

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Конструирование и производство приборов»

АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Пособие

для студентов специальности

1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские
аппараты и системы»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения*

Минск
БНТУ
2022

УДК 004.94:519.72:616-71
ББК 32.811.3:53.4
А64

Составитель
Д. А. Степаненко

Рецензенты:
канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник
лаборатории контактно-динамических методов контроля
ГНУ «Институт прикладной физики НАН Беларуси»
О. В. Мацулевич;
кафедра электронной техники и технологии
УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

А64 **Анализ** и преобразование медико-биологических сигналов: пособие для студентов специальности 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» / сост. Д. А. Степаненко. – Минск : БНТУ, 2022. – 105 с.
ISBN 978-985-583-710-8.

Пособие предназначено для изучения дисциплины «Анализ и преобразование медико-биологических сигналов» студентами специальности 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы».

В пособии содержится четыре лабораторных работы, включающих в себя цель работы, инструменты и принадлежности, используемые при ее выполнении, краткое изложение теории, порядок выполнения работы, вопросы для самопроверки и список литературы.

Пособие также может быть полезно студентам других специальностей, изучающих медицинскую технику, медицинскую диагностику и информационные технологии в медицине.

УДК 004.94:519.72:616-71
ББК 32.811.3:53.4

ISBN 978-985-583-710-8

© Белорусский национальный
технический университет, 2022

Содержание

Лабораторная работа № 1 ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ	3
Лабораторная работа № 2 ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ	30
Лабораторная работа № 3 ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ	61
Лабораторная работа № 4 ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МАССИВОВ МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ	77
Литература	105

Лабораторная работа № 1

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ

Цель работы

Изучить методы представления периодических сигналов с помощью рядов Фурье и компьютерные методы обработки периодических сигналов.

Инструменты и принадлежности

1. Персональный компьютер с установленным программным обеспечением Mathcad.
2. Текстовый файл с отсчетами электрокардиограммы. Файл доступен по ссылке <https://disk.yandex.by/d/5Ah2nuM-CZ4E1A>.

Общие сведения

Для описания экспериментально зарегистрированного сигнала в виде функциональной зависимости требуется **аппроксимация**, то есть приближение множества полученных значений сигнала с помощью какой-либо математической функции или набора функций. Важным классом медико-биологических сигналов являются периодические сигналы. Это объясняется цикличностью многих физиологических процессов, протекающих в организме человека, например, цикличность сердечной деятельности проявляется в виде периодического изменения биопотенциала. Наиболее простыми по форме периодическими функциями являются **гармонические функции**, зависящие от аргумента по закону синуса или косинуса. Любой периодический сигнал сложной формы может быть аппроксимирован суммой простых гармонических функций (**гармоник**), такая аппроксимация известна как **ряд Фурье**, а сама процедура представления сигнала в виде ряда Фурье – как **гармонический (спектральный) анализ**. Набор функций, по которым производится разложение сигнала в ряд, называют **базисом ряда**. Если анализируемый

сигнал имеет период T , которому соответствует частота $f_1 = 1/T$, то на отрезке, соответствующем периоду сигнала, будут укладываться гармоника с периодом T (**основная или фундаментальная гармоника**), а также гармоники с периодами T/m , где $m \geq 2$ – натуральное число, которым соответствуют частоты $f_m = mf_1$ (**гармоники 2-го, 3-го и т. д. порядков**) (рис. 1.1).

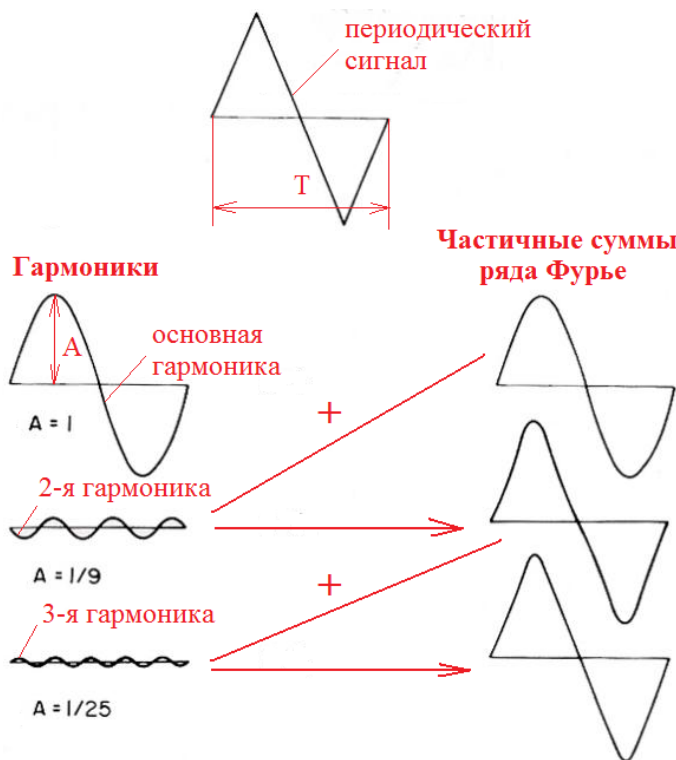


Рис. 1.1. Представление периодического сигнала в виде суммы гармоник

В случае сигналов, зависящих от пространственных координат, например, координаты x , гармоники сигнала характеризуются **пространственными частотами** $k_{x m} = \frac{2\pi m}{\Delta x}$, где Δx – пространственный период (шаг) изменения сигнала.

Каждая гармоника характеризуется определенной амплитудой A , которая является показателем вклада данной гармоники в общее значение сигнала: чем выше амплитуда, тем больше вклад соответствующей гармоники. Помимо гармонических составляющих периодический сигнал также может содержать постоянную составляющую, которая соответствует среднему значению сигнала за период. Из вышесказанного следует, что периодический сигнал $y(t)$ может быть представлен с помощью ряда Фурье в следующем виде:

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2\pi mt}{T} + b_m \sin \frac{2\pi mt}{T} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(2\pi f_m t) + b_m \sin(2\pi f_m t)), \quad (1.1)$$

где $a_0/2$ – постоянная составляющая сигнала;

a_m – амплитуда m -й косинусоидальной гармоники;

b_m – амплитуда m -й синусоидальной гармоники.

Коэффициент $1/2$ у постоянной составляющей введен для того, чтобы коэффициенты a_0 и a_m рассчитывались по общей формуле.

Расчет коэффициентов ряда (1.1) производится по формулам

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.2)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t) \sin \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Так как начальная точка интервала периодичности сигнала может быть выбрана произвольным образом, то интегрирование может выполняться по любому интервалу вида $(t_0; t_0 + T)$.

Ряд Фурье четной функции содержит только косинусы и постоянную составляющую, так как синусоидальные гармоники являют-

ся нечетными функциями. Аналогичным образом ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

В случае дискретного сигнала интегралы в формулах (1.2)–(1.3) заменяют **квадратурными суммами (суммами Римана)**, основанными на приближенной замене численно равной интегралу площади под кривой $y(t)b(t)$, где $b(t)$ – базисная функция, на сумму площадей прямоугольников с высотой $y_i b_i$, где y_i – отсчеты сигнала, b_i – отсчеты базисной функции, и шириной T/N_s , где N_s – количество отсчетов сигнала (рис. 1.2):

$$a_m = \frac{2}{N_s - 1} \sum_{i=1}^{N_s-1} y_i \cos \frac{2\pi m \cdot (i-1)}{N_s - 1},$$

$$b_m = \frac{2}{N_s - 1} \sum_{i=1}^{N_s-1} y_i \sin \frac{2\pi m \cdot (i-1)}{N_s - 1}.$$

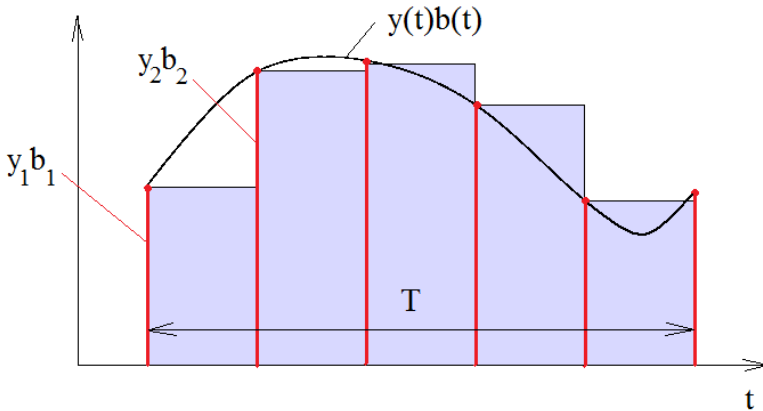


Рис. 1.2. Замена интеграла квадратурной суммой

Помимо формулы (1.1), в которой используется два типа гармоник (синусоидальные и косинусоидальные), периодический сигнал может быть представлен с использованием только косинусоидальных гармоник, если добавить к аргументу каждой из гармоник фазовое смещение Φ_m :

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T} + \Phi_m\right), \quad (1.4)$$

где A_m – амплитуда m -й гармоники, определяемая выражением

$$A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2};$$

Φ_m – фаза m -й гармоники, определяемая выражением

$$\Phi_m = -\operatorname{arctg} \frac{b_m}{a_m}.$$

Зависимость $A_m(f_m)$ амплитуд гармоник от их частот называют **амплитудным спектром периодического сигнала** или **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) периодического сигнала**. Зависимость $\Phi_m(f_m)$ фаз гармоник от их частот называют **фазовым спектром периодического сигнала** или **фазочастотной характеристикой (ФЧХ) периодического сигнала**. Периодические сигналы имеют дискретные (линейчатые) АЧХ и ФЧХ, так как содержат счетное множество гармоник (счетным называется множество, элементы которого можно пронумеровать с помощью натуральных чисел).

Понятия АЧХ и ФЧХ используются как при описании периодических сигналов, так и для описания изменения амплитуды и фазы гармонического сигнала при прохождении через линейный преобразователь: это может быть первичный преобразователь, фильтр, интегратор и т. п. Во втором случае используют понятия **АЧХ и ФЧХ преобразователя**:

$$A_{\text{пр}}(f) = \frac{A_y(f)}{A_x(f)};$$

$$\Phi_{\text{пр}}(f) = \Phi_y(f) - \Phi_x(f),$$

где $A_x(f)$ и $A_y(f)$ – АЧХ входного сигнала $x(t)$ преобразователя и его выходного сигнала $y(t)$, возникающего в ответ на входное воздействие $x(t)$;

$\Phi_x(f)$ и $\Phi_y(f)$ – ФЧХ входного сигнала $x(t)$ преобразователя и его выходного сигнала $y(t)$, возникающего в ответ на входное воздействие $x(t)$.

АЧХ преобразователя имеет смысл частотно-зависимого коэффициента усиления или ослабления гармонического сигнала преобразователем, а ФЧХ имеет смысл частотно-зависимого фазового смещения гармонического сигнала при прохождении через преобразователь.

Периодический сигнал помимо рядов (1.1) и (1.4) также можно представить в виде **комплексного ряда Фурье**, в котором в качестве базиса используют экспоненциальные функции комплексной переменной $\exp(jm\omega_1 t)$, где ω_1 – круговая частота основной гармоники, $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm\omega_1 t). \quad (1.5)$$

Ряд (1.5) может быть получен из обычного ряда Фурье (1.1) путем подстановки формул

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(jx) + \exp(-jx));$$

$$\sin(x) = -\frac{j}{2}(\exp(jx) - \exp(-jx)).$$

Так как в приведенных выше формулах используются экспоненциальные функции с противоположными по знаку аргументами, то, в отличие от ряда (1.1), где суммирование производится по натуральным числам m , суммирование в ряде (1.5) выполняется по целым числам m .

Зависимость $c_m(f_m)$ коэффициентов ряда (1.5) от частоты называется **комплексным спектром периодического сигнала**. Амплитуда и фаза m -й гармоники могут быть выражены через коэффициенты ряда (1.5):

$$A_m = 2 |c_m|;$$

$$\Phi_m = \arg(c_m),$$

то есть комплексный спектр содержит в себе информацию об АЧХ и ФЧХ сигнала.

Расчет коэффициентов ряда (1.5) производится по формуле

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \exp(-jm\omega_1 t) dt.$$

Для вещественнозначного сигнала выполняется условие симметрии

$$c_m = c_{-m}^*, \quad (1.6)$$

где * означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим поведение периодической последовательности импульсов с постоянной длительностью τ при увеличении ее периода T . В качестве примера рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1.3).

Слева показаны форма сигнала и изменение АЧХ сигнала в зависимости от величины периода T , а справа – изменение нормированной АЧХ (АЧХ, отнесенной к разности частот соседних гармоник $\Delta f = 1/T$). Как видно, при фиксированной длительности импульса τ нормированная огибающая АЧХ описывается одной и той же функцией независимо от периода T : в рассматриваемом случае это модуль **sinc-функции** (функция $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$). С увеличением периода T изменяется только плотность заполнения области под огибающей гармониками АЧХ.

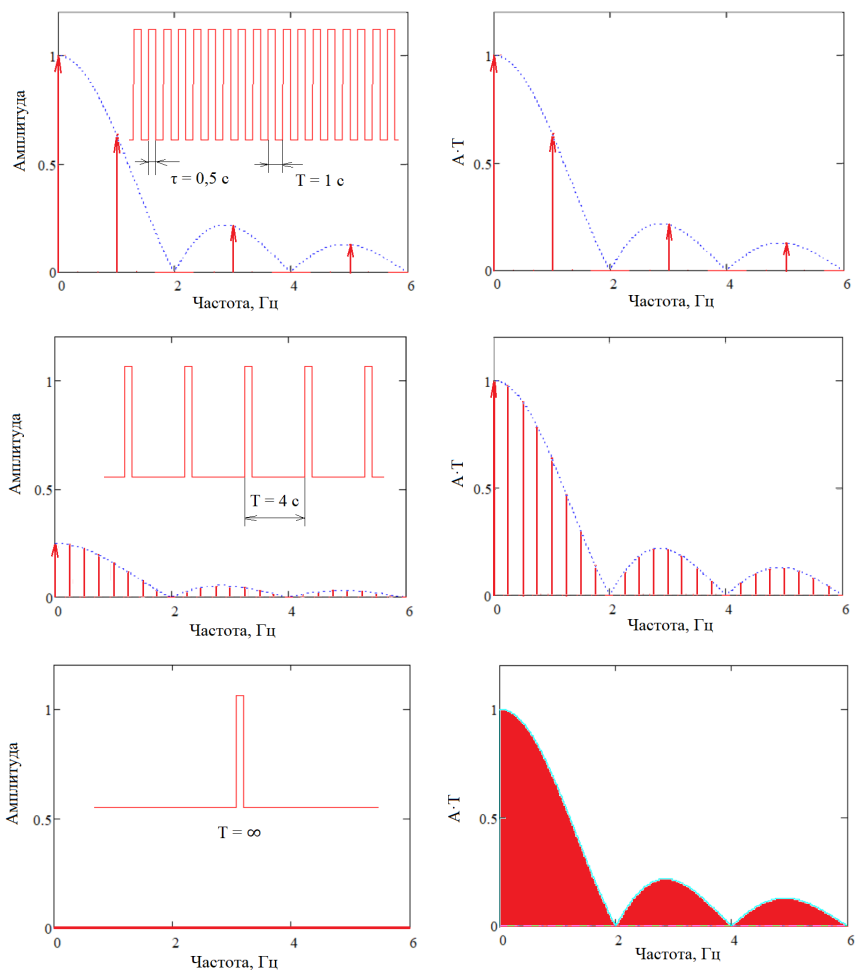


Рис. 1.3. Изменение АЧХ и нормированной АЧХ в зависимости от периода повторения импульсов

В пределе при $T \rightarrow \infty$ (нижние графики на рис. 1.3) сигнал превращается в одиночный (апериодический) прямоугольный импульс, а АЧХ становится непрерывной с бесконечно малыми амплитудами гармоник. Из-за того, что гармоники апериодического сигнала имеют бесконечно малую амплитуду, говорить об амплитудном спектре

апериодического сигнала не имеет смысла, тогда используют понятие **модуля спектральной плотности апериодического сигнала** – это нормированная огибающая АЧХ, о которой шла речь выше. Аналогичное рассуждение справедливо для отношения $c_m/\Delta f$, где c_m – коэффициенты ряда (1.5) (амплитуды гармоник комплексного спектра). Данное отношение остается независимым от периода T и при $T \rightarrow \infty$ частота гармоник изменяется непрерывным образом. Если рассмотреть апериодический сигнал конечной длительности τ и периодически продолжить его с периодом $T > \tau$, то при $T \rightarrow \infty$ отношение $c_m/\Delta f$ превратится в непрерывную комплекснозначную функцию **спектральной плотности апериодического сигнала** (в литературе понятие спектральной плотности апериодического сигнала для простоты может некорректно заменяться понятием «спектр»). Таким образом, апериодические сигналы имеют непрерывную функцию спектральной плотности, то есть могут быть представлены в виде непрерывной суммы (интеграла) несчетного множества гармоник с непрерывно изменяющейся частотой (**интеграла или преобразования Фурье**).

В зависимости от характера сигнала (периодический или апериодический, непрерывный или дискретный) его спектральные характеристики могут определяться одним из 4 способов:

1) С помощью преобразования Фурье для непрерывного апериодического сигнала.

2) С помощью рядов Фурье для непрерывного периодического сигнала.

3) С помощью **преобразования Фурье с дискретным временем** (DTFT, discrete time Fourier transform) для дискретного апериодического сигнала.

4) С помощью **дискретного преобразования Фурье** (ДПФ, DFT, discrete Fourier transform) для дискретного периодического сигнала.

Например, преобразование Фурье непрерывной апериодической функции Гаусса (одиночного гауссова импульса) дает спектральную плотность в виде непрерывной апериодической функции Гаусса, отличающейся от исходной значениями амплитуды и ширины на уровне половины максимума (рис. 1.4, а).

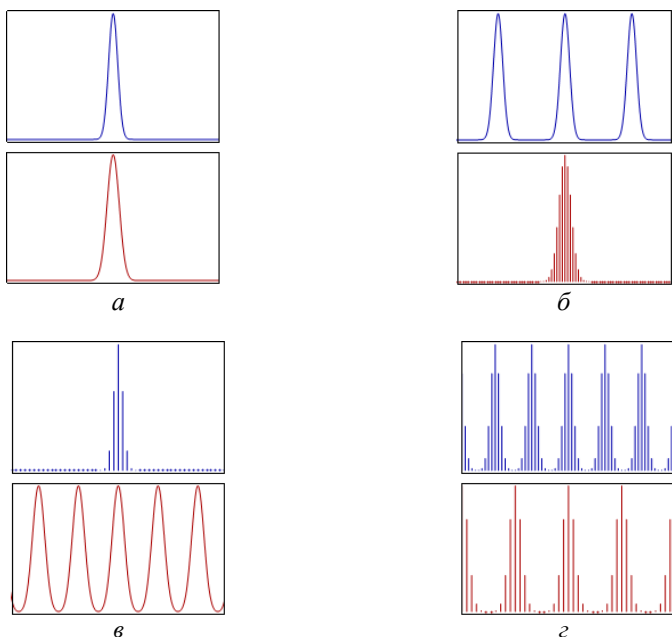


Рис. 1.4. Спектральные характеристики различных видов сигналов

Периодическая последовательность (**цуг**) непрерывных гауссовых импульсов имеет дискретный аperiodический амплитудный спектр (рис. 1.4, б), по частотным составляющим которого сигнал раскладывается в ряд Фурье. Дискретизированный одиночный гауссов импульс имеет непрерывную спектральную плотность в виде суммы периодической последовательности копий спектральной плотности непрерывного гауссова импульса (рис. 1.4, в). Дискретизированный цуг гауссовых импульсов имеет дискретный периодический амплитудный спектр (рис. 1.4, г).

В системах цифровой обработки сигналов используется ДПФ, что подразумевает периодичность входной и выходной последовательностей блока ДПФ. В случае, когда входная последовательность имеет длину 2^n , где n – натуральное число, существует алгоритм ускоренного вычисления ДПФ, называемый алгоритмом **быстрого преобразования Фурье** (БПФ, FFT, fast Fourier transform). Выходная последовательность имеет в этом случае длину $2^{n-1} + 1$

(2^{n-1} гармоник + постоянная составляющая), что может быть объяснено исходя из **теоремы Котельникова**, согласно которой сигнал с ограниченным частотным диапазоном от $-f_{\max}$ до $+f_{\max}$ может быть без искажений восстановлен по совокупности своих отсчетов при частоте дискретизации не ниже $2f_{\max}$. Для сигнала, содержащего 2^n отсчетов, частота дискретизации составляет $2^n/T$ (полному периоду соответствует $2^n + 1$ отсчетов, последний из которых равен первому, в результате чего период разбивается на 2^n интервалов), что соответствует частотной составляющей с частотой $f_{\max} = 2^{n-1}/T$, то есть гармонике порядка 2^{n-1} . В Mathcad для реализации БПФ используют функцию $fft(v)$, где v – вектор отсчетов сигнала. Обратное преобразование, то есть восстановление отсчетов сигнала по вектору s отсчетов его комплексного спектра, выполняется с помощью функции $ifft(s)$ (inverse FFT). Применение БПФ подразумевает работу с вещественнозначными сигналами, для которых выполняется условие симметрии (1.6); в противном случае помимо частотных составляющих, лежащих в диапазоне $[0, f_{\max}]$, требуется определение амплитуд частотных составляющих, заключенных в диапазоне $[-f_{\max}, -1/T]$, что приводит к увеличению длины выходной последовательности. При работе с комплекснозначными сигналами, число отсчетов которых отлично от 2^n , а также двумерными сигналами (матрицами) в Mathcad используют функцию $cfft$ (complex FFT), для которой длина выходной последовательности равна длине входной последовательности и которая рассчитывает амплитуды всех частотных составляющих от $-f_{\max}$ до $+f_{\max}$. В случае вещественнозначных сигналов функция $cfft$ дает избыточную информацию, так как амплитуды отрицательных частотных составляющих связаны с амплитудами положительных частотных составляющих условием симметрии (1.6). Обратной по отношению к функции $cfft$ является функция $icfft$.

На практике для аппроксимации периодического сигнала используется не бесконечный ряд Фурье (1.1), а его **частичная сумма (усеченный ряд Фурье)**, получаемая путем отбрасывания из ряда гармоник высших порядков, вклад которых в сигнал пренебрежимо мал.

Быстрым изменениям сигнала соответствуют гармоники высоких порядков. При фильтрации сигнала фильтром нижних частот (ФНЧ) происходит подавление гармоник высоких порядков и возможна потеря диагностической информации, проявляющейся в виде

быстрых изменений сигнала. В качестве примера можно рассмотреть фрагментированный QRS-комплекс электрокардиограммы (ЭКГ), наблюдающийся у пациентов с рубцами миокарда и характеризующийся появлением дополнительных пиков. При фильтрации ЭКГ ФНЧ с частотой среза 35 Гц на QRS-комплексе наблюдается 2 пика, а при фильтрации ФНЧ с частотой среза 150 Гц – 5 пиков (рис. 1.5).

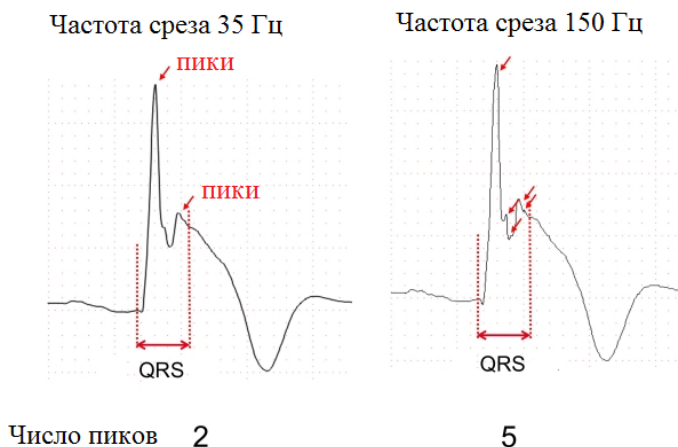


Рис. 1.5. Влияние фильтрации на выявляемость пиков ЭКГ

Так как в качестве базиса ряда Фурье используются непрерывные функции, то ряды Фурье хорошо подходят для аппроксимации непрерывных сигналов. В случае сигналов, имеющих точки разрыва, ряд Фурье в точках разрыва сходится к значению, отличающемуся от истинного значения сигнала. Если сигнал имеет конечный скачок (**разрыв первого рода**) в точке $t = t_0$, то есть $|y(t_0 + 0) - y(t_0 - 0)| = a$, где $0 < a < \infty$, то ряд Фурье в точке разрыва сходится к значению

$$\frac{1}{2}(y(t_0 - 0) + y(t_0 + 0)).$$

В точках разрыва также возникает **эффект Гиббса**, состоящий в том, что частичные суммы ряда совершают колебания относи-

тельно истинного значения сигнала, превышая его (это явление называется overshoot – в дословном переводе с английского «перелет») или не достигая его (undershoot – «недолет»). Отклонение частичных сумм ряда Фурье от истинного значения сигнала с увеличением числа гармоник стремится не к нулю, а к конечному пределу, составляющему около 9 % от величины скачка сигнала a (рис. 1.6).

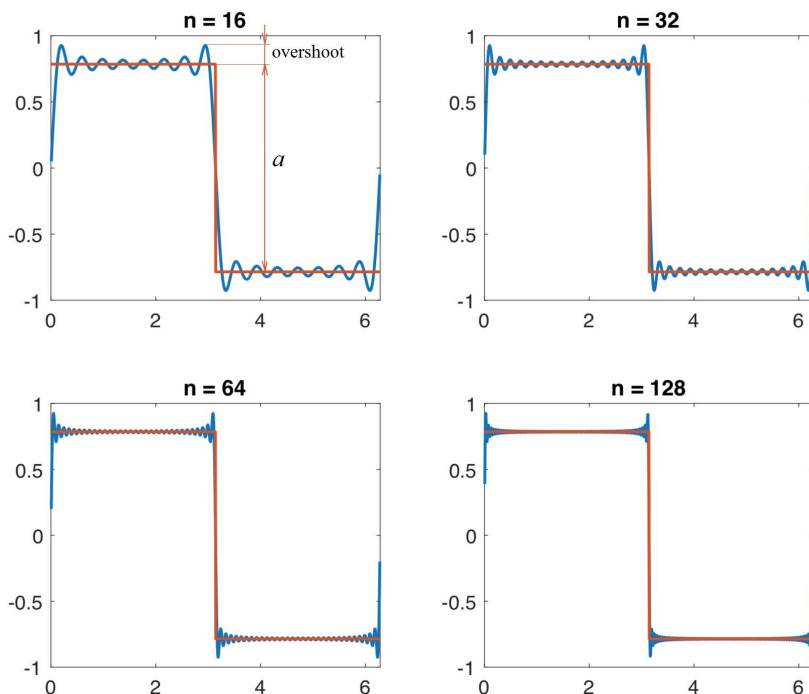


Рис. 1.6. Эффект Гиббса в зависимости от числа гармоник n

Эффект Гиббса может приводить к возникновению артефактов при обработке сигналов с применением спектрального анализа. Под **артефактом** понимают ошибку в восприятии или представлении сигнала (появление элементов и свойств, не характерных для реального сигнала), связанную с используемыми оборудованием и/или методами. Рассмотрим это на примере магнитно-резонансной томографии (МРТ) спинного мозга. На T_1 -взвешенном изображении (изображение, характеризующее скорость восстановления продоль-

ной намагниченности ткани при ее возмущении радиочастотным импульсом) спинной мозг имеет серый цвет, а окружающая его спинномозговая жидкость (СМЖ) – темный цвет (рис. 1.7, а).

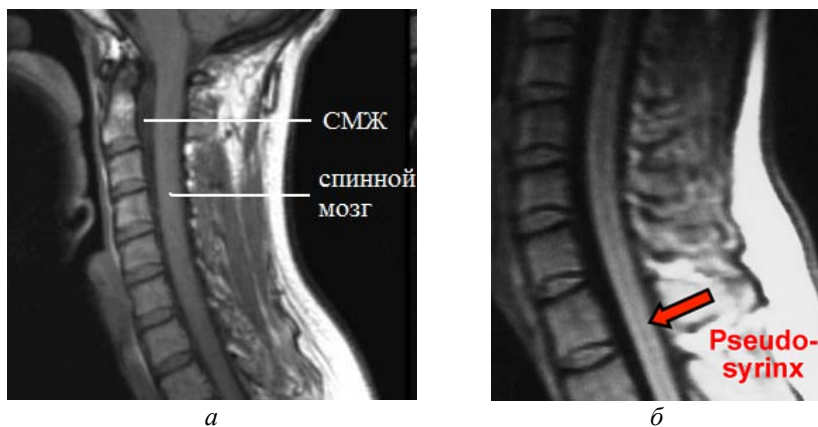


Рис. 1.7. МРТ-изображение спинного мозга и артефакт Гиббса, напоминающий сирингомиелию

Таким образом, граница раздела тканей характеризуется скачкообразным изменением яркости изображения, что является необходимым условием возникновения эффекта Гиббса. Артефакт, вызванный эффектом Гиббса, проявляется на T_1 -взвешенном изображении в виде темной полосы, идущей внутри спинного мозга вдоль границы его раздела с СМЖ. Причиной появления этой полосы является «недолет» сигнала до истинного значения. Артефакт Гиббса может быть ошибочно принят за сирингомиелию – патологию, характеризующуюся образованием внутри спинного мозга заполненной СМЖ кисты (сиринкса) (рис. 1.7, б).

Так как эффект Гиббса проявляется при усечении ряда Фурье (в случае МРТ такое усечение происходит из-за регистрации ограниченного диапазона пространственных частот сигнала), то связанный с ним артефакт называют также **артефактом усечения**.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрим разложение аналитически заданного сигнала. Для этого запускаем программу Mathcad и задаем периодический пилообразный сигнал, имеющий амплитуду $A = 1$ и период $T = 0,5$ (размерности параметров не учитываются):

$$A := 1;$$

$$T := 0.5;$$

$$y(t) := \frac{A \cdot t}{T}.$$

2. Задаем количество гармоник, учитываемых в разложении сигнала, и диапазон изменения порядка гармоник:

$$N := 6;$$

$$k := 0..N.$$

3. Вычисляем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt;$$

$$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot t}{T}\right) dt.$$

Можно убедиться, что коэффициенты при косинусах за исключением нулевой гармоники обращаются в нуль. Для этого необходимо вывести значения векторов a и b , набрав $a =$ и $b =$. Это объясняется тем, что рассматриваемая функция является суммой постоянной составляющей и нечетной функции, а ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

4. По известным коэффициентам Фурье рассчитываем приближения сигнала по k гармоникам (частичные суммы ряда Фурье):

$$ya(k, t) := 0.5 \cdot a_0 + \sum_{i=1}^k b_i \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t}{T}\right).$$

5. Задаем диапазон и шаг изменения времени t :

$$t := 0, 0.01 \cdot T..T.$$

6. Строим графики исходного сигнала и его приближений по различному количеству гармоник. Для этого выбираем в меню Insert → Graph → X-Y Plot. В нижнее и левое поля графика вводим время t и список функций, которые необходимо отобразить на графике (для добавления новой функции используем запятую на клавиатуре): $y(t)$, $ya(3, t)$, $ya(6, t)$. В результате получится график, представленный на рис. 1.8.

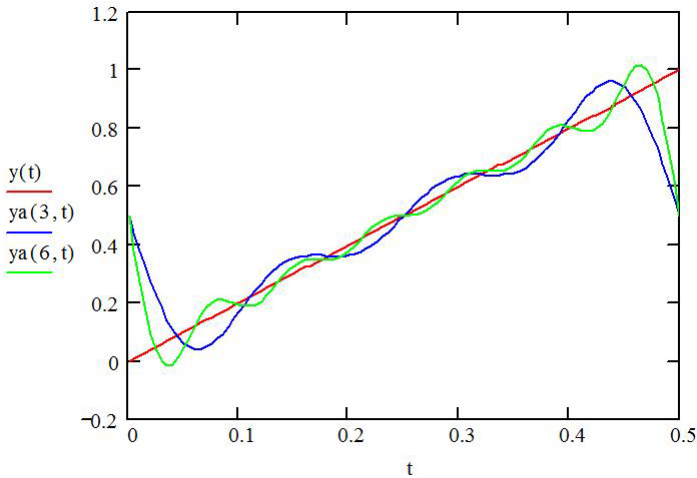


Рис. 1.8. Исходный сигнал и его приближение суммой трех и шести гармоник

Как видно, с увеличением числа гармоник, учитываемых в разложении, повышается точность сходимости частичных сумм ряда Фурье к значениям исходного сигнала. Сходимость отсутствует лишь на краях интервала разложения, что объясняется наличием

у сигнала разрыва первого рода. Увеличив число гармоник в разложении, можно убедиться, что колебательный характер изменения сигнала вблизи точки разрыва сохраняется независимо от числа гармоник, что представляет собой описанный в теоретической части эффект Гиббса.

7. Разложение сигнала, заданного в цифровой форме, рассмотрим на примере ЭКГ, отсчеты которой записаны в файле `samples.prn` (текстовые файлы с расширением `prn` используются в Mathcad для импорта и экспорта числовых данных). Для этого импортируем отсчеты сигнала:

$$path := "C : /samples.prn";$$
$$ecg := READPRN(path).$$

Символьная переменная *path* представляет собой полный путь к файлу. В результате импорта формируется матрица *ecg*, первый столбец которой содержит значения времени дискретизации в секундах, а второй столбец – значения сигнала в мВ.

8. Выделяем подматрицу, содержащую значения сигнала и времени дискретизации, соответствующие одному периоду:

$$ecg := submatrix(ecg, 656, 1733, 0, 1).$$

В общем случае *submatrix* имеет синтаксис *submatrix(matrix, nr1, nr2, nc1, nc2)*, где *matrix* – исходная матрица, *nr1* – положение начальной строки подматрицы в исходной матрице, *nr2* – положение конечной строки подматрицы, *nc1* – положение начального столбца подматрицы, *nc2* – положение конечного столбца подматрицы. Нумерация строк и столбцов в Mathcad начинается с нуля.

Номера отсчетов 656 и 1733, соответствующие началу и концу периода сигнала, могут быть определены путем отслеживания по графику сигнала координат двух последовательных одноименных элементов, например, последовательных R-зубцов.

9. Формируем два вектора, один из которых содержит значения времени дискретизации с приведением начальной точки к нулю, а другой – значения сигнала с приведенным к нулю средним значением:

$$t := ecg^{(0)} - ecg_{0,0};$$

$$y := ecg^{(1)} - mean(ecg^{(1)}).$$

Обозначение $v^{(k)}$ соответствует извлечению k -го столбца из вектора v . Функция $mean(M)$ вычисляет среднее значение элементов матрицы M .

10. Строим график сигнала (рис. 1.9).

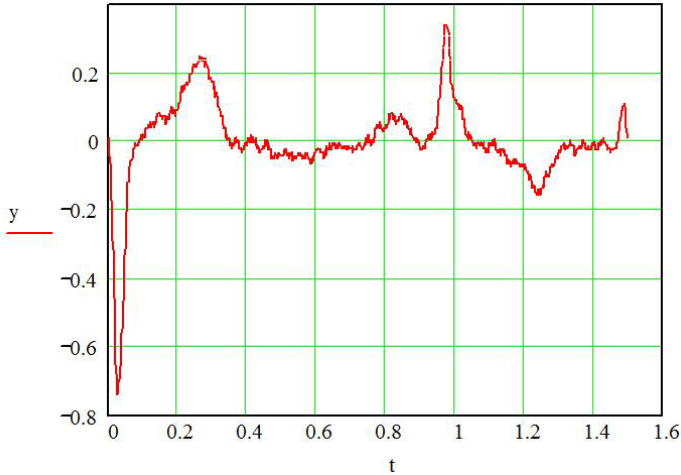


Рис. 1.9. График сигнала ЭКГ

11. Задаем количество учитываемых в разложении гармоник и диапазон изменения их порядка:

$$N := 48;$$

$$k := 0..N.$$

12. Определяем количество отсчетов и величину периода сигнала:

$$Ns := length(y);$$

$$T := t_{Ns-1}.$$

Функция $length(v)$ определяет количество элементов в векторе v .

13. Вычисляем коэффициенты ряда Фурье

$$a_k := \frac{2}{N_s - 1} \cdot \sum_{i=0}^{N_s - 2} y_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot (i - 1)}{N_s - 1}\right);$$

$$b_k := \frac{2}{N_s - 1} \cdot \sum_{i=0}^{N_s - 2} y_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot (i - 1)}{N_s - 1}\right).$$

14. Вычисляем отсчеты сигнала, аппроксимированного частичной суммой ряда Фурье,

$$i := 0..N_s - 1;$$

$$ya_i := 0.5 \cdot a_0 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot i}{N_s - 1}\right) + b_k \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot i}{N_s - 1}\right) \right).$$

15. Строим график аппроксимированного сигнала (рис. 1.10).

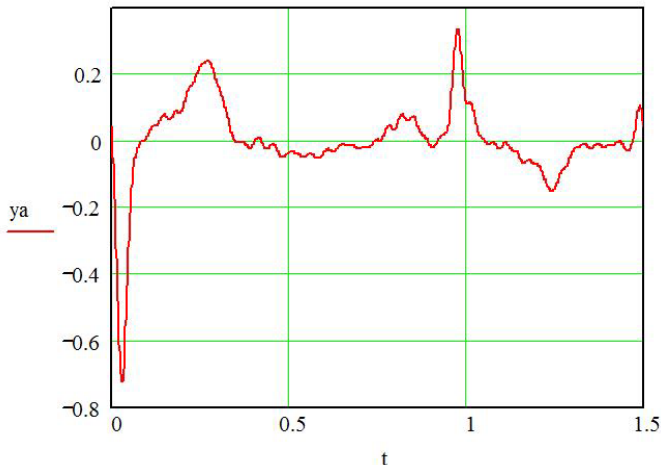


Рис. 1.10. Аппроксимация сигнала ЭКГ суммой 48 гармоник

16. Вычисляем АЧХ сигнала. Для этого рассчитываем частоты и амплитуды гармоник:

$$f_k := \frac{k}{T};$$

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}.$$

17. Строим график АЧХ сигнала (рис. 1.11).

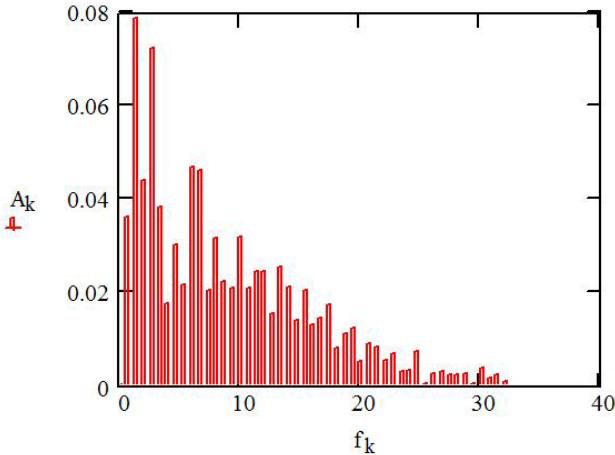


Рис. 1.11. АЧХ ЭКГ

Для отображения амплитуд гармоник в виде вертикальных линий дважды щелкаем по графику и в появившемся окне форматирования выбираем закладку Traces. Для кривой trace 1 в колонке Type выбираем из выпадающего списка bar.

18. В качестве еще одного задания рассмотрим работу функций *fft* и *cfft* на примере периодического сигнала заранее известного спектрального состава. Для этого задаем характеристики сигнала (период T , амплитуду A и количество отсчетов N) и значения отсчетов y_k :

$$T := 1;$$

$$A := 1;$$

$$n := 4;$$

$$N := 2^n;$$

$$k := 0..N - 1;$$

$$y_k := 0.1 \cdot A + A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right) + 0.2 \cdot A \cdot \sin\left(\frac{8 \cdot \pi \cdot k}{N}\right).$$

Максимальная частотная составляющая сигнала имеет частоту $f_{\max} = 4$ Гц и требует, согласно теореме Котельникова, минимально необходимой частоты дискретизации $f_d = 8$ Гц, что соответствует 8 отсчетам сигнала. Как отмечалось выше (см. рис. 1.4, *в* и пояснения к нему), при дискретизации сигнала происходит сложение периодической последовательности копий спектральной плотности исходного непрерывного сигнала. При недостаточной частоте дискретизации (ниже минимального значения, требуемого теоремой Котельникова) копии спектральной плотности накладываются друг на друга – это явление называется **алиасингом** и приводит к появлению артефактов. В рассматриваемом случае при частоте дискретизации 8 Гц частотная составляющая с частотой 4 Гц будет накладываться в результате алиасинга на частотную составляющую с частотой -4 Гц, в связи с чем требуется принимать частоту дискретизации *строго больше* 8 Гц (в формулировке теоремы Котельникова используется менее строгое требование $f_d \geq 2f_{\max}$, однако знак равенства является допустимым лишь при условии, что частотными компонентами с частотой $\pm f_{\max}$ можно пренебречь). Минимальная частота вида 2^n , удовлетворяющая этому требованию, составляет $2^4 = 16$ Гц. Можно убедиться, что при частоте дискретизации 8 Гц частотная составляющая с частотой 4 Гц будет потеряна (ее расчетная амплитуда будет равна нулю). Это объясняется тем, что реальная амплитуда данной частотной составляющей будет чисто мнимым числом и вследствие условия симметрии (1.6) будет компенсироваться накладывающейся на нее частотной составляющей -4 Гц.

19. Рассчитываем комплексный спектр сигнала с помощью функции *fft*:

$$s := \text{fft}(y).$$

Можно убедиться, что число отсчетов спектра составляет $2^{n-1} + 1 = 9$:

$$N1 := \text{length}(s);$$

$$N1 = 9.$$

20. Определяем частоты, соответствующие отсчетам спектра, и строим АЧХ сигнала (рис. 1.12):

$$k1 := 0..N1 - 1;$$

$$f_{k1} := \frac{k1}{T}.$$

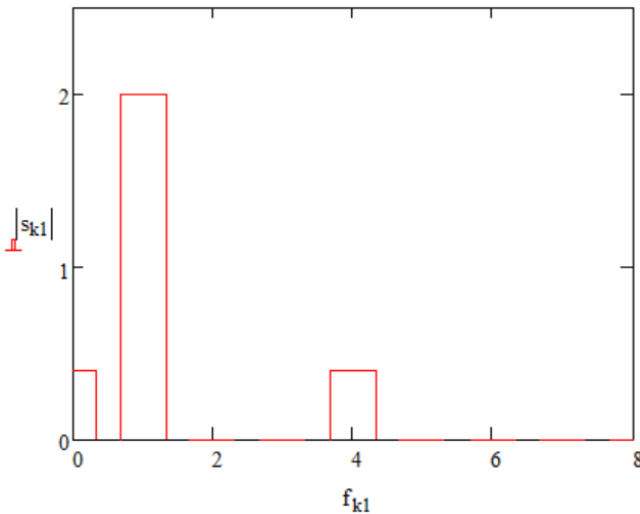


Рис. 1.12. АЧХ сигнала, рассчитанная с помощью функции *fft*

Как очевидно из формулы для расчета значений отсчетов u_k , АЧХ сигнала содержит три частотные составляющие с частотами 0 Гц (постоянная составляющая), 1 Гц (основная гармоника) и 4 Гц (гармоника 4-го порядка). Амплитуды этих составляющих должны составлять 0,1, 1 и 0,2. Для $k \neq 0$ значения АЧХ, рассчитанные с помощью функции *fft*, будут составлять $0,5\sqrt{N}A_k$, где A_k – истинная амплитуда k -й гармоники: в рассматриваемом случае получаем значения 2 и 0,4. Постоянная составляющая будет иметь значение $\sqrt{N}A_0$.

21. Рассчитываем комплексный спектр сигнала с помощью функции *cfft* и строим АЧХ (рис. 1.13):

$$s2 := cfft(y);$$

$$f_k := \frac{k}{T}.$$

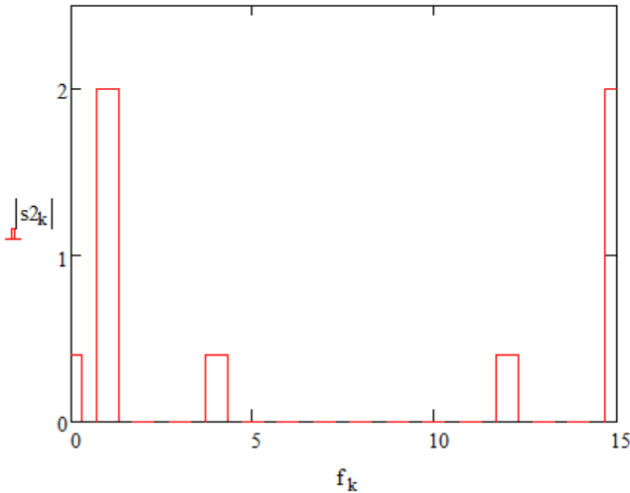


Рис. 1.13. АЧХ сигнала, рассчитанная с помощью функции *cfft*

Как отмечалось в теоретической части, для вещественнозначных сигналов функция *cfft* дает избыточную информацию, что проявляется в симметричности высокочастотной части АЧХ по отношению к низкочастотной части.

22. Как было указано в теоретической части работы, использование ДПФ подразумевает периодичность входной и выходной последовательностей. Однако ДПФ может использоваться и для оценки спектральных характеристик аperiodических импульсных сигналов. Рассмотрим это на примере синусоидального импульса, значения отсчетов которого зададим выражением

$$y_k := A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N}\right).$$

Как отмечалось выше, аperiodический сигнал может рассматриваться как частный случай периодического при $T \rightarrow \infty$. Таким образом, если, сохраняя длительность импульса, увеличивать его период, то можно получить представление о модуле спектральной плотности одиночного аperiodического импульса – для этого необходимо построить огибающую АЧХ периодической последовательности импульсов при достаточно большом значении периода T (см. рис. 1.3). Технически для дискретизированных сигналов это реализуется следующим образом:

22.1. Увеличиваем число отсчетов сигнала до значения

$$N2 := 32 \cdot N.$$

Вместо коэффициента 32 можно использовать любое достаточно большое число вида 2^n . Чем выше значение коэффициента, тем плотнее будет заполнение области под огибающей гармониками АЧХ.

22.2. Придаем дополнительным отсчетам сигнала нулевые значения:

$$F(i, j) := 0;$$

$$zero := matrix(N2 - N, 1, F);$$

$$y1 := stack(y, zero).$$

Функция $matrix(m, n, F)$ создает матрицу размером $m \times n$, значения элементов которой определяются функцией $F(i, j)$. Функция $stack(A, B)$ располагает матрицу A над матрицей B .

22.3. Рассчитываем комплексный спектр сигнала и строим АЧХ (рис. 1.14):

$$s3 := fft(y1);$$

$$k3 := 0..length(s3) - 1;$$

$$f_{k3} := \frac{k3}{32 \cdot T}.$$

Как видно из графика, огибающая АЧХ напоминает по форме модуль sinc-функции (см. для сравнения рис. 1.3) с максимумом на частоте 1 Гц. Рассчитав преобразование Фурье синусоидального импульса с частотой f можно показать, что модуль его спектральной плотности действительно представляет собой сумму двух sinc-функций с максимумами на частоте $\pm f$.

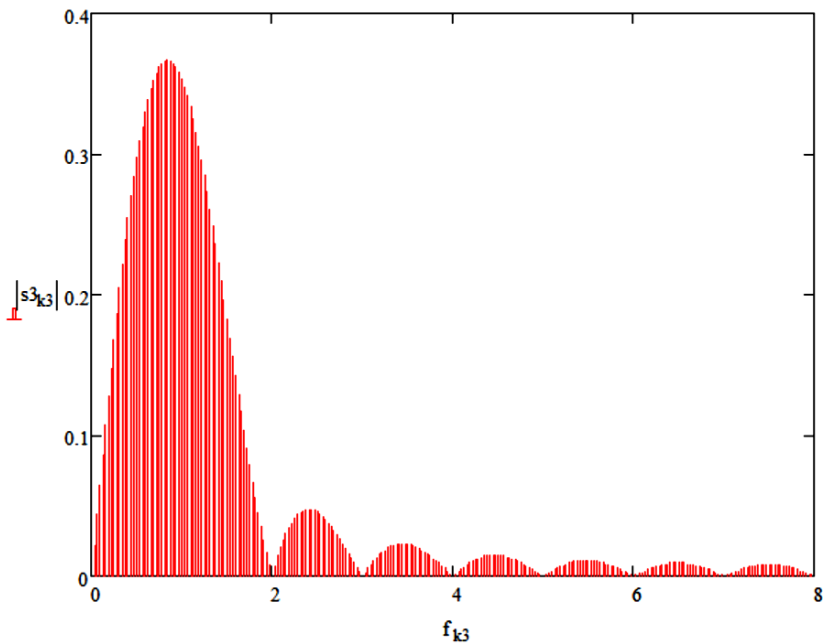


Рис. 1.14. АЧХ периодического дискретного синусоидального импульса

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие сведения о представлении периодических сигналов с помощью рядов Фурье.
3. График и АЧХ заданного преподавателем периодического сигнала.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие функции используются в качестве базисных при разложении периодического сигнала в ряд Фурье?
2. Дайте определение АЧХ и ФЧХ периодического сигнала.
3. В чем различие между формулами для коэффициентов ряда Фурье в случаях непрерывного (аналогового) и дискретного сигналов?
4. Что происходит с АЧХ периодически повторяющегося импульса при сохранении постоянной длительности и увеличении периода?
5. Назовите 4 способа определения спектральных характеристик сигнала в зависимости от степени его периодичности и непрерывности.
6. В чем различия функций fft и $cfft$, используемых для определения спектральных характеристик сигналов в Mathcad?
7. Как определяется предел частичных сумм ряда Фурье в точках разрыва для сигналов, имеющих разрывы 1-го рода?
8. Дайте определение эффекта Гиббса и приведите примеры связанных с ним артефактов.
9. Назовите особенности расчета коэффициентов ряда Фурье для четных и нечетных сигналов.
10. На примере ЭКГ поясните, как влияет усечение ряда Фурье на диагностическую пригодность сигнала.
11. Какие условия накладываются на частоту дискретизации сигнала теоремой Котельникова и что такое алиасинг?

Лабораторная работа № 2

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РЕНТГЕНОВСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Цель работы

Изучить методы реконструкции изображений в рентгеновской компьютерной томографии и особенности программной реализации этих методов.

Инструменты и принадлежности

1. Персональный компьютер с установленным программным обеспечением Mathcad.
2. Графический файл с тестовым изображением (фантомом Шеппа-Логана). Файл доступен по ссылке https://disk.yandex.by/i/0x_nrNuCmii VfQ.

Общие сведения

Рентгеновская томография (часто называемая просто **компьютерной томографией**) представляет собой метод послойного исследования анатомической структуры организма человека, основанный на регистрации ослабления рентгеновского излучения тканями организма. Основным соотношением, используемым в рентгеновской томографии, является **закон Бугера-Бэра-Ламберта**, который описывает ослабление рентгеновского излучения слоем вещества. В случае прохождения излучения через однородный слой вещества закон Бугера имеет вид

$$I(x) = I(0) \exp(-\alpha x),$$

где $I(0)$ – начальная интенсивность излучения;

$I(x)$ – интенсивность излучения, прошедшего через слой вещества толщиной x ;

α – **линейный коэффициент ослабления излучения** (обычно измеряется в см^{-1}).

Для неоднородного слоя вещества конечной толщины x закон Бугера-Бэра-Ламберта имеет вид

$$I(x) = I(0) \exp\left(-\int_0^x \alpha(x) dx\right),$$

то есть степень ослабления излучения определяется **интегральным значением линейного коэффициента ослабления**.

Значения линейного коэффициента ослабления в рентгеновской томографии принято выражать в относительных **единицах Хаунсфилда (HU)**:

$$HU = \frac{\alpha - \alpha_w}{\alpha_w - \alpha_a} \cdot 1000,$$

где α – линейный коэффициент ослабления для рассматриваемой ткани;

α_w – линейный коэффициент ослабления для воды;

α_a – линейный коэффициент ослабления для воздуха.

Схематическое изображение рентгеновского томографа представлено на рис. 2.1.

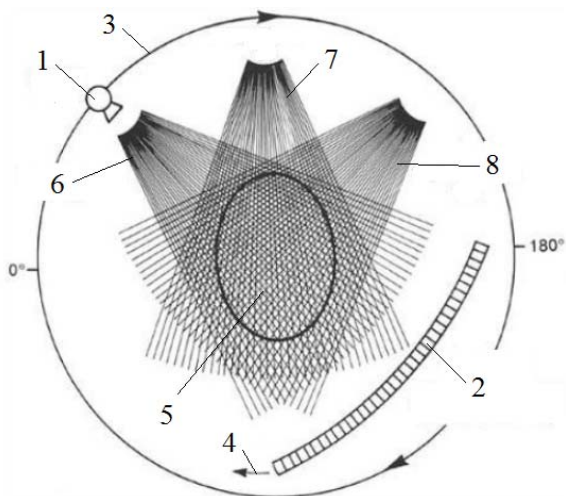


Рис. 2.1. Схематическое изображение рентгеновского томографа

Рентгеновская трубка 1, имеющая коллиматор с узкой щелью, формирует веерные пучки рентгеновских лучей 6–8, которые, проходя через тонкий слой тела пациента 5, ослабляются в нем по интенсивности. Толщина исследуемого слоя определяется шириной щели коллиматора. Интенсивность ослабленных телом пациента лучей регистрируется матрицей детекторов 2. Матрица детекторов и рентгеновская трубка совершают согласованные вращательные движения 3 и 4 по круговой направляющей, что позволяет «просвечивать» тело пациента под различными углами: от количества углов просвечивания зависит точность реконструкции внутренней структуры объекта.

Каждый детектор измеряет интегральное значение линейного коэффициента ослабления на проходящем через него рентгеновском луче L (рис. 2.2):

$$\alpha_{\Sigma}(\theta, \rho) = \int_L \alpha(\mathbf{r}) |d\mathbf{r}| = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x(z, \rho, \theta), y(z, \rho, \theta)) dz. \quad (2.1)$$

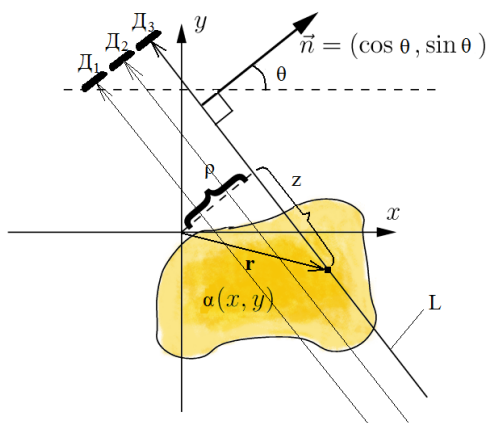


Рис. 2.2. Схема прохождения рентгеновских лучей через объект

В дальнейшем для упрощения проблемы вместо веерного рассматривается параллельный пучок рентгеновских лучей. Для параллельного пучка каждый из лучей описывается координатами ρ и θ , характеризующими его смещение относительно начала координат и направление. Координаты точек объекта, принадлежащих лучу, описываются уравнениями

$$x(z, \rho, \theta) = z \sin(\theta) + \rho \cos(\theta), \quad (2.2)$$

$$y(z, \rho, \theta) = -z \cos(\theta) + \rho \sin(\theta). \quad (2.3)$$

Так как смещение ρ измеряется по нормали к лучу, а матрица детекторов располагается перпендикулярно лучу, то координата ρ может рассматриваться как координата детектора.

Зависимость интегрального значения $\alpha_{\Sigma}(\theta, \rho)$ линейного коэффициента ослабления от координат ρ детекторов при фиксированном угле θ называется **проекцией объекта** под углом θ .

В качестве примера на рис. 2.3 приведены проекции объекта, состоящего из квадрата с размером стороны a и линейным коэффициентом ослабления μ и круга с радиусом a и линейным коэффициентом ослабления μ , под углами 0° , 45° и 90° .

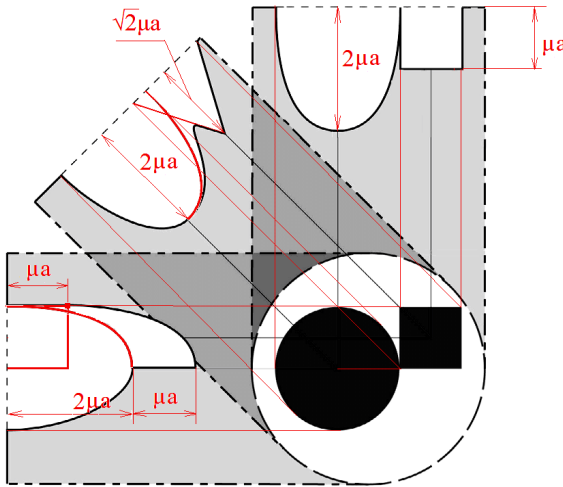


Рис. 2.3. Проекция объекта, состоящего из квадрата и круга

Проекция круга описывается функцией

$$\alpha_{\Sigma}(\theta, \rho) = \begin{cases} 2\mu\sqrt{a^2 - (\rho - \rho_0(\theta))^2} & \text{при } |\rho - \rho_0(\theta)| \leq a \\ 0 & \text{при } |\rho - \rho_0(\theta)| > a, \end{cases}$$

где $\rho_0(\theta)$ – координата луча, проходящего через центр круга.

На рис. 2.3 эти проекции изображены в виде одинаковых по форме куполообразных кривых (для угла проекции $\theta = 90^\circ$ на проекцию круга полностью накладывается проекция квадрата и поэтому верхняя часть куполообразной кривой смещена относительно нижней части на величину μa).

Проекции квадрата описываются функцией

$$\alpha_{\Sigma}(\theta, \rho) = \begin{cases} \frac{\mu a}{\cos \theta} & \text{при } |\rho - \rho_0(\theta)| \leq \frac{a}{2} |\cos \theta - \sin \theta| \\ \mu \left(\frac{a}{2 \sin \theta} + \frac{a}{2 \cos \theta} - \frac{2(\rho - \rho_0(\theta))}{\sin 2\theta} \right) & \text{при } \frac{a}{2} |\cos \theta - \sin \theta| < |\rho - \rho_0(\theta)| \leq \frac{a}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \\ 0 & \text{при } |\rho - \rho_0(\theta)| > \frac{a}{2} (\cos \theta + \sin \theta), \end{cases}$$

где $\rho_0(\theta)$ – координата луча, проходящего через центр квадрата.

Графически эта функция изображается в виде трапеции, которая может вырождаться в прямоугольник (для углов проекции $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$: при угле $\theta = 90^\circ$ этот прямоугольник полностью накладывается на проекцию круга) или треугольник (для угла проекции $\theta = 45^\circ$).

На рис. 2.4 приведены изображение **фантома Шеппа-Логана** (искусственно созданного объекта, имитирующего внутреннюю структуру головы человека и используемого в томографии для тестирования алгоритмов реконструкции изображений) и его проекции под углами 0° и 90° .

Как видно из рисунка, при прохождении рентгеновских лучей через граничные точки внутренних неоднородностей фантома на проекциях появляются точки излома: скачкообразное изменение производной проекции в этих точках соответствует скачкообразному изменению линейного коэффициента ослабления на границах неоднородностей фантома.

Для реконструкции изображения по проекциям используется **метод фильтрованных обратных проекций**. Операция **обратного проецирования** состоит в равномерном распределении («размывании») измеренного детектором интегрального значения линейного коэффициента ослабления вдоль проходящего через детектор рентгеновского луча.

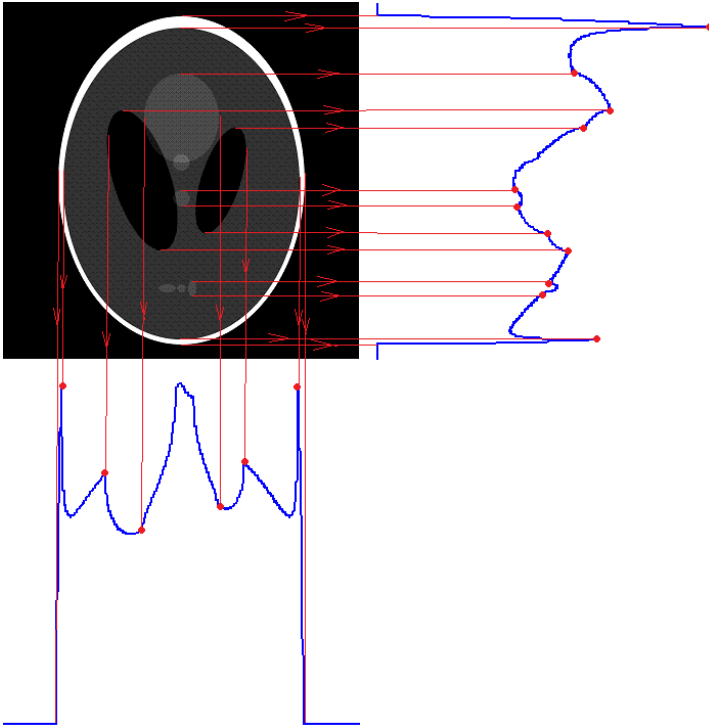


Рис. 2.4. Фантом Шеппа-Логана и его проекции

Математически обратная проекция под углом θ описывается выражением

$$\alpha_b(x, y, \theta) = \alpha_\Sigma(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta), \quad (2.4)$$

в котором учтено, что $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ – это равенство вытекает из формул (2.2), (2.3), если исключить из них переменную z .

Смысл выражения (2.4) состоит в том, что при обратном проецировании под углом θ точке с координатами (x, y) присваивается значение линейного коэффициента ослабления $\alpha_b(x, y, \theta)$, равное интегральному значению линейного коэффициента ослабления на луче, проходящем через эту точку под углом θ .

Процесс обратного проецирования иллюстрируется рис. 2.5, б.

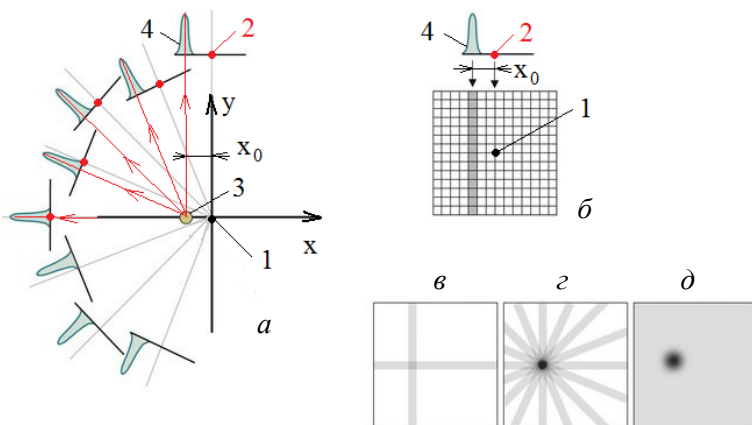


Рис. 2.5. Схема, иллюстрирующая процессы прямого и обратного проецирования:
 1 – начало координат; 2 – проекция начала координат; 3 – объект;
 4 – проекция объекта

Как видно из рисунка, при обратном проецировании под углом 0° в матрице значений линейного коэффициента ослабления вертикальный столбец, которому соответствует максимальное значение проекции, заполняется одинаковыми значениями (серые пиксели). Как показано на рис. 2.5, в–д, восстановление объекта производится путем суммирования множества обратных проекций, выполненных под различными углами θ (в случае бесконечного числа проекций суммирование заменяется интегрированием). Процессы прямого и обратного проецирования наглядно иллюстрируются примером, приведенным на рис. 2.6.

На рисунке показаны 4 **воксела** (элементы объемных изображений, являющиеся трехмерными аналогами пикселей) с присвоенными им значениями линейного коэффициента ослабления (вписанные в воксела целые числа). Проекции объекта обозначены как $P_1..P_4$, а обратные проекции как $bP_1..bP_4$. В результате суммирования 4 обратных проекций получается матрица с элементами 25, 28, 19 и 40, которая по своей структуре подобна исходной матрице \mathbf{A} с элементами 3, 4, 1 и 8 и может быть получена из нее с помощью линейной функции $k\mathbf{A} + b\mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица. В рассмат-

риваемом случае $b = 16$ (сумма всех элементов исходной матрицы), а $k = n - 1 = 3$, где $n = 4$ – количество проекций.

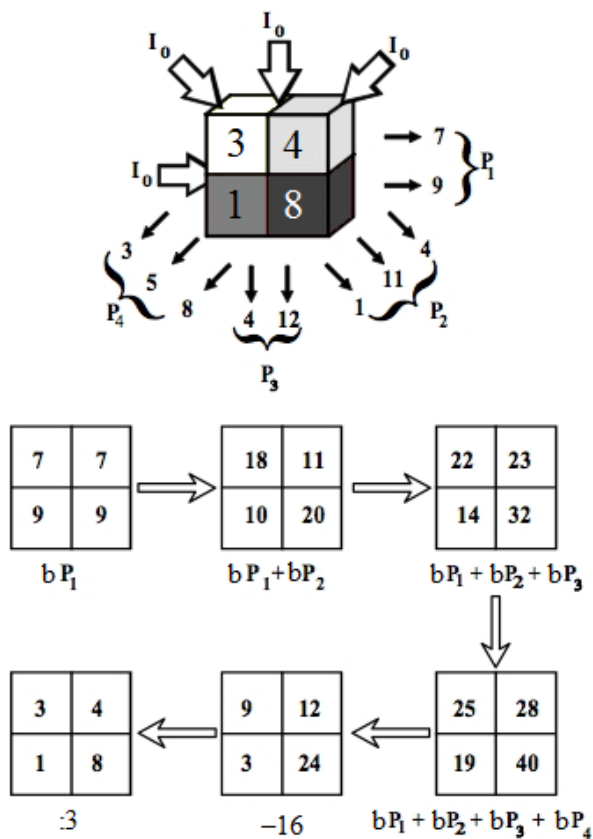


Рис. 2.6. Пример, иллюстрирующий процессы прямого и обратного проецирования

Таким образом, для восстановления исходной матрицы нужно из суммы обратных проекций поэлементно отнять 16 и разделить элементы полученной матрицы на 3.

Интегрирование обратных проекций объекта по углу θ дает следующий результат (интегрирование производится по углу $0 \leq \theta \leq \pi$, так как проекции под углами θ и $2\pi - \theta$ совпадают):

$$\int_0^{\pi} \alpha_b(x, y, \theta) d\theta = \alpha(x, y) * \frac{1}{|\mathbf{r}(x, y)|}, \quad (2.5)$$

где $|\mathbf{r}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$, * означает операцию свертки.

Кратко рассмотрим операцию свертки на примере одномерных сигналов. Формально **свертка** двух аналоговых сигналов $g(t)$ и $h(t)$ определяется следующим образом:

$$(g * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(-t + \tau) dt,$$

то есть включает в себя следующие действия:

- 1) временная инверсия сигнала h (изменение знака времени, в случае дискретных сигналов последние отсчеты сигнала становятся при инверсии первыми);
- 2) сдвиг сигнала h на величину τ ;
- 3) умножение сигнала g на инвертированный сдвинутый сигнал h ;
- 4) интегрирование произведения.

В качестве аргумента свертки используется величина сдвига τ между сигналами.

Свертка обычно используется для описания искажений формы сигнала $g(t)$ при его прохождении через линейный преобразователь. В этом случае второй сигнал $h(t)$ представляет собой **импульсную характеристику преобразователя** – сигнал, возникающий на выходе преобразователя в ответ на входное воздействие в виде δ -функции Дирака. В случае сигналов, зависящих от времени, δ -функция Дирака может рассматриваться как импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды, площадь под которым равна единице (это возможно при условии, что длительность импульса обратно пропорциональна его амплитуде). Импульсная характеристика преобразователя связана с его комплексной частотной характеристикой (КЧХ) $H(f)$ посредством преобразования Фурье:

$$H(f) = \mathfrak{F}\{h(t)\},$$

где \mathfrak{F} – условное обозначение преобразования Фурье.

В случае цифровых систем импульсная характеристика определяется как последовательность импульсов, возникающая на выходе преобразователя в ответ на входное воздействие в виде импульса единичной амплитуды, а при расчете свертки интегрирование заменяется суммированием:

$$r[n] = \sum_m s[m]h[-m + n],$$

где $s[m]$ – входная последовательность системы (последовательность отсчетов $s[0], s[1], s[2], \dots$ в моменты времени mt_d , где t_d – шаг дискретизации); $r[n]$ – выходная последовательность системы.

В реальных физических системах временная инверсия при прохождении через них сигнала не происходит: подобная инверсия является искусственным приемом, позволяющим повысить эффективность вычисления свертки. Существуют два способа вычисления свертки, один из которых (рис. 2.7, а) использует временную инверсию для повышения эффективности вычислений, а второй не требует временной инверсии (рис. 2.7, б).

Более естественным и интуитивно понятным является способ, представленный на рис. 2.7, б, основная идея которого состоит в том, что каждый импульс $s[m]$ входной последовательности порождает на выходе системы последовательность импульсов, описываемую смещенной и масштабированной по амплитуде импульсной характеристикой $s[m]h[n - m]$. Результирующая выходная последовательность системы определяется путем суммирования ее откликов на каждый из импульсов входной последовательности. Обозначение $h[n - m]$ смещенной импульсной характеристики подразумевает последовательный список амплитуд импульсов, для представления которого в виде функции можно использовать выражение

$$h(n - m) = \sum_k h[k - m]\Delta(k - n),$$

где $\Delta(k - n)$ – функция, описывающая единичный импульс ($\Delta(k - n) = 1$ при $k = n$, $\Delta(k - n) = 0$ при $k \neq n$).

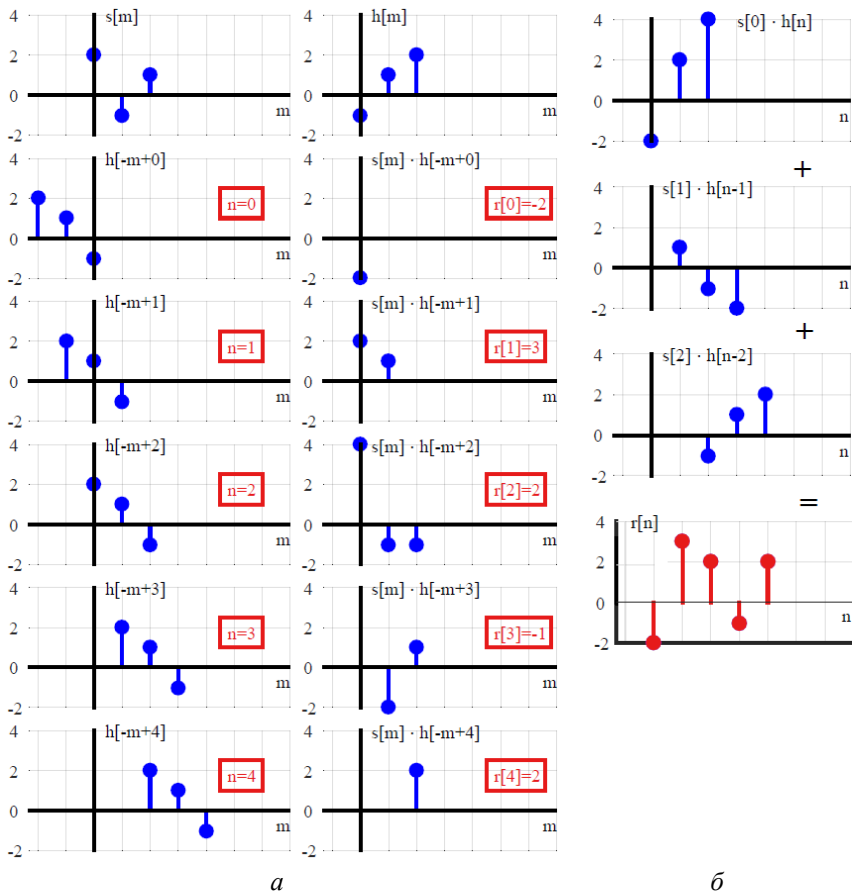


Рис. 2.7. Схемы выполнения свертки

Выходная последовательность, представленная в виде функции, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 r(n) &= \sum_m s[m] \sum_k h[k-m] \Delta(k-n) = \\
 &= \sum_m \sum_k s[m] h[k-m] \Delta(k-n).
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Следует обратить внимание, что ни одна из переменных суммирования (k и m) не подвергается временной инверсии. Подобный метод вычисления свертки называют **сверткой с рассеянием** (scattering convolution), так как амплитуда каждого из импульсов $s[m]$ входной последовательности распределяется (рассеивается) по импульсам выходной последовательности. Свертка с рассеянием подразумевает параллельное вычисление амплитуд всех импульсов выходной последовательности, что является нерациональным с вычислительной точки зрения, так как требует отведения собственной ячейки памяти для промежуточных значений каждого из импульсов выходной последовательности. Если изменить в формуле (2.6) порядок суммирования, то получим выражение

$$r(n) = \sum_k \sum_m s[m]h[-m+n]\Delta(k-n) = \sum_k \Delta(k-n) \sum_m s[m]h[-m+n],$$

в котором учтено, что так как $\Delta(k-n) = 1$ только при $k = n$, то в импульсной характеристике k можно заменить на n .

В данном случае амплитуды импульсов выходной последовательности рассчитываются последовательным образом. Такой метод расчета свертки называется **сверткой с объединением** (gathering convolution) и требует временной инверсии импульсной характеристики по переменной суммирования m . С математической точки зрения оба метода расчета включают выполнение одних и тех же операций, однако операции выполняются в различной последовательности.

Смысл выражения (2.5) состоит в том, что суммирование обратных проекций создает размытость вокруг каждой из точек в изображении объекта (см. рис. 2.5, д). Характер этой размытости описывается функцией $h(x, y) = 1/|\mathbf{r}(x, y)|$, которую в теории обработки изображений называют **функцией рассеяния точки**. Функция рассеяния точки может рассматриваться как импульсная характеристика системы формирования изображения и описывает искажения, вносимые системой формирования изображения в изображение точечного объекта, математически описываемого двумерной δ -функцией Дирака: например, идеальная оптическая система формирует точечное изображение точечного объекта, однако реальные оптические системы создают неточечное изображение точечного объекта. Математически искажения, вносимые системой формирования изображе-

ния, описываются путем свертки функции рассеяния точки системы формирования изображения с неискаженным изображением объекта (в рассматриваемом случае это функция $\alpha(x, y)$, описывающая распределение линейного коэффициента ослабления).

Таким образом, суммирование обратных проекций позволяет реконструировать изображение объекта по проекциям, однако на полученном в результате реконструкции изображении будут присутствовать искажения в виде размытости. В качестве примера на рис. 2.8 приведена реконструкция фантома Шеппа-Логана, полученная путем суммирования обратных проекций.

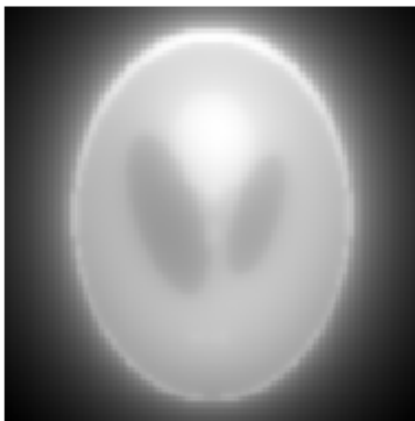


Рис. 2.8. Реконструкция фантома Шеппа-Логана, полученная путем суммирования обратных проекций

Функция рассеяния точки, возникающая при суммировании обратных проекций, является радиальной функцией, то есть функцией, зависящей только от модуля радиус-вектора $|\mathbf{r}(x, y)|$. Преобразование Фурье радиальной функции также будет являться радиальной функцией, то есть будет зависеть только от модуля вектора пространственных частот $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$:

$$\tilde{h}(\mathbf{k}) = \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}(x, y)|} \right\} = \frac{1}{|\mathbf{k}|}.$$

Применив преобразование Фурье к уравнению (2.5) и учитывая, что свертке двух функций соответствует произведение их преобразований Фурье, получим

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{\mathfrak{F} \left\{ \int_0^{\pi} \alpha_b(x, y, \theta) d\theta \right\}}{\tilde{h}(\mathbf{k})} = |\mathbf{k}| \mathfrak{F} \left\{ \int_0^{\pi} \alpha_b(x, y, \theta) d\theta \right\}. \quad (2.7)$$

С точки зрения теории обработки изображений выражение (2.7) описывает **деконволюцию** – процесс восстановления изображения, в которое были внесены искажения в результате свертки (конволюции) с функцией рассеяния точки системы формирования изображения.

Выполняя обратное преобразование Фурье выражения (2.7), получим

$$\alpha(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ |\mathbf{k}| \} * \int_0^{2\pi} \alpha_b(x, y, \theta) d\theta. \quad (2.8)$$

Функция $h_f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \{ |\mathbf{k}| \}$ может рассматриваться как импульсная характеристика двумерного **пилообразного фильтра** с КЧХ $H(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$. В этом случае деконволюция может быть описана как процесс фильтрации искаженного изображения. Размытость изображения представляет собой низкочастотные искажения, поэтому резкость размытого изображения обычно повышается путем применения фильтра верхних частот. Действительно, в рассматриваемом случае функции искажений (функции рассеяния точки) соответствует функция спектральной плотности $\tilde{h}(\mathbf{k}) = \frac{1}{|\mathbf{k}|}$, в которой максимальную амплитуду имеют низкочастотные составляющие, а КЧХ фильтра, устраняющего искажения, имеет вид $H(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$, то есть фильтр обеспечивает максимальное ослабление на низких частотах, где искажения имеют максимальную амплитуду.

Выражение (2.8) представляет собой математическую формулировку метода **«обратная проекция – затем фильтрация»**. Более

простым является **метод фильтрованных обратных проекций**, в котором проекции объекта подвергаются фильтрации с помощью одномерного пилообразного фильтра перед выполнением обратного проецирования:

$$\alpha_{bf}(x, y, \theta) = \alpha_{\Sigma}(\theta, \rho) *_{\rho} \mathfrak{F}_{\rho}^{-1}\{|k|\} \Big|_{\rho' = x \cos \theta + y \sin \theta}, \quad (2.9)$$

$$\alpha(x, y) = \int_0^{\pi} \alpha_{bf}(x, y, \theta) d\theta,$$

где индекс ρ указывает на переменную, по которой выполняются обратное преобразование Фурье и свертка; ρ' – аргумент свертки (величина сдвига).

Таким образом, в методе фильтрованных обратных проекций изображение объекта восстанавливается путем обратного проецирования прямых проекций, подвергшихся фильтрации с помощью пилообразного фильтра, с последующим суммированием полученных обратных проекций. Фильтрация выполняется для устранения низкочастотных искажений (размытости изображения), возникающих при суммировании нефильтрованных обратных проекций.

Входящая в уравнение (2.9) импульсная характеристика пилообразного фильтра

$$h_f(\rho) = \mathfrak{F}_{\rho}^{-1}\{|k|\}$$

выражается через обобщенные функции:

$$h_f(\rho) = -\frac{1}{2\pi^2} \wp\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Функция $\wp\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ может быть определена как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательности функций, изображенных на рис. 2.9.

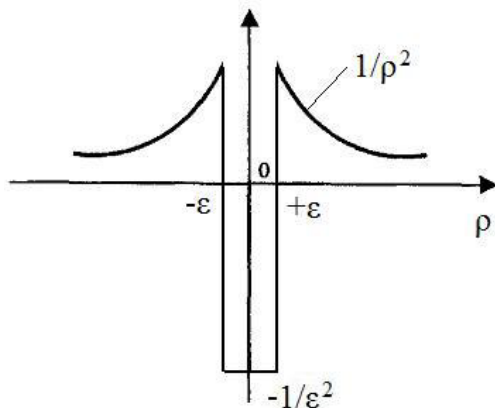


Рис. 2.9. Функция, используемая при построении

обобщенной функции $\wp\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$

Путем интегрирования можно убедиться, что площадь под графиком изображенной на рис. 2.9 функции равна нулю. Это свойство сохраняется и при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \wp\left(\frac{1}{\rho^2}\right) d\rho = 0.$$

Данное свойство также вытекает из равенства нулю постоянной составляющей КЧХ пилообразного фильтра.

Так как проекции объекта регистрируются с помощью конечного числа детекторов, расположенных с шагом d , что соответствует частоте дискретизации $k_d = 1/d$, то согласно теореме Котельникова максимальная пространственная частота, которая может быть зарегистрирована с помощью детекторов, составляет $k_{\max} = 1/2d$. В связи с этим на практике используют полосовой пилообразный фильтр (**фильтр Рама-Лака**), пропускающий частоты в диапазоне от $-k_{\max}$ до $+k_{\max}$ (характеристики фильтра приведены в табл. 2.1 и графически изображены на рис. 2.10 (кривая 1); значения по оси ординат нормированы путем деления на k_d).

Таблица 2.1

Характеристики фильтров, используемых в методе фильтрованных обратных проекций

Наименование фильтра	КЧХ	Импульсная характеристика
Рама-Лака	$k_d \xi \text{rect}(\xi)$	$0,25k_d^2 (2 \text{sinc}(\pi\eta) - \text{sinc}^2(0,5\pi\eta))$
Шеппа-Логана	$H_{RL}(\xi) \text{sinc}(\pi\xi)$	$\frac{2k_d^2 (1 + \text{sinc}(\pi\eta))}{\pi^2 (1 - 4\eta^2)}$
Косинусный	$H_{RL}(\xi) \cos(\pi\xi)$	$0,5(h_{RL}(\eta - 0,5) + h_{RL}(\eta + 0,5))$
Обобщенный Хэмминга	$H_{RL}(\xi)(\alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi\xi))$ $0,5 \leq \alpha < 1$	$0,5(1 - \alpha)(h_{RL}(\eta - 1) + h_{RL}(\eta + 1)) + \alpha h_{RL}(\eta)$

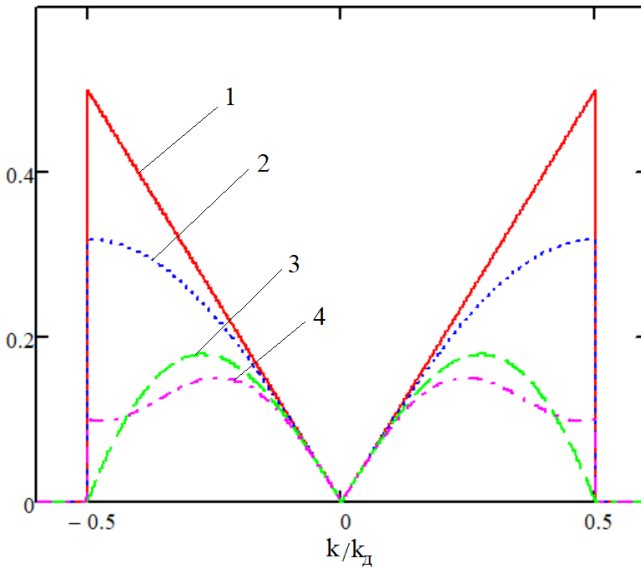


Рис. 2.10. Графическое изображение частотных характеристик фильтров

В табл. 2.1 использованы следующие обозначения: $\xi = k/k_d$ – безразмерная частота, $\eta = \rho k_d$ – безразмерное расстояние,

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2 \end{cases}, H_{RL}(\xi) - \text{КЧХ фильтра Рама-Лака}, h_{RL}(\eta) -$$

импульсная характеристика фильтра Рама-Лака. Недостатком фильтра Рама-Лака является усиление высокочастотного шума. Поэтому для увеличения отношения сигнал/шум используют фильтры, КЧХ которых получаются из КЧХ фильтра Рама-Лака путем умножения на **оконную функцию**, равную единице при $k = 0$ и убывающую с ростом $|k|$. В случае **фильтра Шеппа-Логана** (кривая 2 на рис. 2.10) в качестве оконной функции используется sinc-функция, а у **косинусного фильтра** (кривая 3 на рис. 2.10) и **обобщенного фильтра Хэмминга** (кривая 4 на рис. 2.10) – косинусоидальные функции.

При фильтрации проекций их спектральная плотность умножается на КЧХ фильтра с нулевым значением постоянной составляющей. Как следствие, спектральная плотность фильтрованных проекций также будет иметь нулевую постоянную составляющую, что соответствует нулевому интегральному значению фильтрованных проекций:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{\Sigma f}(\theta, \rho) d\rho = 0.$$

Обнуление интегрального значения фильтрованных проекций достигается благодаря появлению на них отрицательных «крыльев», асимптотически стремящихся к нулю при $|\rho| \rightarrow \infty$ (рис. 2.11).

На рис. 2.11, *a* изображена вертикальная проекция центральной части фантома Шеппа-Логана (для сравнения см. рис. 2.4), а на рис. 2.11, *б* – ее вид после фильтрации (как видно, на фильтрованной проекции появляются отрицательные значения). На рис. 2.11, *в* значения проекции за пределами области интереса, изображенной в виде горизонтального отрезка, приняты равными нулю, а на рис. 2.11, *г* показано влияние фильтрации на приведенную на рис. 2.11, *в* проекцию: на фильтрованной проекции наблюдаются хорошо выраженные отрицательные «крылья».

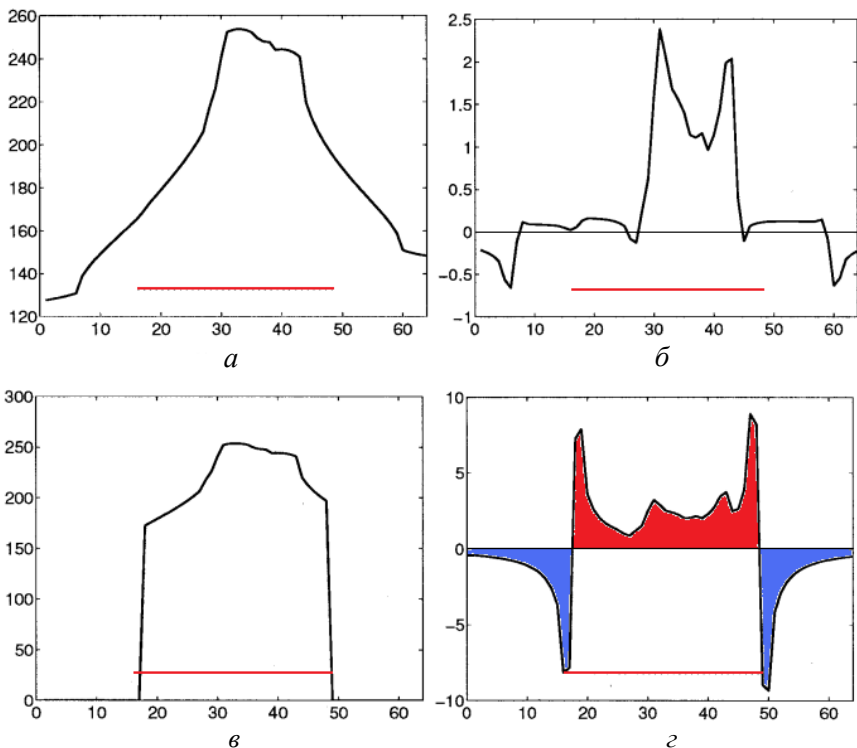


Рис. 2.11. Влияние фильтрации на вид проекций фантома Шеппа-Логана

На рис. 2.12 схематически изображен процесс суммирования фильтрованных обратных проекций объекта в виде круга.

При фильтрации на проекциях объекта появляются отрицательные «крылья», выделенные штриховкой. При обратном проецировании отрицательные «крылья» обратной проекции компенсируют в окрестности объекта вклад положительных пиков остальных обратных проекций, благодаря чему объект оказывается отделенным от фона (белая область вокруг объекта на рис. 2.12).

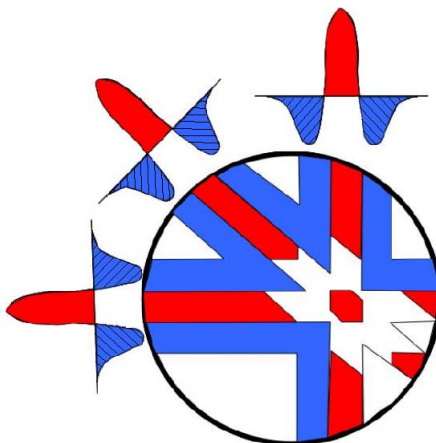


Рис. 2.12. Схематическое изображение суммирования фильтрованных обратных проекций

Порядок выполнения работы

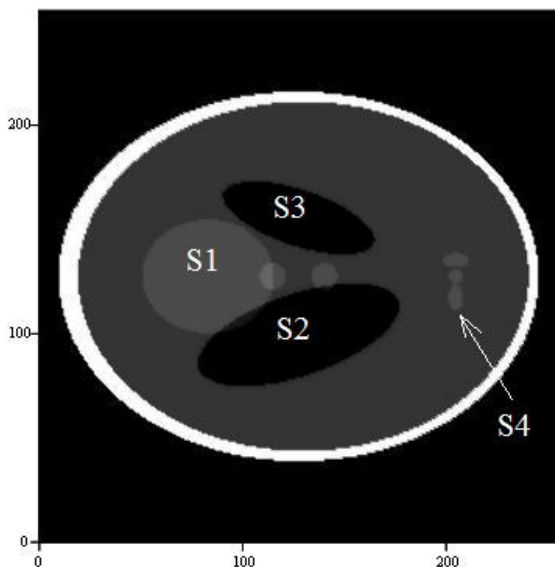
1. Запускаем программу Mathcad и импортируем в нее изображение тестового объекта, в качестве которого используется фантом Шеппа-Логана:

```
path := "C : /Shepp_logan_256.bmp";
```

```
I := READBMP(path).
```

Функция *READBMP(path)* импортирует полутоновое изображение из графического файла с расширением BMP, место хранения которого определяется символьной переменной *path*, в матрицу, число элементов которой соответствует числу пикселей изображения. Элементы матрицы представляют собой целые числа от 0 до 255, указывающие на интенсивность пикселей изображения: значение 0 соответствует черным пикселям, а значение 255 – белым пикселям. В рассматриваемом случае будем считать, что элементы матрицы представляют собой значения линейного коэффициента ослабления рентгеновского излучения.

2. Для графического отображения фантома выбираем в меню Insert → Picture. В нижнее поле вводим имя матрицы I . В результате получается изображение, представленное на рис. 2.13 (условные обозначения неоднородностей $S1..S4$ добавлены в графическом редакторе).



I

Рис. 2.13. Изображение фантома Шеппа-Логана

Белые области соответствуют максимуму линейного коэффициента ослабления и имитируют кости черепа, а черные области соответствуют минимальному коэффициенту ослабления и имитируют спинномозговую жидкость и воздух.

3. Определяем размер матрицы I и задаем диапазон изменения номеров ее строк и столбцов:

$$N := \text{rows}(I);$$

$$i := 0..N - 1;$$

$$j := 0..N - 1.$$

Функция $rows(M)$ определяет число строк в матрице M . Для определения числа столбцов используется функция $cols(M)$.

4. Дополнительно создаем фантом, имеющий однородное распределение коэффициента ослабления внутри «череп»:

$$I2_{i,j} := if((44 < i < 216) \cdot (73 < j < 175), 51, I_{i,j}).$$

Функция $if(cond, val1, val2)$ принимает значение $val1$, если выполняется логическое условие $cond$, и принимает значение $val2$ в противном случае. В рассматриваемом случае логическое условие $cond$ представляет собой условие принадлежности пикселя прямоугольнику, содержащему внутри себя все внутренние неоднородности исходного фантома. Таким образом, всем пикселям, принадлежащим этому прямоугольнику, присваивается интенсивность 51, соответствующая пикселям, прилегающим к внутренней части «череп», а остальные пиксели сохраняют исходные значения интенсивности.

5. Строим изображение однородного фантома (рис. 2.14).

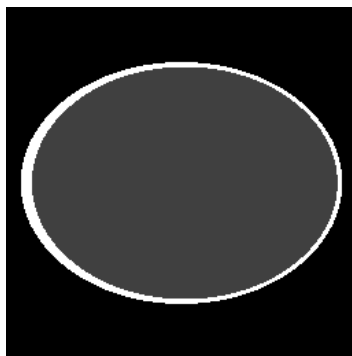


Рис. 2.14. Изображение однородного фантома

6. Задаем количество проекций и углы, под которыми формируются проекции фантомов:

$$na := 64;$$

$$m := 0..na - 1;$$

$$\alpha_m := \frac{\pi \cdot m}{na}.$$

7. Механизм формирования проекций объекта иллюстрируется рис. 2.15.

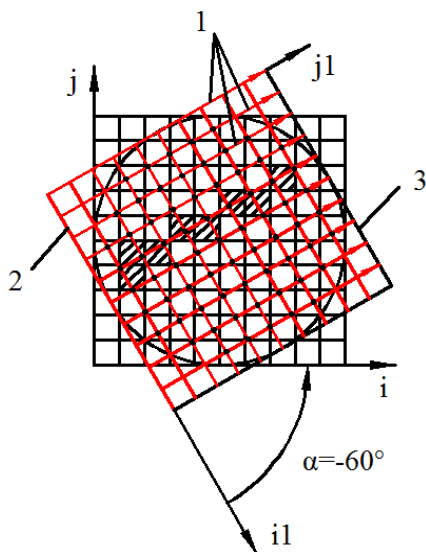


Рис. 2.15. Механизм формирования проекций объекта:
1 – рентгеновские лучи; 2 – линия источника (щель коллиматора);
3 – линия детекторов

При моделировании будем использовать две системы координат (СК):

1) Неподвижная СК объекта ij , в которой определяются координаты пикселей. Целочисленные координаты i и j являются аналогами непрерывно изменяющихся координат x и y , использованных в теоретической части работы.

2) Вращающаяся СК детекторов i_1j_1 с осью j_1 , параллельной направлению распространения рентгеновских лучей. Целочисленные координаты i_1 и j_1 являются аналогами непрерывно изменяющихся координат ρ и z .

Для каждого углового положения α детекторов зададим N равномерно расположенных дискретных лучей, на каждом из которых выделим N равномерно распределенных точек дискретизации. Значение линейного коэффициента ослабления в точках дискретизации будет определяться интенсивностью пикселей, которым принадле-

жат эти точки. Детекторы и источник излучения предполагаются вращающимися относительно центра с координатами $(N/2, N/2)$ в СК объекта, поэтому для исключения соударений объекта с детекторами и источником объект должен быть полностью заключен внутри изображенной на рис. 2.15 окружности с центром $(N/2, N/2)$ и радиусом $N/2$ и при вычислении проекций можно учитывать только вклад точек дискретизации, лежащих внутри этой окружности. Эти точки выделены на рисунке маленькими кружками. Например, заключенные внутри окружности точки дискретизации для 4-го луча принадлежат пикселям с координатами $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$, $(7, 7)$. Соответствующие пиксели заштрихованы. Пара координат $(7, 7)$ повторяется дважды, так как пикселю с этими координатами принадлежат две точки дискретизации. Для точек дискретизации, лежащих за пределами окружности или на ее контуре, можно искусственно положить координаты соответствующих им пикселей равными нулю. Так как нулевой пиксель имеет нулевую интенсивность, то рассмотренные точки дискретизации не будут вносить вклада в формирование проекций. Связь между координатами (i, j) и (i_1, j_1) может быть описана преобразованием

$$\begin{pmatrix} i - N/2 \\ j - N/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 - N/2 \\ j_1 - N/2 \end{pmatrix},$$

смысл которого состоит в том, что смещенная в центр вращения СК детекторов совмещается со смещенной в центр вращения СК объекта путем поворота на угол α . Положительные значения угла α отсчитываются по часовой стрелке.

С учетом изложенного запишем функции, которые по известным координатам i_1 и j_1 точек дискретизации в СК детекторов вычисляют координаты i и j соответствующих этим точкам пикселей в СК объекта:

$$\begin{aligned} i(m, i_1, j_1) &:= \text{if}(((i_1 - 0.5 \cdot N)^2 + (j_1 - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, 0, \\ &0.5 \cdot N + \text{floor}(\cos(\alpha_m) \cdot (i_1 - 0.5 \cdot N) - \sin(\alpha_m) \cdot (j_1 - 0.5 \cdot N))), \\ j(m, i_1, j_1) &:= \text{if}(((i_1 - 0.5 \cdot N)^2 + (j_1 - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, 0, \\ &0.5 \cdot N + \text{floor}(\sin(\alpha_m) \cdot (i_1 - 0.5 \cdot N) + \cos(\alpha_m) \cdot (j_1 - 0.5 \cdot N))). \end{aligned}$$

Так как координаты пикселей должны представлять собой целые числа, то в координатное преобразование дополнительно введена функция *floor*, соответствующая округлению до целого числа в меньшую сторону. Записанные выражения являются аналогами выражений (2.2) и (2.3).

8. Вычисляем проекции фантома Шеппа-Логана и однородного фантома:

$$i1 := 0..N - 1;$$

$$p_{i1, m} := \sum_{j1=0}^{N-1} I_{i(m, i1, j1), j(m, i1, j1)};$$

$$p_{2i1, m} := \sum_{j1=0}^{N-1} I_{2i(m, i1, j1), j(m, i1, j1)}.$$

Записанные выражения являются дискретными аналогами уравнения (2.1), в которых суммирование интенсивностей пикселей соответствует интегрированию линейного коэффициента ослабления.

9. Строим проекции фантома Шеппа-Логана и однородного фантома для углов $\alpha = 0^\circ$ ($m = 0$, направление лучей снизу вверх относительно рис. 2.13) и $\alpha = 90^\circ$ ($m = 32$, направление лучей справа налево) (рис. 2.16).

Сплошной линией изображены проекции однородного фантома, а в виде точек – проекции фантома Шеппа-Логана. Сравнение с проекциями однородного фантома позволяет наглядно увидеть влияние неоднородностей на вид проекций. Пики $P1$ и $P2$ на рис. 2.16, *a* соответствуют «костям черепа». При этом пик $P1$ имеет бóльшую высоту, так как левая часть «черепа» толще правой. Пики $P3$ и $P4$ соответствуют областям $S1$ и $S4$ с повышенным коэффициентом ослабления. Впадина $V1$ соответствует областям $S2$ и $S3$ с пониженным коэффициентом ослабления. На рис. 2.16, *б* пики $P1$ и $P2$, соответствующие «костям черепа», имеют одинаковую высоту, так как нижняя и верхняя части «черепа» симметричны между собой. Пик $P3$ соответствует областям $S1$ и $S4$ с повышенным коэффициентом ослабления. Впадины $V1$ и $V2$ соответствуют областям $S2$ и $S3$ и име-

ют различную глубину, что соответствует различной длине областей $S2$ и $S3$ в направлении проекции (справа налево).

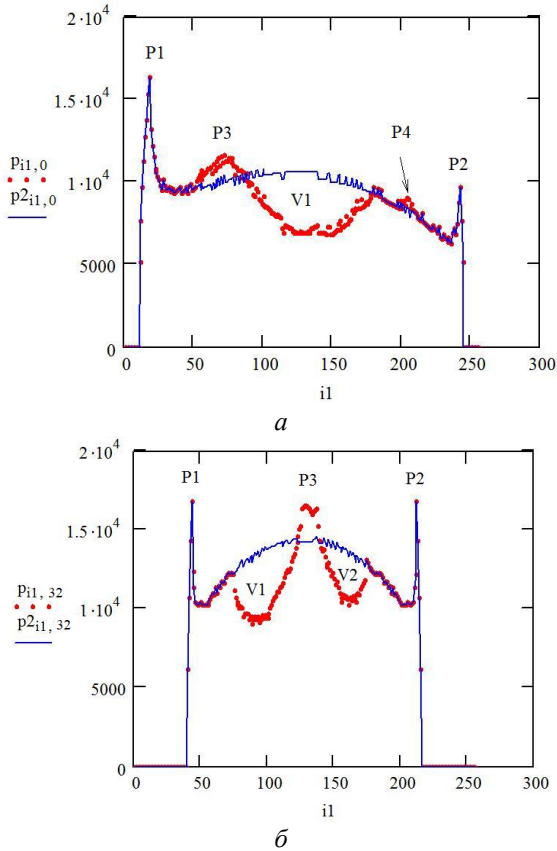


Рис. 2.16. Проекция фантомов

10. Задаем расстояние между детекторами и импульсную характеристику фильтра Шеппа-Логана:

$$d := 1$$

$$h_{i1} := \frac{-1}{4 \cdot (i1 - 0,5 \cdot N)^2 - 1} \cdot \frac{2}{\pi^2 \cdot d^2}$$

11. Вычисляем фильтрованные проекции фантома с помощью дискретной свертки проекций и импульсной характеристики фильтра (см. уравнение (2.9)):

$$pf_{il,m} := \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,m} \cdot if(0 \leq il - k + 0.5 \cdot N \leq N - 1, h_{il-k+0.5 \cdot N}, 0).$$

При свертке индекс k импульсной характеристики заменяют на противоположный по знаку и смещают на величину $il + 0,5 \cdot N$, вследствие чего значения смещенного индекса могут выходить за пределы допустимого диапазона от 0 до $N - 1$. Чтобы учесть это, под знаком суммы введена функция if , которая принимает значение, равное величине импульсной характеристики, для допустимых значений смещенного индекса и значение, равное нулю, при выходе смещенного индекса за пределы допустимого диапазона.

12. Строим фильтрованную проекцию фантома для угла $\alpha = 90^\circ$ (рис. 2.17).

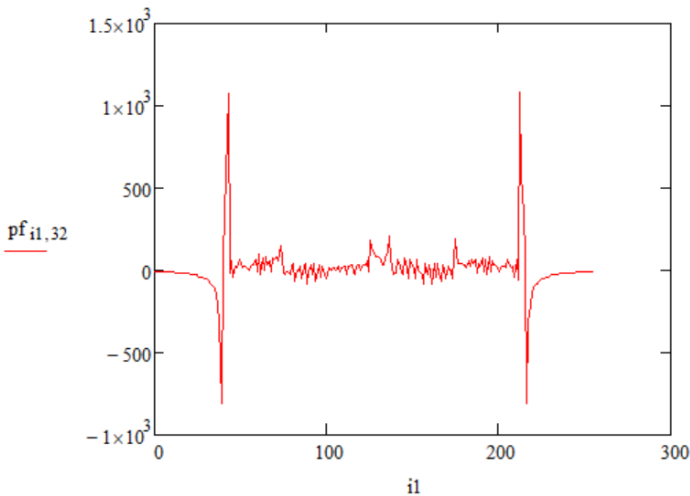


Рис. 2.17. Фильтрованная проекция фантома

Видны характерные для фильтрованных проекций нулевое среднее значение и отрицательные «крылья».

13. Задаем функцию, которая по известным координатам i и j пикселя в СК объекта вычисляет координату il соответствующего этому пикселю луча в СК детекторов (аналог выражения $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$):

$$il(m, i, j) := if((i - 0.5 \cdot N)^2 + (j - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, 0, \\ 0.5 \cdot N + floor(\cos(\alpha_m) \cdot (i - 0.5 \cdot N) + \sin(\alpha_m) \cdot (j - 0.5 \cdot N))).$$

14. Выполняем реконструкцию изображения фантома путем суммирования фильтрованных обратных проекций:

$$i := 0..N - 1;$$

$$j := 0..N - 1;$$

$$Ir_{i, j} := \sum_{m=0}^{na-1} pf_{il(m, i, j), m}.$$

15. Для сохранения реконструированного изображения в формате BMP записываем функцию, преобразующую элементы матрицы Ir в целочисленные значения от 0 до 255:

$$minIr := \min(Ir);$$

$$maxIr := \max(Ir);$$

$$Ir1_{i, j} := floor\left(255 \cdot \frac{Ir_{i, j} - minIr}{maxIr - minIr}\right).$$

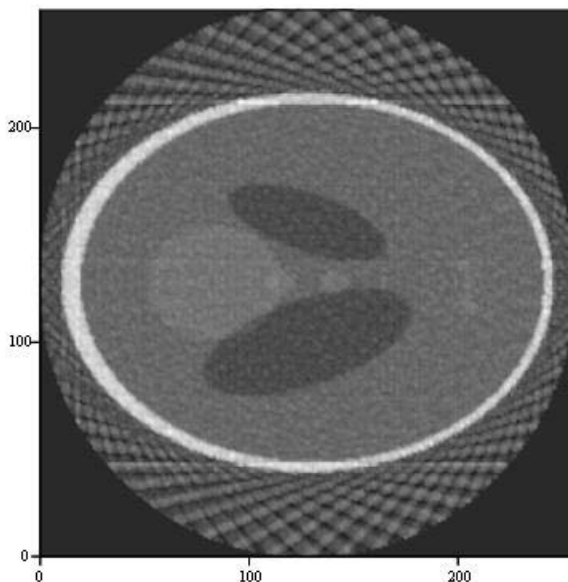
16. Строим реконструированное изображение фантома (рис. 2.18).

При необходимости изображение может быть записано в графический файл:

$$path := "C : / Shepp _ logan _ reconstructed . bmp";$$

$$WRITEBMP(path) := Ir1.$$

При малом числе проекций на реконструированном изображении фантома наблюдается артефакт в виде светлых полос, расположенных по касательной к «костям черепа».



Ir

Рис. 2.18. Реконструированное изображение фантома

Такой артефакт характерен для метода фильтрованных обратных проекций и возникает при наличии областей с высоким линейным коэффициентом ослабления (или высокой активностью изотопа в случае позитронно-эмиссионной томографии и однофотонной эмиссионной компьютерной томографии). Его причиной является недостаточное количество проекций объекта. В случае сильно ослабляющей области малого размера артефакт имеет вид радиальных линий, исходящих из этой области и напоминающих лучи звезды. В рентгеновской томографии причиной появления данного артефакта могут быть металлические имплантаты, металлические инородные тела. В качестве примера на рис. 2.19 приведена томограмма пациента с металлическим протезом тазобедренного сустава.

Можно убедиться, что путем увеличения числа проекций можно добиться почти полного исчезновения артефактов.

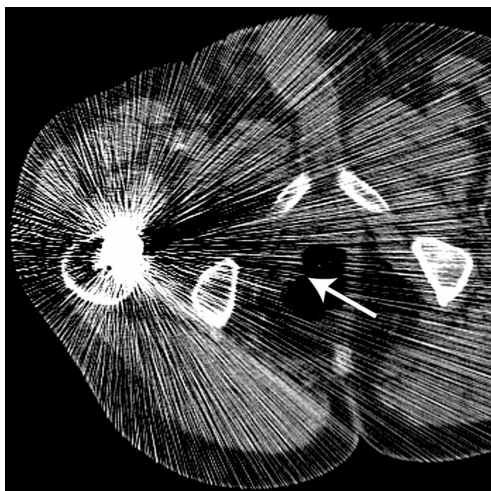


Рис. 2.19. Томограмма пациента с металлическим протезом тазобедренного сустава

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие теоретические сведения о реконструкции изображений методом фильтрованных обратных проекций.
3. Схематическое изображение фантома Шеппа-Логана и его проекций под различными углами α , заданными преподавателем (попытайтесь предположить, как будут выглядеть проекции, без проведения расчетов, а затем проверьте свои предположения расчетным путем).
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Бугера-Бэра-Ламберта для однородной и неоднородной сред.
2. Поясните принцип формирования проекций объекта в рентгеновской томографии.

3. Дайте определение операции обратного проецирования.
4. В чем состоит недостаток реконструкции изображения объекта путем простого суммирования обратных проекций?
5. Что такое импульсная характеристика фильтра и как она связана с его КЧХ?
6. Что такое функция рассеяния точки?
7. Какие математические действия включает в себя операция свертки и в чем состоит ее смысл с точки зрения преобразования сигналов в линейной системе?
8. Поясните принцип коррекции искажений, внесенных в изображение системой формирования изображения, методом деконволюции.
9. Почему для фильтрации проекций в рентгеновской томографии используют полосовой пилообразный фильтр (фильтр Рама-Лака)?
10. Назовите основной недостаток фильтра Рама-Лака и поясните, каким образом он учитывается в других фильтрах для рентгеновской томографии.
11. Каким образом рассчитывается импульсная характеристика пилообразного фильтра?
12. Назовите особенности фильтрованных проекций объекта по сравнению с нефитрованными.

Лабораторная работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

Цель работы

Изучить методы обработки сигналов в магнитно-резонансной томографии (МРТ) и особенности программной реализации этих методов.

Инструменты и принадлежности

1. Персональный компьютер с установленным программным обеспечением Mathcad.
2. Текстовые файлы с синфазным и квадратурным сигналами МРТ. Файлы доступны по ссылкам:
 - https://disk.yandex.by/d/Ybb3py_B6XCaZQ;
 - <https://disk.yandex.by/d/7UDk9FqUOJHKsA>.

Общие сведения

В основе МРТ лежит наличие магнитного момента у атомных ядер, обладающих ненулевым общим моментом импульса, в частности, у ядер водорода, присутствующих во всех типах биологических тканей. Общий момент импульса ядра связан с его нуклонным составом, то есть количеством протонов и нейтронов в нем, и поэтому не все ядра обладают магнитным моментом. Тем не менее, для каждого химического элемента существует, по меньшей мере, один изотоп, ядра которого обладают магнитным моментом. Во внешнем магнитном поле на ядро, обладающее магнитным моментом, действует вращающий момент, что приводит к **ларморовской прецессии** – вращательному движению вектора магнитного момента ядра вокруг направления внешнего магнитного поля. Процесс ларморовской прецессии является непрерывным, так как на биологический объект постоянно действуют магнитные поля, в частности, магнитное поле Земли. Частота ларморовской прецессии зависит от индукции B_0 приложенного к биологическому объекту магнитного поля:

$$\nu_L = \underline{\gamma}B_0,$$

где $\underline{\gamma}$ – **приведенное гиромагнитное отношение**, зависящее от вида атомных ядер.

Для ядер водорода гиромагнитное отношение составляет 42,58 МГц/Тл, то есть во внешнем магнитном поле с индукцией 1 Тл их прецессия будет происходить с частотой 42,58 МГц, что соответствует радиочастотному диапазону.

При воздействии на биологическую ткань радиочастотных электромагнитных импульсов с частотой, равной частоте ларморовской прецессии входящих в состав ткани ядер, энергия импульсов резонансным образом поглощается тканью. Как показано на рис. 3.1, энергия ядра в магнитном поле может принимать два значения: E_2 , соответствующее отрицательной проекции магнитного момента на направление поля, и E_1 , соответствующее положительной проекции.

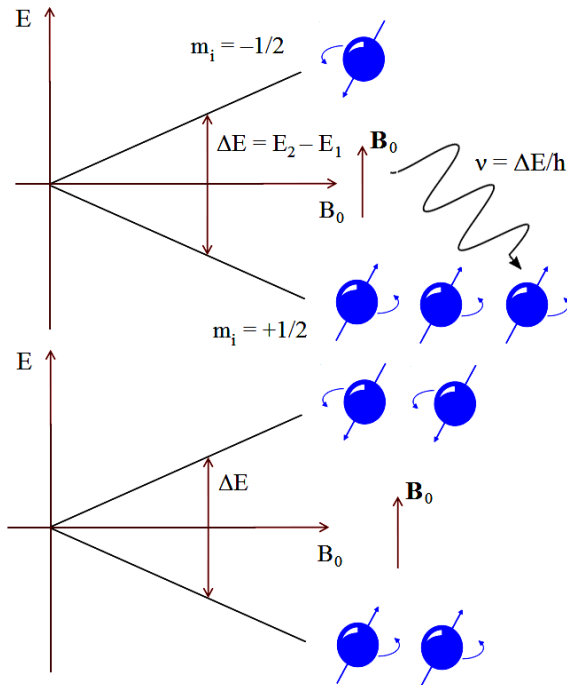


Рис. 3.1. Схема, поясняющая эффект ЯМР

Электромагнитное излучение с частотой $\nu = (E_2 - E_1)/h$, где h – постоянная Планка, резонансным образом поглощается ядрами с более низкой энергией E_1 , в результате чего они переходят в состояние с более высокой энергией E_2 , а знак проекции их магнитного момента на направление поля изменяется на противоположный. Это явление называется **ядерно-магнитным резонансом (ЯМР)**.

Если рассмотреть некоторый объем биологической ткани, то сумма магнитных моментов всех содержащихся в нем ядер даст вектор **макроскопической намагниченности**:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\mu}_k.$$

В статическом магнитном поле вектор макроскопической намагниченности имеет только продольную (по отношению к индукции поля) составляющую M_z , так как поперечные составляющие $\boldsymbol{\mu}_{xy}$ магнитных моментов атомных ядер направлены случайным образом и их векторная сумма оказывается равной нулю (рис. 3.2).

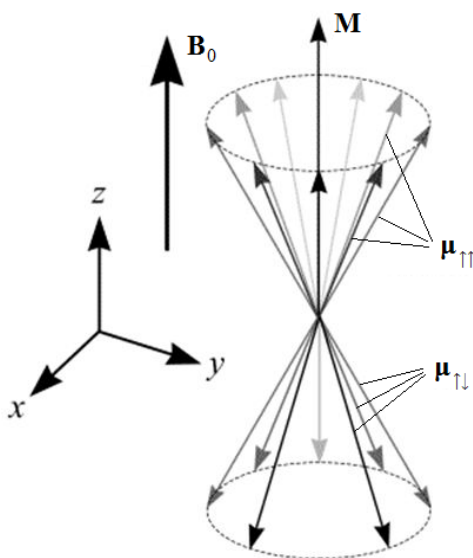


Рис. 3.2. Сложение магнитных моментов ядер в статическом магнитном поле

Таким образом, в статическом магнитном поле вектор макроскопической намагниченности не испытывает прецессии, несмотря на то, что магнитные моменты атомных ядер находятся в непрерывном прецессионном движении.

При воздействии на биологическую ткань радиочастотного импульса с частотой, равной частоте ларморовской прецессии, и индукцией $\mathbf{V}_1(t) = |\mathbf{V}_1|(\sin(2\pi\nu_L t)\mathbf{e}_x + \cos(2\pi\nu_L t)\mathbf{e}_y)$, $\mathbf{V}_1(t) \perp \mathbf{V}_0$ появляется поперечная составляющая M_{xy} вектора макроскопической намагниченности. Конец вектора \mathbf{M} совершает при этом движение по спиральной траектории, являющееся результатом сложения быстрого прецессионного движения вокруг направления статического поля \mathbf{V}_0 и медленного прецессионного движения вокруг направления вращающегося поля \mathbf{V}_1 (рис. 3.3).

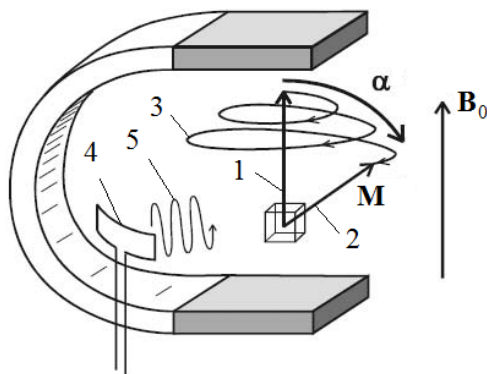


Рис. 3.3. Поведение вектора макроскопической намагниченности при воздействии на ткань радиочастотного импульса

После прекращения действия импульса вектор макроскопической намагниченности \mathbf{M} возвращается в исходное состояние – этот процесс называется **релаксацией**. Поперечная составляющая намагниченности M_{xy} уменьшается при этом с течением времени, а продольная составляющая M_z нарастает.

В процессе релаксации в приемной катушке, чувствительной к поперечной составляющей намагниченности M_{xy} , индуцируется высокочастотный электрический сигнал, который в дальнейшем используется для формирования изображения биологического объекта.

Таким образом, источником сигнала в МРТ является поперечная намагниченность биологической ткани, возникающая за счет отклонения вектора продольной намагниченности в результате воздействия радиочастотного импульса.

Сигнал, индуцируемый в приемной катушке, может быть представлен в форме

$$u(t) = \text{Re}(s\mathbf{M}_{xy}(t) \exp(j \cdot 2\pi\nu_{RF}t)),$$

где s – чувствительность приемной катушки;

$\mathbf{M}_{xy}(t)$ – комплекснозначная функция, характеризующая величину и направление поперечной составляющей вектора намагниченности;

ν_{RF} – частота радиочастотного импульса.

Сигнал от приемной катушки пропускается через полосовой фильтр 1, усилитель 2 и аналогово-цифровой преобразователь 3 (рис. 3.4).

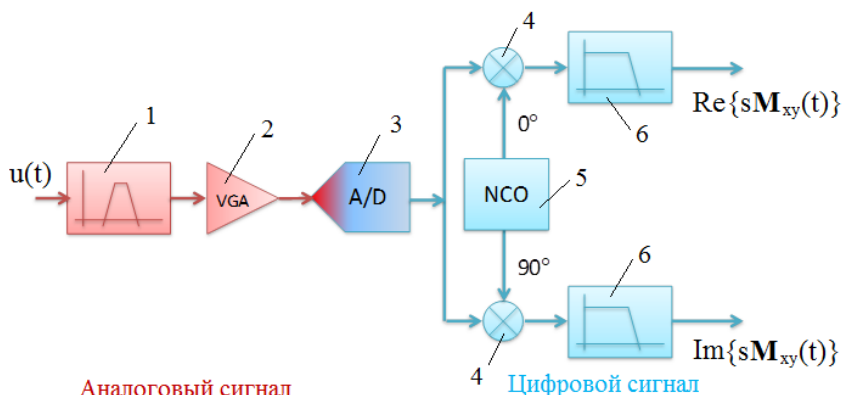


Рис. 3.4. Схема квадратурной демодуляции сигнала МРТ

Ограничение полосы частот сигнала с помощью фильтра позволяет избежать его искажений в результате дискретизации (согласно теореме Котельникова дискретизированный сигнал может быть восстановлен по совокупности своих отсчетов без искажений только в случае, когда он имеет ограниченную полосу частот). Информация о свойствах биологического объекта содержится в функции $\mathbf{M}_{xy}(t)$, а множитель $\exp(j \cdot 2\pi\nu_{RF}t)$ (несущая частота сигнала) не дает по-

лезной информации. Поэтому сигнал подвергается **демодуляции**, в результате которой устраняется несущая частота. В МРТ используется **квадратурная демодуляция**, при которой сигнал делится на два канала, один из которых умножается в смесителе 4 на опорный сигнал $\cos(2\pi\nu_{RF}t)$ (**синфазный опорный сигнал**) от генератора опорной частоты 5, а второй – на опорный сигнал $\sin(2\pi\nu_{RF}t)$ (**квадратурный опорный сигнал**, имеющий фазовое смещение 90° по отношению к синфазному опорному сигналу). Выходные сигналы смесителей пропускаются через фильтры нижних частот 6. В результате формируются два сигнала, обозначаемые как **I-сигнал** (от слова in-phase – синфазный) и **Q-сигнал** (от слова quadrature – квадратурный) и дающие информацию о действительной и мнимой частях функции $\mathbf{M}_{xy}(t)$, которые могут рассматриваться как две ортогональные компоненты поперечной составляющей вектора намагниченности. Квадратурная демодуляция дает как амплитудную информацию о модуле поперечной составляющей вектора намагниченности, так и фазовую информацию о направлении поперечной составляющей вектора намагниченности.

Синфазный и квадратурный сигналы могут рассматриваться как действительная и мнимая части комплекснозначного сигнала, который может быть получен из функции распределения свойств биологического объекта с помощью преобразования Фурье. Каждый отсчет сигнала по времени соответствует определенному значению пространственной частоты k_x по координате x . Для получения информации по второй пространственной частоте k_y , соответствующей координате y , последовательно регистрируется множество сигналов, соответствующих различным значениям градиента магнитного поля в направлении оси y . Под **градиентом магнитного поля** понимают его линейное пространственное изменение. В однородном магнитном поле частота прецессии всех атомных ядер в теле человека будет одинаковой и будет регистрироваться суммарный сигнал от всех органов и тканей, не дающий информации о пространственном распределении их свойств. В связи с этим для пространственной локализации сигнала, то есть для определения пространственных координат источников каждой из составляющих сигнала, к биологическому объекту прикладываются градиенты магнитного поля G_x , G_y , G_z по всем трем координатным осям, то есть намеренно со-

здается неоднородность магнитного поля. Если градиент G_y имеет N уровней и для каждого уровня регистрируется N временных отсчетов сигнала, то в результате получается комплекснозначная матрица размером $N \times N$, элементы которой представляют собой отсчеты двумерного преобразования Фурье (**Фурье-образа**) среза биологического объекта в **k -пространстве** (пространство частотных переменных, получаемое из обычного пространства в результате двумерного преобразования Фурье). Сам срез может быть восстановлен с помощью обратного преобразования Фурье.

Порядок выполнения работы

1. Запускаем программу Mathcad и импортируем в нее отсчеты синфазного и квадратурного сигналов MPT:

$$path1 := "C:/raw_data_real.prn";$$
$$Iv := READPRN(path1);$$
$$path2 := "C:/raw_data_imag.prn";$$
$$Qv := READPRN(path2).$$

2. Импортированные данные представлены в виде векторов длиной 512×512 , где 512 – размер изображения, и поэтому необходимо преобразовать их в матричную форму. Для этого определяем размер матрицы данных:

$$N := \sqrt{\text{length}(Iv)}.$$

3. Задаем функцию, описывающую связь между индексом элемента в векторе отсчетов и индексами соответствующего ему элемента в матрице данных:

$$ind(i, j) := i \cdot N + j.$$

4. Задаем диапазоны изменения индексов в матрицах данных и формируем матрицы данных:

$$i := 0..N - 1;$$

$$j := 0..N - 1;$$

$$I_{i,j} := Iv_{ind(i,j)};$$

$$Q_{i,j} := Qv_{ind(i,j)}.$$

5. Рассчитываем амплитудные значения сигнала:

$$A_{i,j} := \sqrt{(I_{i,j})^2 + (Q_{i,j})^2}.$$

6. Преобразуем матрицу амплитудных значений в формат, позволяющий представить ее в виде BMP-изображения. Для получения более контрастного изображения данные представляем в логарифмическом масштабе:

$$\log A_{i,j} := \log(A_{i,j});$$

$$\min \log A := \min(\log A);$$

$$\max \log A := \max(\log A);$$

$$\log A1_{i,j} := \text{floor} \left(255 \cdot \frac{\log A_{i,j} - \min \log A}{\max \log A - \min \log A} \right).$$

7. Представляем матрицу $\log A1$ в виде BMP-изображения (рис. 3.5).

Данное изображение представляет собой Фурье-образ среза биологического объекта.

Если изобразить в виде графика одну из строк матрицы с представленными в логарифмическом масштабе амплитудными значениями сигнала, например, строку с номером $0,5 \cdot N$, то полученный график даст представление о характере изменения амплитуды сигнала в регистрирующей катушке томографа (рис. 3.6).

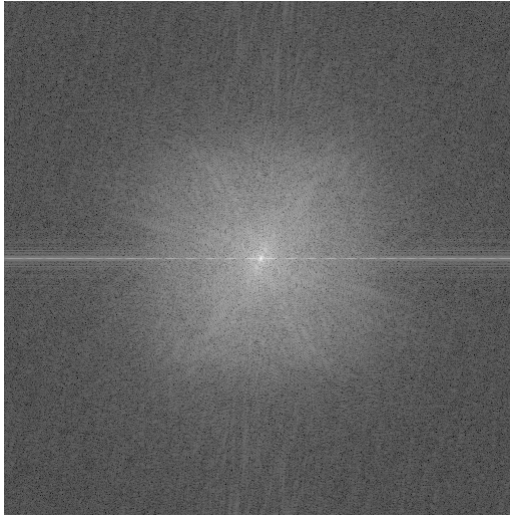


Рис. 3.5. Фурье-образ среза биологического объекта

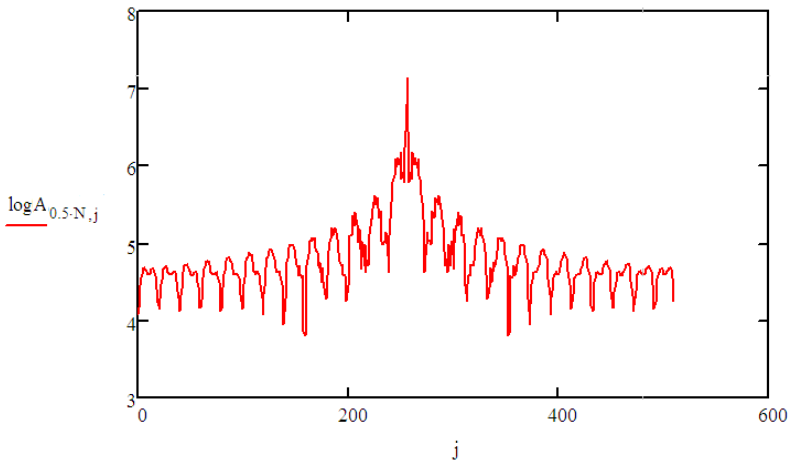


Рис. 3.6. Изменение амплитуды сигнала в регистрирующей катушке томографа

8. Для стандартной (принятой в математике) формы преобразования Фурье в центре k -пространства находится постоянная составляющая, окруженная низкочастотными составляющими, а при использовании функции *cfft*, выполняющей двумерное ДПФ в Mathcad,

постоянная составляющая оказывается в точке с координатами $(0, 0)$ (верхний левый угол матрицы). При этом низкочастотные составляющие располагаются в углах матрицы, а высокочастотные составляющие – в ее центре. Для восстановления среза биологического объекта с помощью двумерного обратного ДПФ, реализуемого в Mathcad с помощью функции *icfft*, необходимо привести матрицу значений сигнала к форме, соответствующей используемой в Mathcad структуре k -пространства. Для этого рассчитываем матрицу значений сигнала:

$$S_{i,j} := I_{i,j} + li \cdot Q_{i,j},$$

где li – обозначение мнимой единицы (вставляется в формулу с панели инструментов Calculator).

9. Приведение матрицы значений сигнала к форме, соответствующей принятой в Mathcad структуре k -пространства, производится с помощью перестановки блоков матрицы. В MatLab для этого предусмотрена специальная функция *fftshift*. В Mathcad при наличии установленного расширения для обработки сигналов (Signal Processing Extension Pack) можно воспользоваться функцией *recenter*. В случае ручной перестановки блоков разбиваем матрицу на 4 блока равных размеров:

$$sub1 := submatrix(S, 0, 0.5 \cdot N - 1, 0, 0.5 \cdot N - 1);$$

$$sub2 := submatrix(S, 0, 0.5 \cdot N - 1, 0.5 \cdot N, N - 1);$$

$$sub3 := submatrix(S, 0.5 \cdot N, N - 1, 0.5 \cdot N, N - 1);$$

$$sub4 := submatrix(S, 0.5 \cdot N, N - 1, 0, 0.5 \cdot N - 1).$$

Постоянная составляющая оказывается заключенной в блоке *sub3*.

10. Меняем местами блоки *sub1* и *sub3*, а затем блоки *sub2* и *sub4*:

$$S1 := stack(augment(sub3, sub4), augment(sub2, sub1)).$$

Функция *augment(A, B)* располагает матрицы A и B бок о бок слева направо.

11. С помощью двумерного обратного ДПФ восстанавливаем изображение среза биологического объекта:

$$slice := icfft(S1).$$

12. Можно убедиться, что матрица среза *slice* содержит комплексные значения. Причина этого объясняется ниже. Для представления матрицы среза в виде ВМР-изображения рассчитываем абсолютные значения элементов матрицы:

$$sliceAbs_{i,j} := |slice_{i,j}|;$$

$$minsliceAbs := \min(sliceAbs);$$

$$maxsliceAbs := \max(sliceAbs);$$

$$sliceAbs1_{i,j} := \text{floor} \left(255 \cdot \frac{sliceAbs_{i,j} - minsliceAbs}{maxsliceAbs - minsliceAbs} \right).$$

13. Представляем матрицу *sliceAbs1* в виде ВМР-изображения (рис. 3.7).

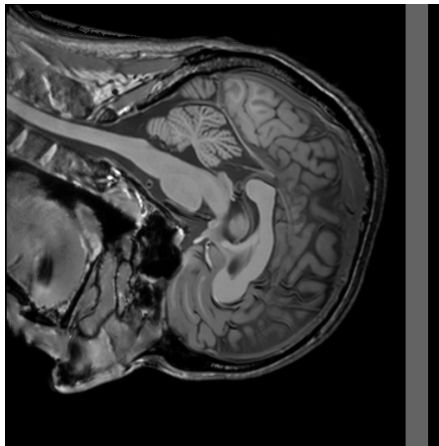


Рис. 3.7. Изображение среза биологического объекта

14. Наличие комплексных значений в матрице среза объясняется тем, что в рассматриваемом примере матрица значений сигнала не является эрмитово-симметричной: это свойство должно обязательно выполняться для матрицы, полученной в результате преобразования Фурье вещественнозначного двумерного изображения. Для **эрмитово-симметричной матрицы** элементы, расположенные симметрично относительно центра, должны являться комплексно сопряженными, то есть иметь одинаковые по величине действительные части и равные по абсолютной величине и противоположные по знаку мнимые части (аналогичная симметрия имеет место для коэффициентов комплексного ряда Фурье одномерного периодического сигнала – см. формулу (1.6)). В рассматриваемом случае это свойство не выполняется, в чем можно убедиться на примере двух элементов, расположенных симметрично относительно центра $(i0, j0)$ матрицы значений сигнала:

$$i0 := 0.5 \cdot N;$$

$$j0 := 0.5 \cdot N;$$

$$S_{i0-20, j0-10} = 2,713 \times 10^4 + 1,125i \times 10^5;$$

$$S_{i0+20, j0+10} = -7,57 \times 10^4 - 8,751i \times 10^4.$$

Постоянная составляющая (центральный элемент матрицы значений сигнала) в рассматриваемом случае является комплекснозначным, что не имеет физического смысла, так как постоянная составляющая должна быть равна среднему значению интенсивности изображения среза. Если умножить все элементы матрицы значений сигнала на масштабный множитель, равный отношению комплексного числа, сопряженного по отношению к постоянной составляющей, к абсолютному значению постоянной составляющей, то матрица значений сигнала станет эрмитово-симметричной, а ее постоянная составляющая – вещественнозначной:

$$scale := \frac{\operatorname{Re}(S_{i0, j0}) - i \cdot \operatorname{Im}(S_{i0, j0})}{|S_{i0, j0}|};$$

$$S2 := scale \cdot S.$$

При умножении на записанный выше множитель изменяется лишь фаза сигнала, а его амплитуда остается неизменной: как видно из рис. 3.5, распределение амплитуды являлось симметричным и перед умножением. Поэтому с технической точки зрения произведенное умножение значений сигнала на масштабный множитель представляет собой коррекцию фазовой ошибки регистрации сигнала.

15. Необходимо также учесть, что элементы нулевого столбца и нулевой строки матрицы значений сигнала $S2$ не имеют симметричных относительно центрального элемента $(i0, j0)$, поэтому необходимо либо отбросить эти строку и столбец, либо дополнить матрицу N -й строкой и N -м столбцом, элементы которых симметричны по отношению к элементам нулевой строки и нулевого столбца. При использовании первого варианта разбиение матрицы на блоки будет иметь вид

$$sub1 := submatrix(S2, 1, 0.5 \cdot N - 1, 1, 0.5 \cdot N - 1);$$

$$sub2 := submatrix(S2, 1, 0.5 \cdot N - 1, 0.5 \cdot N, N - 1);$$

$$sub3 := submatrix(S2, 0.5 \cdot N, N - 1, 0.5 \cdot N, N - 1);$$

$$sub4 := submatrix(S2, 0.5 \cdot N, N - 1, 1, 0.5 \cdot N - 1).$$

16. Рассчитываем эрмитово-симметричную матрицу значений сигнала:

$$S3 := stack(augment(sub3, sub4), augment(sub2, sub1)).$$

17. Выполнив двумерное обратное ДПФ матрицы $S3$, можно убедиться, что получаемая в результате матрица среза содержит комплексные значения, однако величина мнимой части ее элементов значительно меньше величины их действительной части (в действительности ненулевая мнимая часть является результатом погрешностей вычислений). С учетом этого мнимую часть матрицы среза можно отбросить.

18. При формировании сигнала методом квадратурного детектирования действительный и мнимый каналы блока обработки сигнала содержат усилители с равными коэффициентами усиления. В случае снижения коэффициента усиления одного из усилителей, например,

в результате его неисправности, возникает артефакт, называемый «**квадратурным призраком**» и представляющий собой изображение более низкой интенсивности, которое может быть получено из основного изображения путем поворота на 180° (рис. 3.8).

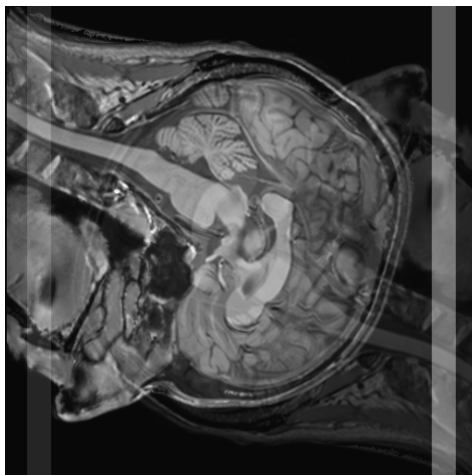


Рис. 3.8. Артефакт типа «квадратурный призрак»

Для моделирования этого артефакта умножим мнимую часть матрицы значений сигнала S_3 на множитель $K = 0,5$, характеризующий степень снижения коэффициента усиления:

$$S_4 := \text{Re}(S_3) + 1i \cdot 0,5 \cdot \text{Im}(S_3).$$

В рассматриваемом случае интенсивность основного изображения составляет 0,75 от исходного значения, а интенсивность перевернутого изображения («призрака») – 0,25 от исходного значения. В общем случае матрица значений сигнала может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{Re}(\mathbf{S}_0) + jK \text{Im}(\mathbf{S}_0) = 0,5(1 + K)(\text{Re}(\mathbf{S}_0) + j \text{Im}(\mathbf{S}_0)) + \\ &+ 0,5(1 - K)(\text{Re}(\mathbf{S}_0) - j \text{Im}(\mathbf{S}_0)) = \quad (3.1) \\ &= 0,5(1 + K)\mathbf{S}_0 + 0,5(1 - K)\mathbf{S}_0^*, \end{aligned}$$

где \mathbf{S}_0 – матрица значений сигнала при нормальной работе усилителей.

Сопряженная матрица S_0^* в силу эрмитовой симметрии может быть получена из матрицы S_0 путем поворота на 180° . Если учесть, что поворот объекта на произвольный угол ϕ соответствует повороту его Фурье-образа на тот же угол, то из формулы (3.1) вытекает, что изображение, полученное из матрицы S путем обратного преобразования Фурье, будет представлять собой сумму прямого изображения с интенсивностью $0,5(1 + K)$ от исходного значения и сумму изображения, повернутого на 180° , с интенсивностью $0,5(1 - K)$ от исходного значения.

19. Восстанавливаем изображение среза, учитывая, что элементы матрицы среза могут содержать малые по величине неинформативные мнимые части:

$$slice2 := \text{Re}(icfft(S4));$$

$$i := 0..N - 2;$$

$$j := 0..N - 2;$$

$$minslice2 := \min(slice2);$$

$$maxslice2 := \max(slice2);$$

$$slice3_{i,j} := \text{floor} \left(255 \cdot \frac{slice2_{i,j} - minslice2}{maxslice2 - minslice2} \right).$$

20. Представляем матрицу $slice3$ в виде BMP-изображения. В результате получается изображение, аналогичное представленному на рис. 3.8.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие теоретические сведения о регистрации и обработке сигналов в МРТ.
3. Выявить на срезе биологического объекта (рис. 3.7) высококонтрастные структуры, являющиеся потенциальными источниками

эффекта Гиббса, и привести в отчете методику и результаты исследования изображения на предмет наличия эффекта Гиббса.

4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие виды атомных ядер могут служить источниками сигнала в МРТ?
2. От чего зависит частота ларморовской прецессии?
3. Дайте определение эффекта ЯМР.
4. Каким образом генерируется и регистрируется сигнал МРТ?
5. Для чего необходима квадратурная демодуляция сигнала МРТ?
6. Каким образом квадратурный и синфазный сигналы связаны с функцией распределения свойств биологического объекта?
7. С какой целью в МРТ создаются градиенты магнитного поля?
8. В чем состоит особенность представления двумерного преобразования Фурье в программе Mathcad?
9. Каким свойством обладает двумерное преобразование Фурье вещественнозначной матрицы?

Лабораторная работа № 4

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МАССИВОВ МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ

Цель работы

Изучить методы обработки и отображения трехмерных массивов медицинских данных, в частности, томографических данных, и особенности их программной реализации.

Инструменты и принадлежности

1. Персональный компьютер с установленными программным обеспечением Mathcad и редактором двоичных файлов Binary Viewer.

2. Текстовые файлы со значениями вокселей трехмерного фантома Шеппа-Логана. Файлы доступны по ссылкам:

- <https://disk.yandex.by/d/nrmkFcRLxy5XLg>;
- <https://disk.yandex.by/d/HUhrj6xOQQGvAw>;
- <https://disk.yandex.by/d/y31Ye4P7CREuVQ>;
- <https://disk.yandex.by/d/Hmyo-wON4ymAXw>.

3. Двоичный и текстовый файлы с данными МРТ. Файлы доступны по ссылкам <https://disk.yandex.by/d/TkCBWDWpZwUQ2g> и <https://disk.yandex.by/d/TMvu-Yw06FbTpw>.

Общие сведения

В рентгеновской томографии срезы, используемые для трехмерной реконструкции внутренней структуры объекта, располагаются перпендикулярно оси вращения рентгеновской трубки и детекторов (**аксиальные срезы**), однако при наличии множества параллельных срезов (трехмерного массива данных) возможно программное построение срезов произвольной ориентации, в частности, **корональных и сагиттальных срезов**. В МРТ, в отличие от рентгеновской томографии, возможно аппаратное построение срезов произвольной ориентации, однако используется и программное построение срезов. Процедура программного построения срезов произвольной ориентации по набору параллельных аксиальных срезов называется **мно-**

плоскостным реформированием или многоплоскостной реконструкцией. В качестве примера на рис. 4.1 приведены изображения трех взаимно перпендикулярных срезов тела и изображение, полученное методом объемного рендеринга.

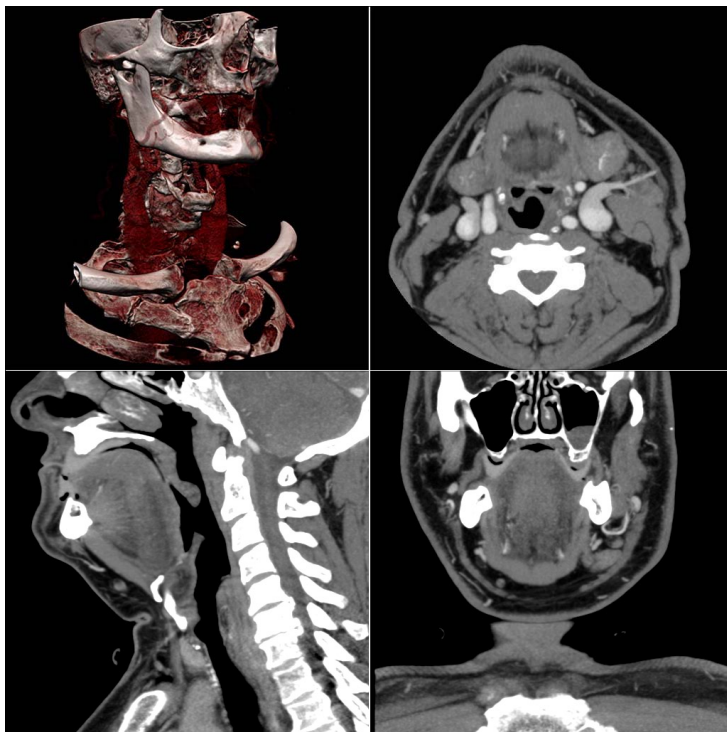


Рис. 4.1. Пример использования многоплоскостного реформирования и объемного рендеринга

Под **рендерингом** понимают процедуру получения двумерных проекций объекта на основе трехмерного массива данных. Элементами трехмерного массива данных являются **воксели**, являющиеся трехмерными аналогами пикселей двумерных изображений. Рендеринг состоит из трех этапов:

- 1) Формирование трехмерного массива данных.
- 2) Классификация данных.
- 3) Формирование проекций.

Первый этап реализуется с помощью томографа и подробно рассматриваться не будет.

Классификация включает в себя два действия:

1) Определение типов тканей, присутствующих в каждом из вокселей.

2) Использование данных о присутствующих типах тканей для присвоения вокселу визуальных атрибутов (цвет и прозрачность).

Наиболее простой является **пороговая (бинарная) классификация**, в которой каждому типу ткани присваиваются нижний и верхний пороги линейного коэффициента ослабления, например, более 300 *HU* для костной ткани. При этом диапазоны изменения линейного коэффициента ослабления для различных типов тканей не должны пересекаться между собой. Пороговые значения могут определяться по гистограмме распределения значений линейного коэффициента ослабления (для рентгеновской томографии) либо иного параметра, например, времени продольной релаксации T_1 для МРТ. В качестве примера на рис. 4.2 приведена гистограмма распределения времени T_1 для среза головного мозга.

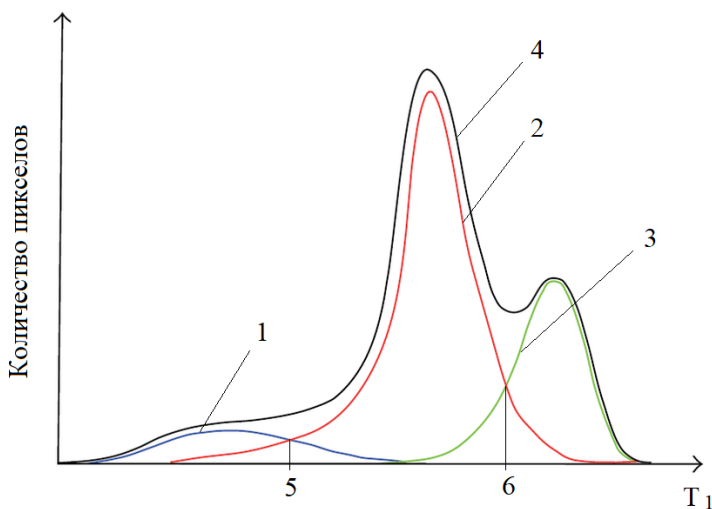


Рис. 4.2. Гистограмма распределения значений времени T_1 для среза головного мозга:

1 — СМЖ; 2 — серое вещество; 3 — белое вещество;
4 — результирующая гистограмма; 5, 6 — пороги классификации

Гистограмма обычно является **многомодовой**, то есть имеет несколько локальных максимумов, каждый из которых соответствует определенному типу ткани. В качестве порогов классификации принимаются значения, заключенные между соседними локальными максимумами гистограммы. Если аппроксимировать гистограмму суммой кривых Гаусса, то за пороги классификации могут приниматься значения, соответствующие пересечению двух соседних (соответствующих соседним максимумам гистограммы) кривых Гаусса. Сравнивая линейный коэффициент ослабления (или иной параметр) для каждого из вокселей с заданными пороговыми значениями, определяют, присутствует ли данный тип ткани в рассматриваемом вокселе, то есть классификация происходит по принципу «есть» или «нет», в связи с чем она получила название бинарной (двоичной). Если данный тип ткани присутствует в рассматриваемом вокселе, то воксел предполагается полностью состоящим из данного типа ткани. Такое предположение не всегда соответствует действительности, так как для всех томографических методов исследования характерно объемное усреднение. Например, если реальный объемный элемент тела содержит мягкие ткани и небольшое количество костной ткани, то соответствующий ему воксел может иметь значение линейного коэффициента ослабления, соответствующее мягкой ткани, и при использовании бинарной классификации будет классифицирован как полностью состоящий из мягкой ткани.

Более совершенной является **процентная (непрерывная) классификация**, которая не просто дает ответ на вопрос, присутствует ли данный тип ткани в рассматриваемом вокселе, но и позволяет определить его процентное содержание. При этом каждый из вокселей может содержать одновременно несколько типов тканей. Для каждого из типов тканей зависимость его процентного содержания от величины линейного коэффициента ослабления описывается кусочно-линейной функцией. При этом диапазоны изменения линейного коэффициента ослабления для различных типов тканей частично пересекаются между собой (рис. 4.3).

Если каждому типу ткани соответствуют определенные значения цвета и прозрачности, то оптические свойства каждого из вокселей будут определяться путем взвешенного суммирования визуальных атрибутов присутствующих в нем типов тканей. При этом весовые

коэффициенты будут определяться процентным содержанием соответствующих типов тканей.

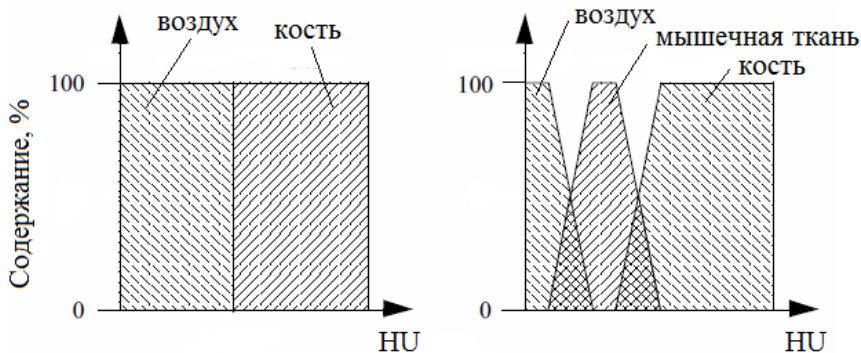


Рис. 4.3. Пример зависимостей процентного содержания тканей от линейного коэффициента ослабления при бинарной и непрерывной классификациях

Соответствие между характеризующим воксел скалярным значением x (в случае рентгеновской томографии это линейный коэффициент ослабления) и оптическими свойствами воксела устанавливается с помощью **передаточных функций** $f_R(x)$, $f_G(x)$, $f_B(x)$, $f_a(x)$. Функции $f_R(x)$, $f_G(x)$, $f_B(x)$ определяют, какой цвет ставится в соответствие каждому из типов ткани (R , G и B представляют собой красную, зеленую и синюю цветовые координаты), а функция $f_a(x)$ задает непрозрачность для каждого из типов ткани. **Непрозрачность** (opacity) α может рассматриваться как коэффициент поглощения света вокселем. Путем изменения вида передаточных функций можно управлять видимостью тканей и акцентировать внимание на определенных типах тканей. В качестве примера на рис. 4.4 приведены построенные методом объемного рендеринга проекции трехмерного массива данных, полученного с помощью томографа (цветная версия изображения доступна по ссылке https://disk.yandex.by/i/7Xr81hW_pVh8NA).

При построении обеих проекций использованы одинаковые передаточные функции $f_R(x)$, $f_G(x)$, $f_B(x)$, соответствующая которым цветовая палитра приведена внизу под проекциями с указанием типов тканей. В передаточной функции $f_a(x)$, соответствующей второй про-

екции, снижена непрозрачность для мышечной ткани, в результате чего увеличилась видимость расположенной под ней костной ткани.

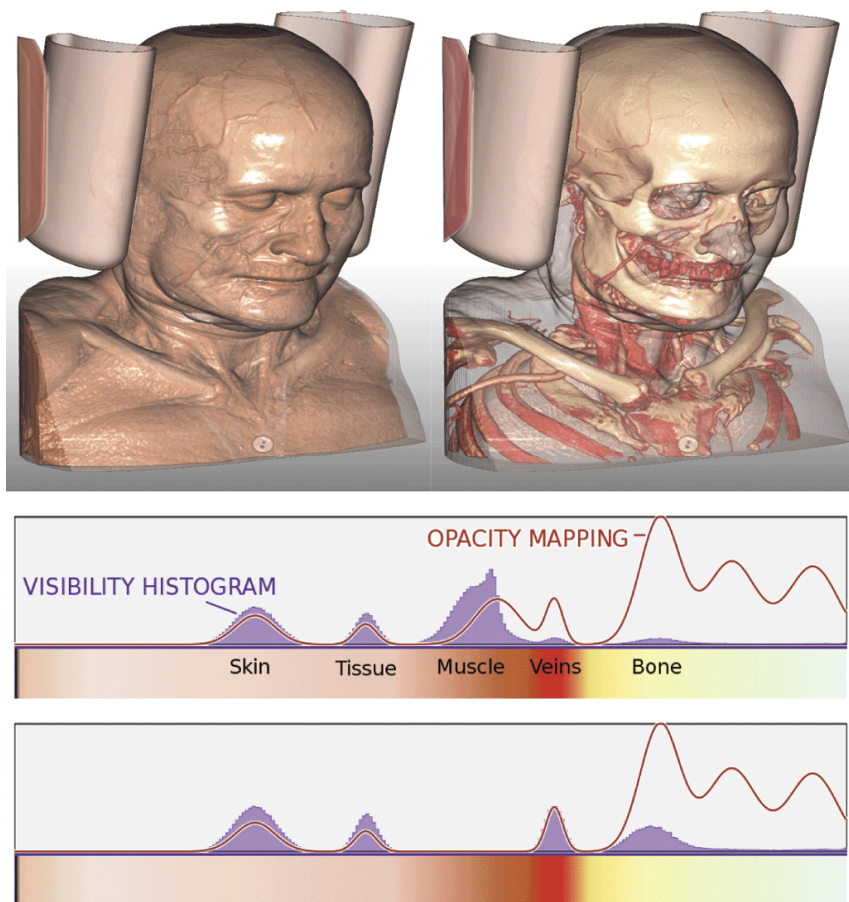


Рис. 4.4. Влияние передаточных функций на проекции, построенные методом объемного рендеринга

Для **формирования проекций** используется метод **трассировки лучей**, состоящий в том, что цвет каждого из пикселей проекции l определяется на основе данных о свойствах вокселей 3 , принадлежащих проекционному лучу 2 , проходящему через данный пиксель и точку размещения камеры или глаза наблюдателя (рис. 4.5).

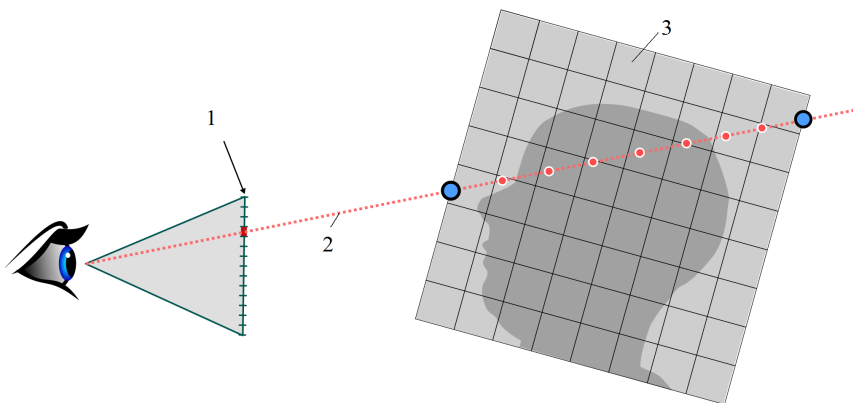


Рис. 4.5. Схема формирования проекций методом трассировки лучей

В частном случае камера может размещаться на бесконечности: в этом случае проекционные лучи, проходящие через пиксели проекции, являются параллельными. Для определения цвета пикселя данные о свойствах вокселей, принадлежащих проходящему через него проекционному лучу, комбинируются с помощью **лучевой функции**. Одной из простейших лучевых функций, используемых в объемном рендеринге, является **функция максимальной интенсивности**, которая вычисляет максимальное значение скалярной величины x на проекционном луче, а затем ставит этому максимальному значению в соответствие определенный цвет с помощью передаточных функций:

$$R = f_R(\max_L x(z)),$$

$$G = f_G(\max_L x(z)),$$

$$B = f_B(\max_L x(z)),$$

где z – скалярный параметр, используемый в параметрических уравнениях луча (см. уравнения (2.2) и (2.3)).

Возможен также вариант, когда на проекционном луче определяется значение скалярной величины x , соответствующее максимальной непрозрачности α , а затем этому значению ставится в соответствие определенный цвет:

$$R = f_R(\arg \max_x f_\alpha(x(z))).$$

Выражение $\arg \max_x f(x)$ означает, что определяется значение аргумента x , при котором функция $f(x)$ принимает максимальное значение. Выражения для цветовых координат G и B записываются аналогичным образом и в дальнейшем не приводятся. Этот вариант целесообразно использовать, когда на проекции необходимо выделить наличие определенного материала. Для этого передаточная функция f_α строится таким образом, чтобы представляющему интерес материалу соответствовало максимальное значение непрозрачности.

При использовании **функции средней интенсивности** вычисляется среднее значение скалярной величины x на проекционном луче, а затем этому значению ставится в соответствие определенный цвет:

$$R = f_R\left(\frac{1}{L} \int_0^L x(z) dz\right),$$

где L – длина отрезка проекционного луча, проходящего через массив вокселей.

Получаемая в этом случае проекция будет подобна рентгеновскому снимку, так как при прохождении рентгеновского излучения через вещество его интенсивность определяется интегральным значением линейного коэффициента ослабления.

В качестве примеров на рис. 4.6 приводятся проекции легких, полученные с использованием лучевых функций средней, максимальной и минимальной интенсивности.



Рис. 4.6. Примеры проекций легких, полученных с помощью различных лучевых функций

На проекции минимальной интенсивности (рис. 4.6, *а*) отчетливо видны центральные дыхательные пути и эмфизематические изменения в верхней доле правого легкого (эмфизема – это чрезмерное скопление воздуха в органах, где он присутствует в норме, например, в легких, или его наличие в тканях, где его не должно быть в норме). На проекции средней интенсивности (рис. 4.6, *б*) видимость центральных дыхательных путей и эмфиземы снижается, однако повышается видимость сосудистых структур, в которые введено рентгеноконтрастное вещество. Наилучшая видимость сосудистых структур характерна для проекции максимальной интенсивности

(рис. 4.6, в). В общем случае проекция минимальной интенсивности позволяет выявить малые объемы ткани с низким линейным коэффициентом ослабления, которые в случае использования проекции средней интенсивности могут быть невидимыми на фоне тканей с более высокими значениями коэффициента ослабления. Проекция максимальной интенсивности позволяет выявить малые объемы ткани с высоким линейным коэффициентом ослабления, которые в случае использования проекции средней интенсивности могут быть неидентифицируемыми на фоне тканей с более низкими значениями коэффициента ослабления.

Проекции, подобные представленным на рис. 4.4, формируются с помощью лучевой функции, называемой **функцией композитинга** (композитинг – это совмещение двух и более изображений в одном кадре: в данном случае в одном пикселе проекции совмещаются визуальные атрибуты множества вокселей, принадлежащих проходящему через этот пиксель проекционному лучу):

$$R = \int_0^L f_R(x(z))\tau(z) \exp\left(-\int_0^z \tau(z)dz\right) dz,$$

где τ – линейный коэффициент ослабления света, связанный с непрозрачностью вокселя выражением

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\int_0^{\Delta z} \tau(z)dz\right),$$

Δz – длина отрезка проекционного луча, проходящего через воксел.

Порядок выполнения работы

1. Запускаем программу Mathcad и импортируем в нее значения вокселей трехмерного фантома Шеппа-Логана. Размеры фантома составляют $300 \times 300 \times 300$, то есть в общей сложности он содержит 27 млн вокселей. В связи с тем, что в Mathcad максимальное число элементов в векторах и матрицах ограничено значением 8 млн, импортируем данные в виде 4 отдельных матриц, три из которых содержат 8 млн элементов, а четвертая – 3 млн элементов:

```

path1 := "C:/Shepp_logan_3d_1.prn";
data1 := READPRN(path1);
path2 := "C:/Shepp_logan_3d_2.prn";
data2 := READPRN(path2);
path3 := "C:/Shepp_logan_3d_3.prn";
data3 := READPRN(path3);
path4 := "C:/Shepp_logan_3d_4.prn";
data4 := READPRN(path4).

```

Каждая из матриц содержит 16 столбцов данных. Данные записаны в порядке возрастания координат (x, y, z) , то есть идет поочередное заполнение срезов с различными значениями координаты z .

2. Можно убедиться, что значения всех элементов импортированных матриц принадлежат множеству $\{0, 1310, 1965, 65535\}$, что соответствует окружающей среде (0) и трем типам тканей. Приводим эти значения к диапазону $0..255$, позволяющему отображать срезы фантома в виде BMP-изображений:

```

i := 0..rows(data1) - 1;
j := 0..cols(data1) - 1;
max(data1) = 6,5535 × 104;
data1i,j := if (data1i,j = 65535, 255, data1i,j);
max(data1) = 1,965 × 103;
data1i,j := if (data1i,j = 1965, 100, data1i,j);
max(data1) = 1,31 × 103;

```

$$data1_{i,j} := if(data1_{i,j} = 1310, 50, data1_{i,j});$$

$$\max(data1) = 255.$$

Новые значения элементов $\{0, 50, 100, 255\}$ приняты произвольным образом. Каждый шаг изменения значений элементов начинается с определения максимального значения элементов: если максимальное значение становится равным 255, то процесс заканчивается. Аналогичным образом изменяются значения элементов матриц $data2$ и $data3$. Для матрицы $data4$ оказывается достаточным одного шага, так как она содержит только элементы со значениями 0 и 65535:

$$i := 0..rows(data4) - 1;$$

$$\max(data4) = 6,5535 \times 10^4;$$

$$data4_{i,j} := if(data4_{i,j} = 65535, 255, data4_{i,j});$$

$$\max(data4) = 255.$$

3. Преобразуем каждую из матриц со значениями вокселей в вектор. Для этого запишем функции, определяющие по индексу k элемента в векторе индексы i и j соответствующего ему элемента в матрице:

$$i(k) := floor\left(\frac{k}{16}\right);$$

$$j(k) := k - 16 \cdot floor\left(\frac{k}{16}\right);$$

$$size1 := 16 \cdot rows(data1);$$

$$k := 0..size1 - 1;$$

$$datavec1_k := data1_{i(k), j(k)};$$

$$datavec2_k := data2_{i(k), j(k)};$$

$$datavec3_k := data3_{i(k), j(k)};$$

$$size4 := 16 \cdot rows(data4);$$

$$k := 0..size4 - 1;$$

$$datavec4_k := data4_{i(k), j(k)}.$$

Здесь 16 – количество столбцов в каждой из матриц.

4. Если представить все значения вокселей в виде одного вектора длиной 27 млн элементов, то воксель с координатами (i, j, k) будет иметь в этом векторе индекс, описываемый функцией $ind(i, j, k)$:

$$N := 300;$$

$$ind(i, j, k) := k \cdot N^2 + i \cdot N + j.$$

Здесь N – размер фантома по каждой из координат.

5. Определяем значение вокселя с координатами (i, j, k) , учитывая, что в действительности значения вокселей записаны в виде 4 векторов:

$$voxel(i, j, k) := if(ind(i, j, k) \leq size1 - 1, datavec1_{ind(i, j, k)};$$

$$if(ind(i, j, k) \leq 2 \cdot size1 - 1, datavec2_{ind(i, j, k) - size1};$$

$$if(ind(i, j, k) \leq 3 \cdot size1 - 1, datavec3_{ind(i, j, k) - 2 \cdot size1}, datavec4_{ind(i, j, k) - 3 \cdot size1}))).$$

6. Рассчитываем и отображаем три центральных среза фантома, перпендикулярных осям z , y и x (рис. 4.7):

$$i := 0..N - 1;$$

$$j := 0..N - 1;$$

$$slicel_{i, j} := voxel(i, j, 0.5 \cdot N - 1);$$

$$\text{slice2}_{i,j} := \text{voxel}(i, 0.5 \cdot N - 1, j);$$

$$\text{slice3}_{i,j} := \text{voxel}(0.5 \cdot N - 1, j, i).$$

Порядок аргументов i и j при расчете третьего среза выбран таким образом, чтобы графическое изображение среза соответствовало виду сверху: первый срез принят за основной вид, а второй срез является видом слева. На рис. 4.7 срезы показаны в проекционной связи.

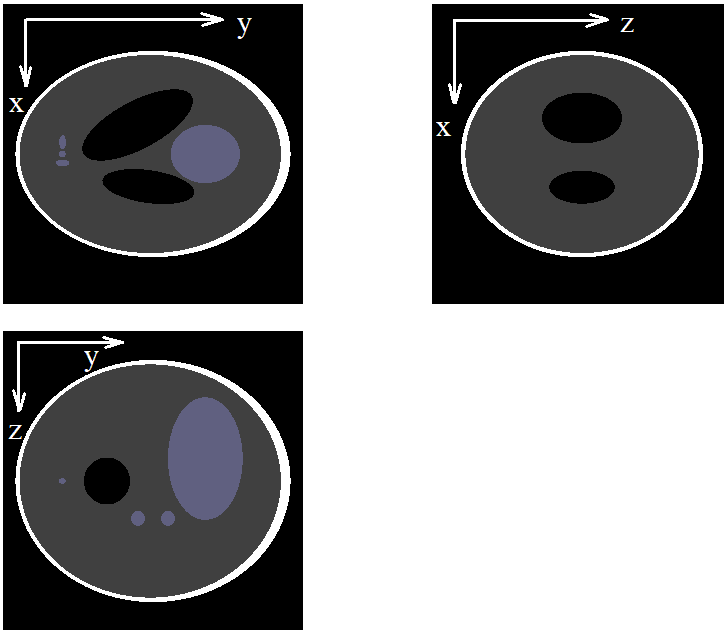


Рис. 4.7. Изображения центральных срезов фантома

7. Для построения рентгеновских проекций фантома удобно удалить наружный слой фантома, так как ему соответствует максимальное значение интенсивности вокселей (255) и на рентгеновских проекциях он будет препятствовать наблюдению внутренней структуры фантома. Проекции в направлении координатных осей определяются путем суммирования интенсивностей вокселей по индексу, соответствующему направлению проекции. Например, для проекции в направлении оси z

$$P1_{i,j} := \sum_{k=0}^{N-1} \text{if}(\text{voxel}(i, j, k) = 255, 0, \text{voxel}(i, j, k)).$$

Аналогичным образом рассчитываются проекции в направлении осей y и x .

8. Для отображения проекций в виде BMP-изображений приводим соответствующие им матрицы к диапазону значений 0..255:

$$\text{min}P1 := \min(P1);$$

$$\text{max}P1 := \max(P1);$$

$$P1\text{bmp}_{i,j} := \text{floor}\left(255 \cdot \frac{P1_{i,j} - \text{min}P1}{\text{max}P1 - \text{min}P1}\right).$$

Полученные проекции представлены на рис. 4.8.

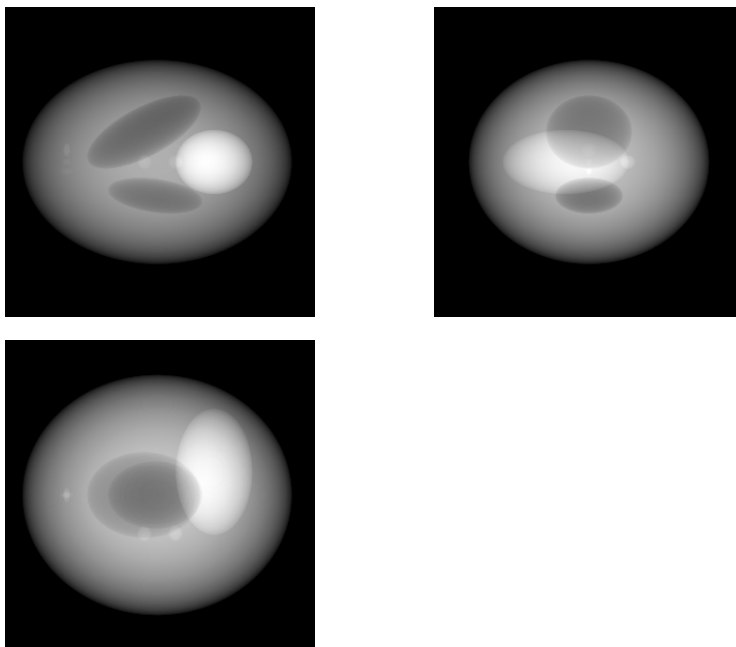


Рис. 4.8. Проекция фантома в направлениях координатных осей

9. Для построения срезов произвольной ориентации и проекций в произвольных направлениях воспользуемся преобразованием поворота координатной системы: двумерный вариант этого преобразования использовался в лабораторной работе № 2. Координатная система среза $x'y'z'$, в которой ось z' перпендикулярна плоскости среза, может быть получена из глобальной системы координат xuz преобразованием поворота, которое задается с помощью трех **углов Эйлера** φ , θ и ψ (рис. 4.9).

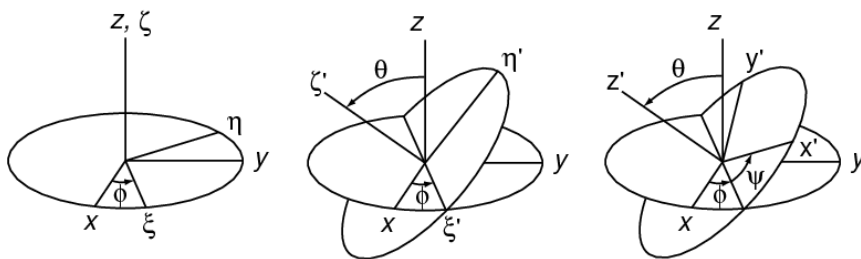


Рис. 4.9. Описание поворота координатной системы с помощью углов Эйлера

Первый угол φ описывает поворот координатной системы вокруг оси z . Второй угол θ описывает поворот координатной системы, полученной на первом этапе, вокруг новой оси x , а третий угол ψ – поворот координатной системы, полученной на втором этапе, вокруг новой оси z .

Задаем углы Эйлера, соответствующие срезу 1-1 на рис. 4.10:

$$\varphi := 0;$$

$$\theta := \frac{\pi \cdot 70}{180};$$

$$\psi := 0.$$

Для среза, положение которого показано линией 2-2, угол θ следует задать равным 120° .

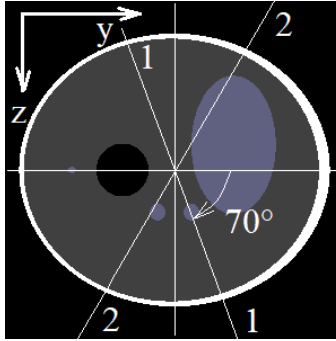


Рис. 4.10. Положение подлежащих построению срезов произвольной ориентации

10. Вычисляем матрицы поворота координатной системы:

$$B := \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix};$$

$$D := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $x y z \rightarrow x' y' z'$ описывается произведением матриц \mathbf{BCD} , а обратное преобразование – произведением $\mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T$, где верхний индекс T означает транспонирование матрицы.

11. Записываем матрицу обратного преобразования и формулы преобразования для каждой из координат:

$$R := D^T \cdot C^T \cdot B^T$$

$$i(i1, j1, k1) := \text{if}(((i1 - 0.5 \cdot N)^2 + (j1 - 0.5 \cdot N)^2 + (k1 - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, \\ 0, 0.5 \cdot N + \text{floor}(R_{0,0} \cdot (i1 - 0.5 \cdot N) + R_{0,1} \cdot (j1 - 0.5 \cdot N) + R_{0,2} \cdot (k1 - 0.5 \cdot N)))$$

$$j(i1, j1, k1) := \text{if}(((i1 - 0.5 \cdot N)^2 + (j1 - 0.5 \cdot N)^2 + (k1 - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, \\ 0, 0.5 \cdot N + \text{floor}(R_{1,0} \cdot (i1 - 0.5 \cdot N) + R_{1,1} \cdot (j1 - 0.5 \cdot N) + R_{1,2} \cdot (k1 - 0.5 \cdot N)))$$

$$k(i1, j1, k1) := \text{if}(((i1 - 0.5 \cdot N)^2 + (j1 - 0.5 \cdot N)^2 + (k1 - 0.5 \cdot N)^2 \geq 0.25 \cdot N^2, \\ 0, 0.5 \cdot N + \text{floor}(R_{2,0} \cdot (i1 - 0.5 \cdot N) + R_{2,1} \cdot (j1 - 0.5 \cdot N) + R_{2,2} \cdot (k1 - 0.5 \cdot N)))$$

12. Рассчитываем матрицу среза и строим его изображение (рис. 4.11):

$$i1 := 0..N - 1;$$

$$j1 := 0..N - 1;$$

$$\text{slice4}_{i1, j1} := \text{voxel}(i(i1, j1, 0.5 \cdot N), j(i1, j1, 0.5 \cdot N), k(i1, j1, 0.5 \cdot N)).$$

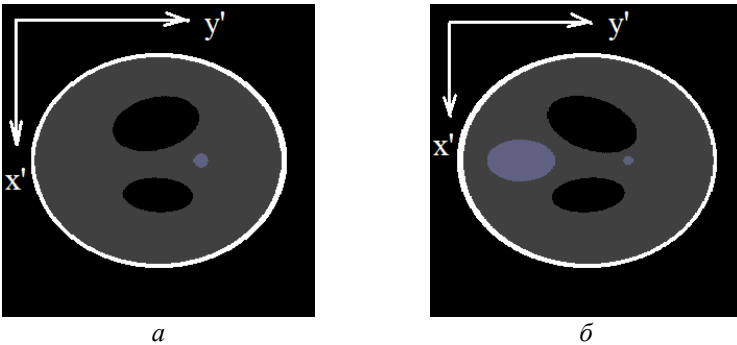


Рис. 4.11. Изображения срезов фантома произвольной ориентации

На рис. 4.11, *a* представлено изображение среза 1-1 (рис. 4.10), а на рис. 4.11, *b* – изображение среза 2-2.

13. Строим рентгеновскую проекцию в направлении, перпендикулярном плоскости среза 1-1 (рис. 4.12).

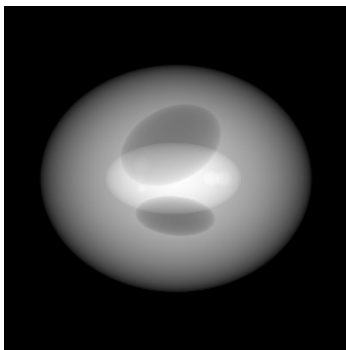


Рис. 4.12. Проекция фантома в направлении, перпендикулярном плоскости среза 1-1

$$P4_{i1, j1} := \sum_{k1=0}^{N-1} \text{if}(\text{voxel}(i(i1, j1, k1), j(i1, j1, k1), k(i1, j1, k1))) = 255, 0,$$

$$\text{voxel}(i(i1, j1, k1), j(i1, j1, k1), k(i1, j1, k1)));$$

$$\text{minP4} := \min(P4);$$

$$\text{maxP4} := \max(P4);$$

$$P4\text{bmp}_{i1, j1} := \text{floor}\left(255 \cdot \frac{P4_{i1, j1} - \text{minP4}}{\text{maxP4} - \text{minP4}}\right).$$

14. Процедуру классификации вокселей рассмотрим на примере реального трехмерного массива размером $256 \times 256 \times 109$ (109 срезов размером 256×256), полученного в результате МРТ головного мозга. Массив доступен в виде двоичного файла 3dhead.dat и текстового файла 3dhead.pgn. Данные в двоичном файле представлены

в виде 16-битных значений типа Unsigned Integer (неотрицательные целые числа от 0 до $2^{16} - 1 = 65535$) в формате little endian (младший бит находится в конце соответствующего целому числу двоичного кода). Для преобразования двоичных данных в текстовый формат можно воспользоваться любым редактором двоичных файлов, например, Binary Viewer ProXoft L.L.C. В окне Data View данные представлены в виде двух столбцов (рис. 4.13), формат которых может переключаться путем кликов по заголовкам столбцов, либо через главное меню, например, View → 1-st Column View Mode → UInt16 (2-bytes – Little Endian), View → 2-nd Column View Mode → Binary.

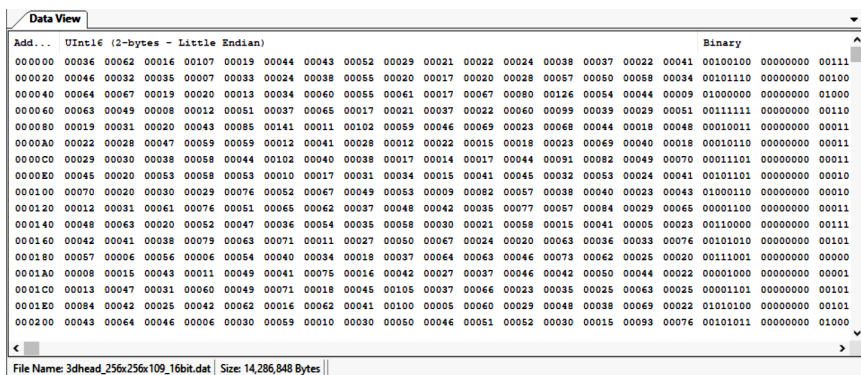


Рис. 4.13. Представление данных в редакторе Binary Viewer

Файл содержит $256 \times 256 \times 109 = 7\,143\,424$ значений, что соответствует 14 286 848 байтам (каждое значение представлено с помощью 16 бит двойного кода, то есть с помощью 2 байт). Для отображения в каждой строке 32 байт информации (16 значений типа UInt16) выполняем следующие действия: View → Bytes Per Line → 32.

15. Для сохранения данных в текстовом формате выделяем первый столбец окна Data View и выполняем следующие действия: File → Copy Selection As Formatted Text → To File. Параметры форматирования данных представлены на рис. 4.14.

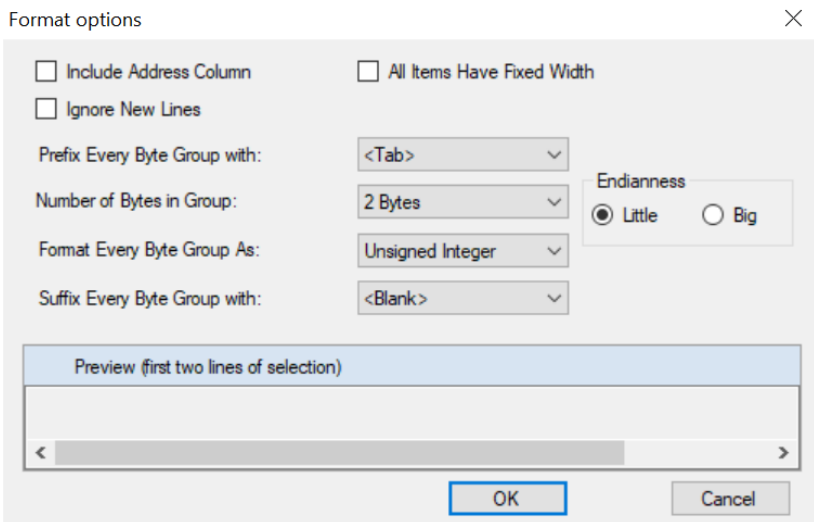


Рис. 4.14. Параметры форматирования данных

Нажимаем ОК, выбираем папку для сохранения и задаем имя и расширение файла, например, 3dhead.prn. В выпадающем списке «Тип файла» выбираем All Files (*.*) и нажимаем «Сохранить».

16. Импортируем данные в MathCad. Так как файл содержит менее 8 млн значений, то для их сохранения достаточно одной матрицы:

$$path := "C : / 3dhead . prn";$$

$$data := READPRN(path).$$

17. Строим гистограмму распределения данных с помощью функции $hist(n, data)$, которая для построения гистограммы разбивает данные из массива $data$ на n равных интервалов:

$$n := 300;$$

$$histdata := hist(n, data);$$

$$k := 0..n - 1.$$

Выбор числа интервалов n оказывает существенное влияние на вид гистограммы. При слишком малом числе интервалов недостаточно точно определяется положение пиков многомодовых распределений, а при избыточном числе интервалов на гистограмме появляется эффект «расчески». Для определения оптимального числа интервалов $n_{\text{опт}}$ существует **правило Фридмана-Диакониса**, согласно которому

$$n_{\text{опт}} = \left\lceil \frac{(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})N^{1/3}}{2IQR(x)} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – округление до целого числа в большую сторону (в Mathcad используется функция *ceil*);

x_{max} и x_{min} – предельные значения случайной величины;

N – общее число значений случайной величины;

$IQR(x) = x_{0,75} - x_{0,25}$ – **интерквартильный размах**, $x_{0,75}$ и $x_{0,25}$ – третий и первый **квартили** (значения случайной величины, соответствующие верхней границе диапазона, содержащего, соответственно, 75 % и 25 % от общего числа значений случайной величины).

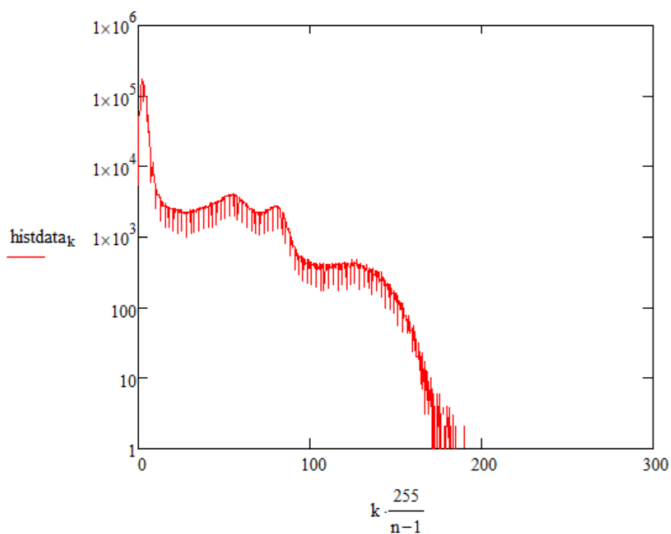
В рассматриваемом случае правило Фридмана-Диакониса дает значение $n_{\text{опт}} = 2097$, однако для этого значения на гистограмме наблюдается эффект «расчески» (рис. 4.15, *a*), в связи с чем использовано меньшее значение $n = 300$ (рис. 4.15, *b*).

Масштаб по оси абсцисс выбран таким образом, чтобы по ней можно было считывать интенсивности вокселей в 8-битном формате (значения от 0 до 255).

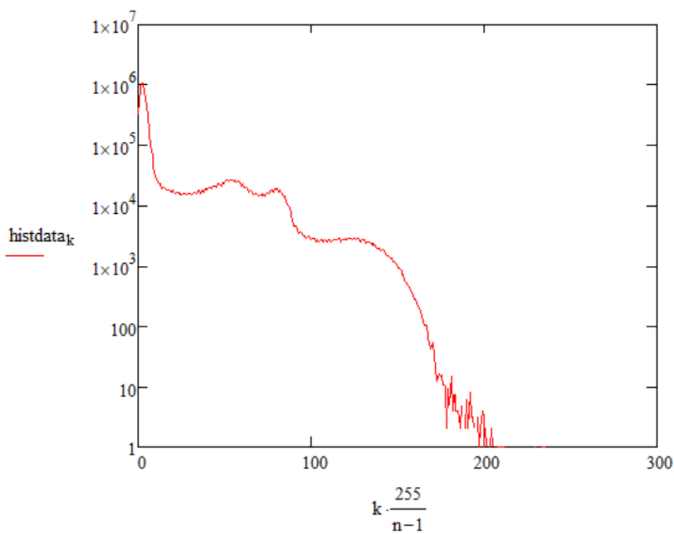
Так как массив содержит большое число темных вокселей низкой интенсивности (90 % вокселей имеют интенсивность не более 974 при общем числе уровней интенсивности 65536), то является рациональным использование на гистограмме логарифмического масштаба по оси ординат.

На полученной гистограмме имеется 4 локальных максимума, каждый из которых соответствует определенному типу вещества. Первый максимум соответствует фону (воздух) и заполненным воздухом полостям. Темные воксели также могут соответствовать

спинномозговой жидкости. Второй максимум соответствует серому веществу, третий – белому веществу, а четвертый – костной ткани.



a



b

Рис. 4.15. Гистограмма распределения интенсивностей вокселей

18. Строим центральные срезы объекта (рис. 4.16).

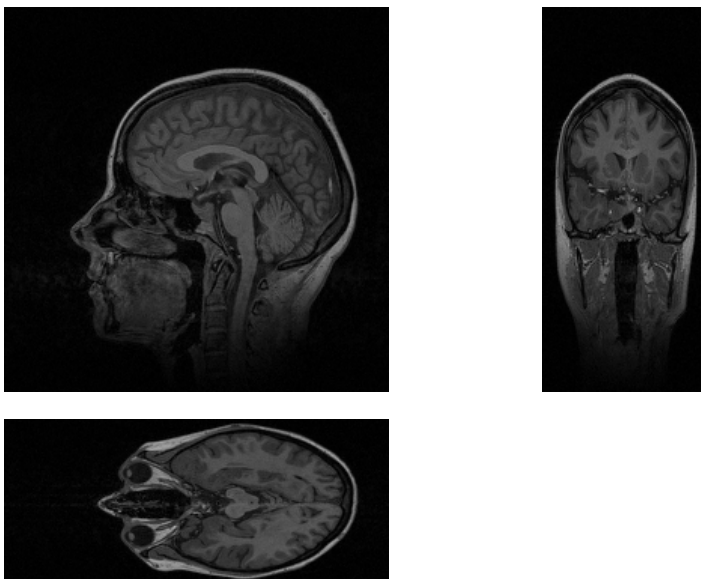


Рис. 4.16. Срезы головного мозга

Последовательность действий та же, что и при построении срезов фантома Шеппа-Логана:

$$i(k) := \text{floor}\left(\frac{k}{16}\right);$$

$$j(k) := k - 16 \cdot \text{floor}\left(\frac{k}{16}\right);$$

$$\text{size} := \text{cols}(\text{data}) \cdot \text{rows}(\text{data});$$

$$k := 0..\text{size} - 1;$$

$$\text{datavec}_k := \text{data}_{i(k), j(k)};$$

$$\text{mindata} := \min(\text{data});$$

$$\begin{aligned}
maxdata &:= \max(data); \\
datavec1_k &:= \text{floor}\left(255 \cdot \frac{datavec_k - mindata}{maxdata - mindata}\right); \\
N &:= 256; \\
ind(i, j, k) &:= k \cdot N^2 + i \cdot N + j; \\
voxel(i, j, k) &:= datavec1_{ind(i, j, k)}; \\
i &:= 0..N - 1; \\
j &:= 0..N - 1; \\
Ns &:= 109; \\
k &:= 0..Ns - 1; \\
slice1_{i, j} &:= voxel(i, j, 0.5 \cdot (Ns - 1)); \\
slice2_{i, k} &:= voxel(i, 0.5 \cdot N, k); \\
slice3_{k, j} &:= voxel(0.5 \cdot N, j, k).
\end{aligned}$$

Как видно из рисунка, корональный и аксиальный срезы выглядят сжатыми в направлении оси z . Это объясняется тем, что размер вокселей в направлении оси z больше их размера в направлениях осей x и y , что связано с малым числом срезов в направлении оси z . Такие воксели называются **анизотропными**. Использование анизотропных вокселей приводит к искажениям геометрии анатомических структур, однако в большинстве случаев в МРТ используются именно анизотропные воксели, так как регистрация изотропных вокселей приводит к увеличению времени сканирования и, соответственно, к увеличению вероятности появления двигательных артефактов. Существуют программные способы преобразования массивов анизотропных вокселей в массивы изотропных вокселей, про-

стейшим из которых является **межсрезовая интерполяция**, то есть предсказание значений вокселей, лежащих между двумя последовательными срезами, путем интерполяции.

Приведенное выше значение интенсивности 974, соответствующее 90 % от общего числа вокселей, может быть определено путем применения функции *percentile* к вектору *datavec*:

$$percentile(datavec, 90\%) = 974$$

19. Для выделения на центральном аксиальном срезе различных типов тканей используем бинарную классификацию с порогами 110, 70 и 25, заключенными между локальными максимумами гистограммы:

$$segment1_{k,j} := if(110 < slice3_{k,j}, slice3_{k,j}, 0);$$

$$segment2_{k,j} := if(70 < slice3_{k,j} \leq 110, slice3_{k,j}, 0);$$

$$segment3_{k,j} := if(25 < slice3_{k,j} \leq 70, slice3_{k,j}, 0).$$

На изображении, описываемом матрицей *segment1*, будет отображаться преимущественно костная ткань, так как вокселям, интенсивность которых выходит за пределы установленного для костной ткани диапазона, придается значение 0 (черный цвет) (рис. 4.17, а).

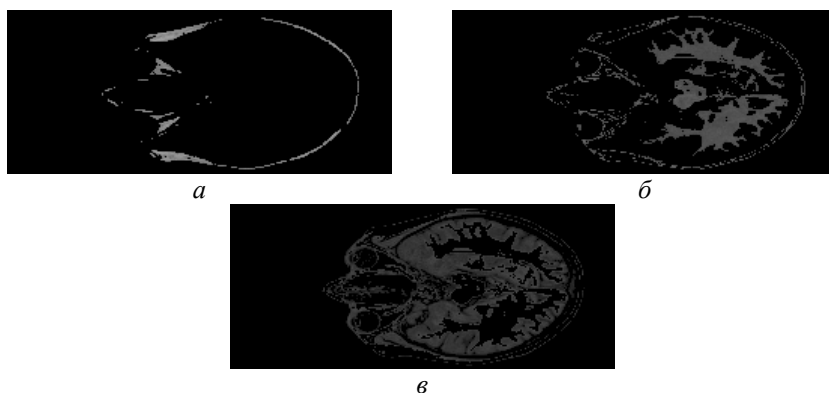


Рис. 4.17. Результаты бинарной классификации тканей

На изображении, описываемом матрицей $segment2$, отображается преимущественно белое вещество (рис. 4.17, б), а на изображении, описываемом матрицей $segment3$, – преимущественно серое вещество (рис. 4.17, в). В действительности на рис. 4.17, б часть пикселей соответствует костной ткани: подобная неверная классификация является известным недостатком бинарного метода классификации. Можно убедиться, что при снижении порога, соответствующего костной ткани, можно добиться удаления с рис. 4.17, б пикселей, соответствующих костной ткани, однако при этом на рис. 4.17, а появляются пиксели, соответствующие белому веществу.

20. При необходимости результаты классификации могут быть представлены в виде цветного изображения. Для этого используется функция $WRITERGB(path, M)$, где $path$ – символьная переменная, указывающая полный путь к файлу, в который записывается изображение; M – составная матрица, в которой слева направо записаны три матрицы R , G и B , соответствующие интенсивностям красного, зеленого и синего цветовых каналов изображения:

$$R := segment1 + segment2;$$

$$G := segment1;$$

$$B := segment1 + segment3;$$

$$M := augment(R, G, B);$$

$$path := "C:/segmented_slice.bmp";$$

$$WRITERGB(path, M) = 0.$$

Значения матрицы $segment1$ входят в матрицы всех трех цветовых каналов и поэтому костная ткань будет отображаться оттенками серого цвета. Значения матрицы $segment2$ входят только в матрицу красного цветового канала и поэтому белое вещество будет отображаться оттенками красного цвета. Аналогичным образом серое вещество будет отображаться оттенками синего цвета. Результирующий файл доступен по ссылке <https://disk.yandex.by/i/CefK1o3cJiPziQ>.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие теоретические сведения о методах обработки и визуализации трехмерных массивов данных.
3. Принимая интенсивность пикселей проекции пропорциональной минимальному расстоянию до вокселя с заданным пороговым значением интенсивности и задав достаточно низкое пороговое значение, например, 25 при 8-битном представлении интенсивности, постройте проекцию внешней анатомии головы пациента в направлении оси z . В отчете приведите методику проведенных расчетов.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные этапы рендеринга.
2. В чем преимущества процентной классификации по сравнению с бинарной?
3. Как определяются пороги классификации по гистограмме?
4. Как определяется число интервалов при построении гистограммы и как оно влияет на вид гистограммы?
5. Какие визуальные атрибуты присваиваются вокселям в результате классификации?
6. Приведите примеры лучевых функций, используемых при построении проекций.
7. Проведите сравнительный анализ различных видов лучевых функций на примере рентгеновской томографии легких.
8. Каким образом описывается поворот координатной системы при построении срезов произвольной ориентации?
9. Каким образом анизотропные воксели преобразуются в изотропные?

Литература

1. Bracewell, R. N. The Fourier transform and its applications / R. N. Bracewell. – 3rd Edition. – Singapore: McGraw Hill, 2000. – 616 p.
2. Zeng, G. L. Image reconstruction: Applications in medical sciences / G. L. Zeng. – Berlin: De Gruyter, 2017. – 240 p.
3. Wei, Y. An intuitive discussion on the ideal ramp filter in computed tomography (I) / Y. Wei, G. Wang // Computers and Mathematics with Applications. – 2005. – Vol. 49. – P. 731–740.
4. Jain, A. K. Fundamentals of digital image processing / A. K. Jain. – NJ: Prentice Hall, 1989. – 565 p.
5. Kak, A.C. Principles of computerized tomographic imaging / A. C. Kak, M. Slaney. – Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001. – 327 p.
6. Herman, G. T. Fundamentals of computerized tomography. Image reconstruction from projections / G. T. Herman. – 2nd Edition. – Dordrecht: Springer, 2009. – 297 p.
7. Brown, M. A. MRI: basic principles and applications / M. A. Brown, R. C. Semelka. – 3rd Edition. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2003. – 265 p.
8. Haacke, E. M. Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design / E. M. Haacke [et al.]. – New York: John Wiley & Sons, 1999. – 914 p.
9. Hashemi, R. H. MRI: The basics / R. H. Hashemi, W. G. Bradley, Jr., C. J. Lisanti. – 2nd Edition. – Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, 2004. – 353 p.
10. McRobbie, D. W. MRI. From picture to proton / D. W. McRobbie [et al.]. – 2nd Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 393 p.
11. Telea, A. C. Data visualization: principles and practice / A. C. Telea. – 2nd Edition. – Boca Raton: CRC Press, 2014. – 617 p.

Учебное издание

**АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Пособие
для студентов специальности
1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские
аппараты и системы»

Составитель
СТЕПАНЕНКО Дмитрий Александрович

Редактор *Е. В. Герасименко*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 18.02.2022. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,16. Уч.-изд. л. 4,82. Тираж 100. Заказ 608.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.