$$\ln\frac{3}{x}=\ln\frac{125}{75}=\ln\frac{5}{3}.$$

Далее потенцируя равенство, получим: $\frac{3}{x}=\frac{5}{3}$, то есть искомое количество сахара в резервуаре: $x=\frac{9}{5}=1.8$ кг.

Таким образом, через 25 мин в резервуаре останется 1,8 кг сахара.

Литература

1. Понаморев, К.К. Составление дифференциальных уравнений /К.К. Понаморев // Под ред. Ю.С. Богданов. Мн. «Вышэйш. школа», 1973. С.–560.

2. Курусь, С. С. Практическое применение дифференциальных уравнений в медицине / С. С. Курусь, К. А. Станчук, В. В. Подгорная, П. И. Кибалко // – 2019 – С.421-426.

3. Шодиева, Р. Р. Роль инновационных образовательных технологий в системе профессиональной подготовки студентов при изучении дифференциальных уравнений. / Р.Р. Шодиева // Тањти назари доктори илмњои иќтисодї, профессор Шарифзода ММ Њайати тањририя. – 2019. – С. 121.

УДК 519-7

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ. РАСТВОРЕНИЕ ВЕЩЕСТВА С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

студент гр. 10808120 Скорая К.В.
Научный руководитель – ст. преподаватель Кураленко М.В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Математика, являясь одной из самых фундаментальных наук, есть основа для решения различных задач смежных наук, таких как химия, физика, экономические науки. Часто при изучении дифференциальных уравнений недостаточно внимания уделяется решению практических задач, поэтому в данной работе было решено рассмотреть растворение вещества с течением времени для обоснования прикладной значимости данного типа уравнений. Отметим, что «дифференциальные уравнения возникают при математической формулировке прикладных задач в дифференциальных уравнениях» [1, с.13].

Рассмотрим растворение твердого вещества с течением времени. Скорость растворения вещества пропорциональна имеющемуся количеству хнерастворенного и разности концентрации насыщенного раствора и концентрации раствора в данный момент времени C_t. Пусть М– исходное количество вещества; М – х – количество вещества, растворенного к данному моменту. Тогда под концентрацией раствора в данный момент будем понимать отношение количества вещества, растворенного в данный момент, к объему V растворителя или: $C_t = \dfrac{M-x}{V}$. При достижении C_t некоторого предельного значения C_0 (для данного вещества и растворителя) раствор становится насыщенным и дальнейшее растворение не происходит.

Задача 1. Добавив в кружку с холодным чаем, в которой находится 90 мл жидкости, 10 грамм сахара, обнаружили, что в течение часа растворилась половина этого количества. Если концентрация насыщенного раствора сахара равна 1/3, найти количество растворенного сахара в течение часа, если за это время в кружку было долито еще 180 мл воды.

Решение. Скорость уменьшения растворенного вещества $\dfrac{dx}{dt}$, как сказано ранее, должна быть пропорциональна х и разности C_0 и C_t, из чего следует: $\dfrac{dx}{dt} = -kx\left(C_0 - C_t\right)$,где k– коэффициент пропорциональности, подлежащий определению, причем k>0. Знак минус в правой части обусловлен тем, что каждый множитель $k, x,$ $C_0 - C_t$ положителен, а $\dfrac{dx}{dt} < 0$, так как с течением времени количество растворенного вещества убывает. C_t заменим через М, V, х и преобразуем произведение этих множителей получим:

$$kx\left(C_0 - C_t\right) = kx\left(C_0 - \frac{M - x}{V}\right) = \frac{kx}{V}\left(C_0 V - M + x\right).$$

Пусть

$$\begin{cases} \frac{k}{V} = a; \\ C_0 V - M = b. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда $kx\left(C_0 - C_t\right) = ax\left(b + x\right)$ и дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -ax\left(b + x\right). \tag{2}$$

Начальное условие: при

$$t = 0, \quad x = M, \tag{3}$$

Условие для определения коэффициента *a*: при

$$t = 1\text{ч},\ x = \frac{M}{2}. \tag{4}$$

Разделим переменные в уравнении (2) и интегрируем, тогда получим:

$$\int \frac{dx}{x\left(b + x\right)} = -\int a dt + \ln C_1 \tag{5}$$

Разложив подынтегральное выражение первого интеграла на простейшие дроби и умножив обе части уравнения (5) на b, интегрируя и потенцируя, полагая $\ln C = b \ln C_1$ получим:

$$\frac{x}{b + x} = Ce^{-abt}. \tag{6}$$

Полагая в уравнении (6) t=0 и принимая во внимание начальное условие (3), запишем: $C = \frac{M}{b+M}$.Тогда уравнение (6) примет вид: $\frac{x}{b+x} = \frac{M}{b+M} e^{-abt}$. Решая данное равенство относительно *x*получим

$$x = \frac{Mbe^{-abt}}{b + M\left(1 - e^{-abt}\right)}. \tag{7}$$

Выполнив проверку: полагая в уравнении (7) *t*=0, получим, что начальное условие соблюдается.

Составим с помощью (7) выражение $b + x = \frac{b\left(b+M\right)}{b + M\left(1 - e^{-abt}\right)}$.

По условию M = 10 г, V = 90 мл, $C_0 = \frac{1}{3}$, следовательно по второму из соотношений (1) $b = 20 > 0$. Равенство (7)при условии (4) примет вид: $x = \frac{20e^{-20at}}{3 - e^{-20at}} = 5$.

Тогда $a = -\frac{\ln 0,6}{20} \approx 0,0255$, а попервому из соотношений (1), $k = 0,0255 \cdot 90 = 2,295$.При V=180 мл $a = 0,01275;\ b = 50;$ $ab = 0,6375$.Используя формулу (7), найдём искомое количество оставшегося сахара $M - x \approx 5,2$ г.

Литература

1. Понаморев, К.К. Составление дифференциальных уравнений /К.К. Понаморев// Под ред. Ю.С. Богданов. Мн. «Вышэйш. школа», 1973. С. – 560.