УДК 539.3

# УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ

**Захарчук Ю. В.**

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

Многослойные конструкции, в том числе трехслойные, нашли широкое применение при развитии самолетостроения в середине прошлого века. Это обусловило необходимость разработки механико-математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. В трехслойных пакетах основная часть механической нагрузки воспринимается несущими слоями из материалов высокой прочности и жесткости. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (температура, радиация), создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

В настоящее время разработка общей теории квазистатических деформаций трехслойных конструкций транспортной техники, в том числе и пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Для них создаются математические модели деформирования при комплексных термосиловых, терморадиационных нагружениях. Рассматриваются задачи прочности, устойчивости, динамического поведения.

Динамике и колебаниям слоистых элементов конструкций, включая трехслойные пакеты, посвящены многочисленные исследования, в том числе монографии [1–3]. В них даются общие подходы к разработке механико-математических моделей колебаний и квазистатического деформирования трехслойных стержней, пластин и оболочек. Свободные и вынужденные колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в публикациях [4–6]. Продолжаются исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных пластин при акустическом [7], термосиловом [8, 9] воздействии. Квазистатическому деформированию круговой трехслойной пластины в своей плоскости посвящены работы [10, 11], рассматривающие лишь частные случаи нагружения: осесимметричное, неосесимметричное радиальной нагрузкой.

Следует отметить, что и деформирование и колебания трехслойных круговых пластин в указанных работах исследовались только в случае несжимаемого заполнителя. В то время как применение различных видов заполнителей в расчетных моделях показывает, что существенную роль в напряженно-деформированном состоянии трехслойных пластин играют не только размеры, жесткость срединного слоя [12], степень заполнения объема между несущими слоями [13], но и его сжимаемость [14, 15]. Применение моделей, учитывающих сжимаемость заполнителя, позволило бы с большей степенью точности оценить физические параметры прочности рассматриваемых конструкций. Поэтому здесь приведена постановка и решение краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, включающая систему дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия.

**1. Постановка краевой задачи.** Рассматривается упругая круговая трехслойная пластина со сжимаемым-растягиваемым заполнителем (рис. 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат $r$, $\varphi$, $z$, связанной со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие по толщине принимается линейным.

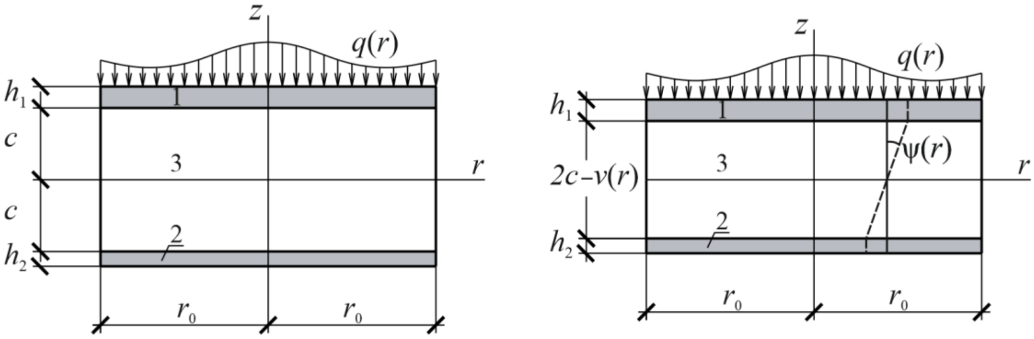


Рис. 1. Схема деформирования круговой трехслойной пластины

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ обозначен прогиб нижнего несущего слоя, $u(r)$ – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя, $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителе, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Через $h_k$ обозначена толщина $k$–го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– несущие слои *1, 2*

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right), \quad w^{(1)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + v\left(r\right) \quad \left(c \le z \le c + h_1\right),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r\,, \quad w^{(2)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) \quad \left(-c - h_2 \le z \le -c\right),$$

– заполнитель *3*

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right], \; w^{(3)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + \frac{v\left(r\right)}{2c}\left(z+c\right) \quad \left(-c \le z \le c\right), \tag{1}$$

где $z$ – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr}\right), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}\left(u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right)\right),, \; \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\
\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - zw,_{rr}\,, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}\left(u - c\psi - zw,_r\right),, \; \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\
\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - z\left[w,_{rr} + \frac{v,_{rr}}{2c}\left(z+c\right)\right], \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z+c\right)\right]\right\}, \\
\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{z}{2c}v,_r\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ $(\alpha\ = r,\ \varphi)$, введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} \mathrm{dz},\ \ M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} \mathrm{zdz},$$

$$S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 \mathrm{dz},,\ \ Q^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_{rz}^{(3)} \mathrm{dz},\ \ M_{rz}^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_{rz}^{(3)} \mathrm{zdz},,\ \ T_z^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_z^{(3)}\, \mathrm{d}\, z, \tag{3}$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right),\ \ D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c\left(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}\right),$$

где интегралы берутся по толщине $k$-го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа.

$$\delta A = \delta W,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работы внешних сил $\delta A_1$ и контурных усилий $\delta A_2$; $\delta W$ – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S q\delta w r\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi. \tag{4}$$

Вариация работы контурных усилий $T_r^0$, $H_r^0$, $M_r^0$, $Q^0$, $D_r^0$, $M_{rz}^0$:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w,_r + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v,_r + M_{rz}^0 \delta v)\, \mathrm{d}\, \varphi. \tag{5}$$

Вариация работы сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta\varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\phi^{(k)} \delta\varepsilon_\phi^{(k)}) \mathrm{dz}\ + 2\int_{-c}^{c} \sigma_{rz}^{(3)} \delta\varepsilon_{rz}^{(3)} \mathrm{dz} + \int_{-c}^{c} \sigma_z^{(3)} \delta\varepsilon_z^{(3)} \mathrm{dz} \right] r\, \mathrm{d}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi. \tag{6}$$

Выразив в (6) деформации через искомые функции и приравняв полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5), потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых величин. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (3), описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{cases} T_r,_r + \dfrac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_r,_r + \dfrac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = 0, \\ M_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q, \\ D_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}\left(2D_r,_r - D_\varphi,_r - M_{rz}^{(3)}\right) - T_z^{(3)} - M_{rz}^{(3)},_r = 0. \end{cases} \tag{7}$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_r\ = T_r^0,\ \ H_r = H_r^0,\ \ M_r = M_r^0,\ \ M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0,$$
$$D_r = D_r^0;\ \ D_r,_r + \frac{1}{r}\left(D_r - \mathrm{D}_\varphi\right) - M_{rz}^{(3)} = M_{rz}^0. \tag{8}$$

Выразив внутренние обобщенные усилия в (7) через искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi\left(r\right)$, $v\left(r\right)$, и используя обозначения $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$, $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$, получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r - a_4 v,_r) + K_3^- v,_r = p,\\
\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r - a_7 v,_r) - 2cG_3\psi = 0,\\
\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r - a_8 v,_r) = -q,\\
\mathrm{L}_3(a_4 u + a_7\psi - a_9 w,_r - a_{10} v,_r) + \frac{c}{6}K_3^-\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) - 2cK_3^+ v - 2cK_3^-\left(u,_r + \frac{u}{r}\right) = -q.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Здесь коэффициенты $a_i$ и дифференциальные операторы $\mathrm{L}_2$ (*оператор Бесселя*), $\mathrm{L}_3$ определяются соотношениями:

$$
a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+,\quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),\quad a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+,
$$

$$
a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right),
$$

$$
a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right],
$$

$$
a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+,
$$

$$
a_7 = c^2\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+\right],
$$

$$
a_8 = c\left[h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ - h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+\right],
$$

$$
a_9 = c^2\left(h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{5}c^3 K_3^+\right),
$$

$$
\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},\quad \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.
$$

Краевая задача замыкается добавлением к системе (9) силовых (8) или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$
u = \psi = w = v = w,_r = 0 \ \text{ при } \ r = r_0.
$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$
u = \psi = w = v = M_r = 0 \ \text{ при } \ r = r_0. \tag{10}
$$

Следует отметить, если в системе (9) положить $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым заполнителем [3, 8].

**2. Аналитическое решение краевой задачи.** В общем случае получить точное решение системы (9) не удалось. Поэтому ограничиваемся рассмотрением изгиба пластины под действием равномерно распределенной нагрузки ($q$ = const, $p$ = 0), с легким заполнителем. В этом случае пренебрегаем работой заполнителя в тангенциальном и вертикальном направлениях, что приводит к удалению двух интегральных слагаемых в выражении вариации работы внутренних усилий (6), содержащих $\sigma_{rz}, \sigma_z$. В системе (9) исчезнут последнее слагаемое во втором уравнении и последние два слагаемые в четвертом уравнении. После необходимых преобразований было получено дифференциальное уравнение четвертого порядка для прогиба пластины. Его решение было сведено к решению двух дифференциальных уравнений второго порядка. В итоге имеем следующее решение задачи об изгибе трехслойной круговой пластины со сжимаемым заполнителем:

$$
\begin{gathered}
\psi = -\frac{q}{8a_6}r^3 - \frac{1}{a_6}(a_3 u - a_8 w,_r - a_9 v,_r) + C_3\frac{r}{2},\\
w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8}\int u\,\mathrm{d}r - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8}v - \frac{a_5 q}{8\left(a_6^2 - a_5 a_8\right)}r^3 + C_{10}\frac{r^2}{4} + C_{12},\\
u = b_1 v,_r + \left(b_2 + b_3\right)\mathrm{L}_3^{-1}\left(q\right) + C_5\frac{r}{2},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$v=-\frac{C_7}{\beta}J_0(\beta r)+\frac{\pi}{2}\left(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\right)+C_9,$$

где $J_1(\beta r)$, $Y_1(\beta r)$ – *функции Бесселя* первого и второго рода соответственно;

$$q_1=\frac{r}{2}\left(\frac{d_4d_5-d_1d_8}{d_1d_6-d_2d_5}+\frac{d_1d_9}{d_1d_6-d_2d_5}\right),\ b_1=\frac{d_2d_7-d_3d_6}{d_1d_7-d_3d_5},\ b_2=\frac{d_4d_7-d_3d_8}{d_1d_7-d_3d_5},\ b_3=\frac{d_3d_9}{d_1d_7-d_3d_5},$$

$$d_1=(a_1a_6-a_2a_3)\left(a_6^2-a_5a_8\right)-(a_2a_6-a_3a_5)(a_3a_6-a_2a_8),$$

$$d_2=(a_4a_6-a_2a_9)\left(a_6^2-a_5a_8\right)-(a_6a_7-a_5a_9)(a_3a_6-a_2a_8),\ d_3=a_6\left(a_6^2-a_5a_8\right)K_3^-,$$

$$d_4=a_2\left(a_6^2-a_5a_8\right)-a_5(a_3a_6-a_2a_8),$$

$$d_5=(a_4a_6-a_3a_7)\left(a_6^2-a_5a_8\right)-(a_2a_6-a_3a_5)(a_6a_9-a_7a_8),$$

$$d_6=(a_6a_{10}-a_7a_9)\left(a_6^2-a_5a_8\right)-(a_6a_7-a_5a_9)(a_6a_9-a_7a_8),\ d_7=\frac{a_6c}{6}\left(a_6^2-a_5a_8\right)K_3^-,$$

$$d_8=a_7\left(a_6^2-a_5a_8\right)-a_5(a_6a_9-a_7a_8),\ d_9=a_6\left(a_6^2-a_5a_8\right).$$

В общем случае в решении (11) содержится 12 констант интегрирования. Шесть из них полагаются равными нулю исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины. Остальные определяются из граничных условий на контуре пластины.

В случае шарнирного опирания контура из условий (10) и решения (11) следуют константы интегрирования

$$C_3=\frac{q_0r_0^2}{8a_6}+\frac{2a_8}{a_6r_0}\left(-\frac{a_5}{16\left(a_6^2-a_5a_8\right)}q_0r_0^3+C_{10}\frac{r_0}{2}\right)$$

$$+\frac{2a_9}{a_6r_0}\left(\frac{a_6a_7-a_5a_9}{a_6^2-a_5a_8}-1\right)C_7J_1(\beta r_0)+\frac{q_0}{2\beta^2}(p_1+p_2),$$

$$C_5=-(b_2+b_3)\frac{q_0r_0^2}{8}-\frac{q_0b_1}{2\beta^2}(p_1+p_2),\quad C_7=0,\quad C_9=-\frac{q_0r_0}{2\beta^2}(p_1+p_2),\tag{12}$$

$$C_{10}=\frac{3q_0a_5}{8\left(a_6^2-a_5a_8\right)}r_0^2-\frac{3q_0(a_2a_6-a_3a_5)(b_2+b_3)}{8(a_6^2-a_5a_8)}r_0^2+C_5,$$

$$C_{12}=-\frac{a_2a_6-a_3a_5}{a_6^2-a_5a_8}\left((b_2+b_3)\frac{q_0r_0^4}{64}+C_5\frac{r_0^2}{4}\right)+\frac{a_5}{64\left(a_6^2-a_5a_8\right)}q_0r_0^4-C_{10}\frac{r_0^2}{4}.$$

Таким образом, решение (11) с константами (12) описывает перемещения в трехслойной пластине с легким сжимаемым заполнителем в случае шарнирного опирания ее контура.

**3. Численные результаты.** Параметрический анализ проведен для шарнирно опертой по контуру пластины единичного радиуса $r_0=1$ м. Величина интенсивности поверхностной нагрузки – $q_0=-0{,}5$ МПа; линейные перемещения и геометрические параметры слоев, отнесенные к радиусу пластины, $c$ = 0,23, $h_1$ = 0,02, $h_2$ = 0,02.

На рис. 2 проведены расчетные прогибы пластин со сжимаемым (*1*, *2*) и несжимаемым (*3*) заполнителями: *1* – прогиб верхнего слоя; *2* – нижнего; *3* – при несжимаемом заполнителе. Материалы слоев дюралюминий–фторопласт-4–дюралюминий. Максимальное отличие прогибов составляет около 42 %, что существенно сказывается на всем напряженно-деформированном состоянии пластины.

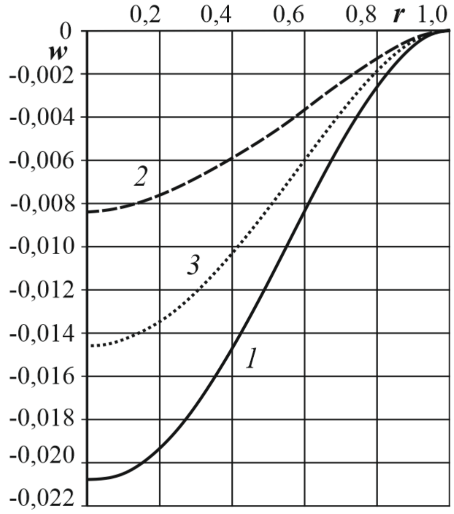


Рис. 2. Прогибы пластин со сжимаемым (1, 2) и несжимаемым (3) заполнителями

Рис. 3 показывает график изменения деформации обжатия $\varepsilon_z^{(3)}$ в заполнителе вдоль радиуса пластины. Деформация постоянна по толщине, поэтому одинакова во всех плоскостях заполнителя. Она достигает максимума в центре пластины, оставаясь в силу граничных условий нулевой на контуре.

Сдвиговая деформация в заполнителе $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ зависит от координаты *z*, графики ее изменения на поверхностях заполнителя показаны на рис. 4: *1* – $z = c$; *2* – $z = -c$. Максимальное значение достигается на нижней поверхности слоя, оно примерно в 2,5 раза больше аналогичного значения на верхней плоскости.

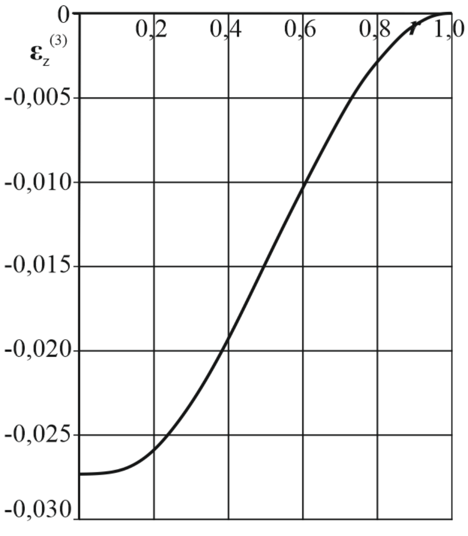


Рис. 3. Изменение деформации обжатия $\varepsilon_z(r)$ вдоль радиуса

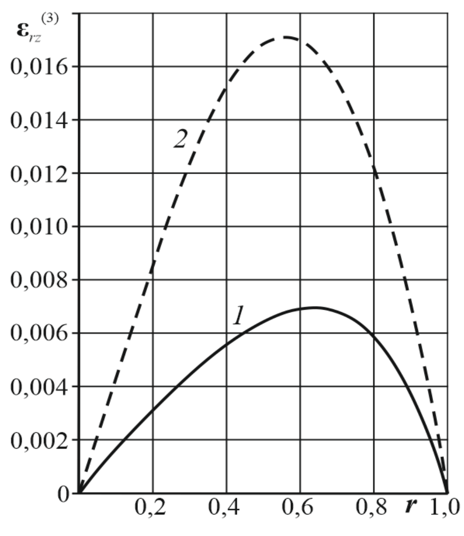


Рис. 4. Изменение деформаций $\varepsilon_{rz}(r)$ вдоль радиуса на поверхностях слоя 3

**Выводы.** Принятие кинематических гипотез для каждого слоя в отдельности, учет сжимаемости заполнителя позволяют существенно уточнять напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин. Предположение о линейности функции сжимаемости заполнителя в достаточной степени адекватно отражает реальное деформирование. Применение вариационных методов позволяет получать уточненную систему уравнений равновесия. Сведение дифференциального уравнения четвертого порядка для прогиба к двум дифференциальным уравнений второго порядка позволило получить аналитическое решение задачи об изгибе круговой трехслойной пластины с легким заполнителем при равномерно распределенной нагрузке. Численное исследование показало, что в принятых условиях максимальное отличие прогибов у пластин со сжимаемым и несжимаемым заполнителями отличаются на 42 %.

Таким образом, предложенная математическая модель позволяет исследовать НДС упругих трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем при любых осесимметричных нагрузках. Учет сжимаемости заполнителя приводит к существенному уточнению НДС рассматриваемой трехслойной пластины. Полученное аналитическое решение может служить для проведения соответствующих численных экспериментов при проведении расчетов композитных элементов конструкций в строительстве и машиностроении.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Т20Р-047).*

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Головко, К. Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш // Киев: Киевский ун-т. – 2012. – С. 541.
2. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan// Singapore – London: World Scientific Publishing. – 2015. – P. 376.
3. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов // Минск: БГУ. – 2011.– С. 543.
4. Старовойтов, Э. И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Ю. М. Плескачевский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 4(22). – С. 70–73.
5. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.
6. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B. N. Singh, D. K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – № 52. – P. 41–51.
7. Василевич, Ю. В. Метод расчета эффективности виброизоляции однослойного и многослойного ограждений в твердой упругой среде / Ю. В. Василевич, В. В. Неумержицкий // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 1(1). – С. 56–58.
8. Старовойтов, Э. И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 1(42). – С. 81–88.
9. Zenkour, A. M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A. M. Zenkour, N. A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.
10. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
11. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – БелГУТ. – Гомель. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
13. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels / L. Yang [et al.] // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol. 4, № 8. – P. 471–477.

14. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

15. Старовойтов, Э. И. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 3(48). – С. 26–33.

*Поступила: 02.02.2021*