. Зевеке [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
4. Титце, У. Полупроводниковая схемотехника: справ. руководство: пер. с нем. / У. Титце, К. Шенк. – М.: Мир, 1982. – 512 с.
5. Горбачев, Г. Н. Промышленная электроника: учеб. / Г. Н. Горбачев, Е. Е. Чаплыгин. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
6. Хоровиц, П. Искусство схемотехники: пер. с англ. / П. Хоровиц, У. Хилл. – М.: Мир, 1980. – 598 с.
7. Немцов, М. А. Электротехника и электроника: учеб. / М. А. Немцов. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 597 с.
8. Розанов, Ю. К. Электронные устройства электромеханических систем: учеб. / Ю. К. Розанов, Е. М. Соколова. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 272 с.
9. Ильинский, Н. Ф. Основы электропривода: учеб. / Н. Ф. Ильинский. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 224 с.
10. Москаленко, В. В. Электрический привод: учеб. / В. В. Москаленко. – М.: Высш. шк., 1991. – 430 с.

REFERENCES

1. Bessonov, L. A. (2002) *Theoretical Basis of Electrical Engineering. Electrical Circuits*. Moscow, Gardariki. 638 p. (in Russian).
2. Goroshko V. I., Orabey I. O., & Davidovich L. M. (2006) *Electrical Engineering, Fundamentals of Electrical Engineering and Electrical Equipment of Chemical Industries*. Minsk: BSTU [Belarusian State Technological University]. 246 p. (in Russian).
3. Zevеkе, G. V., Ionkin, P. A., Netushil, A. V., & Strakhov, S. V. (1989) *Fundamentals of Circuits Theory*. Moscow, Energoatomizdat. 528 p. (in Russian).
4. Titse, Y., & Shenk, K. (1982) *Semiconductor Circuit Engineering*. Moscow, Mir. 512 p. (in Russian).
5. Gorbachev, G. N., & Chaplygin, E. E. (1988) *Industrial Electronics*. Moscow, Energoatomizdat. 320 p. (in Russian).
6. Khoroviz, P., & Hill, Y. (1980) *The Art of Electronics*. Cambridge, Cambridge University Press. 598 p.

7. N e m z o v, M. A. (2003) *Electrical Engineering and Electronics*. Moscow: Publishing house of Moscow Power Engineering Institute. 597 p. (in Russian).

8. R o z a n o v, Yu. K., & Sokolova, E. M. (2004) *Electronic Devices of Electro-Mechanical Systems*. Moscow, Publishing center "Academy". 272 p. (in Russian).

9. I l y i n s k y, N. F. (2003) *Fundamentals of Electrical Drive*. Moscow: Publishing House of Moscow Power Engineering Institute. 224 p. (in Russian).

10. M o s c a l e n k o, V. V. (1991) *Electrical Drive*. Moscow, Higher Education Establishment. 430 p. (in Russian).

Представлена кафедрой
электротехники и электроники

Поступила 05.12.2013